QUELQUES THÉORÈMES INVERSES RELATIFS AUX PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ DE CESÀRO ET RIESZ

Par

J. KARAMATA

1.1. Lorsque la suite s_n est sommable - (C, k) ou - (R, k) et satisfait à une condition de convergence de la forme

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{n\leqslant n'\leqslant n+\varepsilon n} \{s_{n'} - s_n\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.1}$$

elle doit forcément converger. — Nous nous proposons d'examiner ce qu'on peut conclure quant à l'ordre de grandeur de la suite $s_{n'}$, $(n\to\infty)$ lorsque la longueur de l'intervalle $(n, n+\varepsilon n)$ auquel se rapporte la condition de convergence (1.1), est asymptotiquement plus petite que εn, en particulier, lorsque cet intervalle est de la forme

$$(n, n+\varepsilon n^{1-\theta}) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

1.2. Une réponse à cette question peut se déduire du théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $s(x)$ *à variation bornée dans tout intervalle fini,* k *entier* $\geqslant 1$ *et*

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) = s x^a + s' x^b + o(x^b), \quad x \to \infty, \tag{1.2}$$

avec

$$a > b, \quad \text{ou bien} \quad a = b \quad \text{et} \quad s' = 0.$$

Alors

$$s(x) \sim \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} s x^a, \quad x \to \infty, \tag{1.3}$$

lorsque l'une des trois conditions suivantes (dont chacune est contenue dans la précédente) est satisfaite:

$$\text{a)}\quad \liminf_{x\to\infty} \min_{x\leqslant x'\leqslant x+d(x)} \frac{s(x')-s(x)}{x^a} > o(1),\quad \varepsilon\to 0,\quad (1.4)$$

avec

$$d(x)=\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}};$$

$$\text{b)}\quad \liminf_{x\to\infty} \min_{x\leqslant x'\leqslant x+\delta(x)} \{s(x')-s(x)\} > o(1),\quad \varepsilon\to 0,\quad (1.5)$$

avec

$$\delta(x)=\varepsilon x^{1-a-\frac{a-b}{k}};$$

$$\text{c)}\qquad xs'(x) > O\left(x^{a+\frac{a-b}{k}}\right),\quad x\to\infty,\qquad (1.6)$$

lorsque la dérivée $s'(x)$ existe.

Lorqu'il s'agit des séries, c. à d. lorsque $s(x)$ est de la forme

$$s(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu\leqslant x} u_\nu,$$

toutes les expressions qui figurent dans ce théorème ainsi que les conditions a) et b) restent applicables, tandis que la condition c) est à remplacer par

$$\text{c}')\qquad nu_n > O\left(n^{a+\frac{a-b}{k}}\right),\quad n\to\infty.$$

Ce genre de théorèmes a été traité par Hyslop {1}, en particulier le cas où $a=0$, $s'=0$ et avec la condition de convergence de la forme c') mais où le signe $>$ est remplacé par $=$; un autre théorème de cette nature se trouve démontré dans ma Note {2}, correspondant toutefois à la sommabilité $-$(C, 1), mais où la condition de convergence se rapporte à l'intervalle plus général $(n, n+\varepsilon\, d_n)$.

En posant dans le théorème 1

$$s=0 \quad \text{et} \quad a+\frac{a-b}{k}=\theta,$$

c. à d.

$$a = \frac{k\theta + b}{k+1},$$

on obtient comme réponse à la question posée au début le

Théorème 2. *De*

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) \sim s' x^b, x \to \infty,$$

il résulte

$$s(x) = o\left(x^{\frac{k\theta + b}{k+1}}\right), \quad x \to \infty, \tag{1.7}$$

lorsque l'une des deux conditions suivantes est satisfaite:

d) $\liminf\limits_{x \to \infty} \operatorname*{Min}\limits_{x \leqslant x' \leqslant x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0;$

e) $x s'(x) > O(x^\theta), \quad x \to \infty.$ (1.8)

En particulier, lorsque $b = 0$ on en déduit le

Téorème 2'. *De*

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) \to s', \quad x \to \infty,$$

il résulte (1.9)

$$s(x) = o\left(x^{\frac{k}{k+1}\theta}\right), \quad x \to \infty,$$

lorsque l'une des deux conditions d) *ou* e) *est satisfaite.*

Dans ce théorème l'exposant $\frac{k}{k+1}\theta$ est le plus petit possible. Au § 3, j'en donne un exemple, pour lequel les limites sont effectivement atteintes dans le cas $k = 1$.

Un théorème semblable, correspondant à la sommabilité-A a été donné par B. Popović {3}, à savoir:

De

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} ds(t) = O(1), \quad \sigma \to 0,$$

il résulte

$$s(x)=O(x^{\theta}),\quad x\to\infty,$$

lorsque l'une des deux conditions d) *ou* e) *est satisfaite; dans cette affirmation non plus l'exposant* θ *ne peut être abaissé.*

1.3. En restant dans le même ordre d'idées, on peut donner une réponse à la question posée au début sous la forme bien plus générale suivante:

Théorème 3. *Soit* $s(x)$ *à variation bornée dans tout intervalle fini,* k *entier* $\geqslant 1$, $\varepsilon_0\geqslant\varepsilon>0$; a *et* b *réels quelconques,* $a\geqslant b$, $0\leqslant x_{n-1}<x_n\to\infty$, $n\to\infty$.

Lorsque la relation asymptotique

$$\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^k ds(t)=o(x^b),\quad n\to\infty,$$

n'est satisfaite que pour les valeurs de x *situées dans les intervalles*

$$x_n\leqslant x<x_n+\varepsilon_0 x_n^{1-\frac{a-b}{k}},$$

alors

$$s(x_n)=o(x_n^{a}),\quad n\to\infty,$$

toutes les fois que l'une des deux conditions de convergence suivantes, (dont la seconde est contenue dans la première) est satisfaite:

$$\text{f)}\quad \limsup_{n\to\infty}\ \max_{x_n\leqslant x<x_n+d(x_n)}\frac{|s(x)-s(x_n)|}{x_n^{a}}\to 0,\quad \varepsilon\to 0,\qquad (1.10)$$

avec

$$d(x)=\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}};$$

$$\text{g)}\quad \limsup_{n\to\infty}\ \max_{x_n\leqslant x<x_n+\delta(x_n)}|s(x)-s(x_n)|\to 0,\quad \varepsilon\to 0,\qquad (1.11)$$

avec

$$\delta(x)=\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}.$$

Dans le cas où

$s(x')=s(x_n)$ pour tout x' tel que $x_n\leqslant x'<x_n'$, $n=1,2,3,\ldots$, avec

$$x_n'\leqslant x_{n+1},$$

et lorsque pour un ε_0 et pour tout n

$$\varepsilon_0 x_n^{1-a-\frac{a-b}{k}} < x_n' - x_n ,$$

alors la condition de convergence g) est identiquement satisfaite; on peut donc en déduire, d'une part, les théorèmes de la nature suivante:

De la sommabilité (C, k) d'une suite s_n il résulte toujours

$$s_n = o(n^k), \quad n \to \infty.$$

Ou bien, d'une manière plus générale, le théorème:

Soit

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty,$$

et

$$s(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} u_\nu,$$

alors de

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k u_\nu = o(x^b), \quad x \to \infty,$$

il résulte

$$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = o(n^{b+k/\lambda}), \quad n \to \infty,$$

lorsque

$$\lambda_n \sim c\, n^\lambda, \quad n \to \infty,$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = o(n^b), \quad n \to \infty,$$

lorsque

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > C > 1.$$

D'autre part, lorsque la suite x_n croît assez vite, le théorème 3 a, dans le cas considéré, le caractère des théorèmes lacunaires que l'on peut formuler de la manière suivante:

Lorsque la série

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu$$

est sommable -(C, k) *ou* -(R, k) *et lorsque des groupes suffisamment grands de termes* u_ν *qui suivent le terme* u_{n_ν} *s'annulent, alors la suite partielle* s_{n_ν} *converge.*

Du théorème 3 on peut même déduire certaines généralisations de ces théorèmes lacunaires, en remplaçant, d'une part, la convergénce par des relations asymptotiques et, d'autre part, en n'assujettissant les termes u_ν relatifs à des intervalles (n_ν, n_ν') suffisamment grands, qu'à des conditions semblables à celles des conditions de convergence, sans qu'il soit nécessaire de les annuler.

L'on obtient ainsi, entre autres, certains théorèmes dûs à Meyer-König {4}.

À titre d'exemple citons le théorème suivant:

Soit $\varepsilon > 0$ *et*

$$n_\nu < n_{\nu+1} \to \infty, \quad \nu \to \infty,$$

lorsque la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu \sim s x^a, \quad x \to \infty,$$

est satisfaite pour les valeurs de x *situées dans les intervalles*

$$n_\nu \leqslant x < (1+\varepsilon) n_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

et lorsque

$$u_n = O(n^{a-1}), \quad n \to \infty,$$

pour les valeurs de n *situées dans les intervalles*

$$n_\nu \leqslant n < (1+\varepsilon) n_\nu,$$

alors

$$s_{n_\nu} \sim \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} s n_\nu^a, \quad n_\nu \to \infty.$$

2. 1. Il suffit de démontrer le théorème 1 en supposant que la fonction $s(x)$ satisfait à la condition a), c. à d. (1.4). Car, la condition c) est contenue dans la condition b), et la condition b) dans la condition a), comme cela résulte du lemme suivant:

Lemme 1. *Soit* $\alpha > \beta \geqslant 0$; *la condition*

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqslant x' \leqslant x+\varepsilon x^{1-\beta}} \frac{s(x') - s(x)}{x^{\alpha-\beta}} > o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.1}$$

sera toujours satisfaite lorsque la fonction $s(x)$ *satisfait à la condition*

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqslant x' \leqslant x+\varepsilon x^{1-\alpha}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.2}$$

Lorsque, en outre, $s(x)$ *est dérivable, alors, cette dernière condition sera toujours remplie lorsque*

$$xs'(x) > O(x^{\alpha}), \quad x \to \infty. \tag{2.3}$$

Supposons que la condition (2.3) est satisfaite, c. à d. que

$$s'(x) > -Mx^{\alpha-1}, \quad \text{pour tout} \quad x > 0;$$

en intégrant cette inégalite de x à $x' < x + \varepsilon x^{1-\alpha}$, on en déduit

$$s(x') - s(x) > -\frac{M}{\alpha}(x'^{\alpha} - x^{\alpha}) \geqslant$$

$$> -\frac{M}{\alpha}\{(x + \varepsilon x^{1-\alpha})^{\alpha} - x^{\alpha}\} =$$

$$> -\frac{M}{\alpha} x^{\alpha} \left\{\left(1 + \frac{\varepsilon}{x^{\alpha}}\right)^{\alpha} - 1\right\},$$

par suite

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqslant x' \leqslant x+\varepsilon x^{1-\alpha}} \{s(x') - s(x)\} \geqslant -\frac{M}{\alpha}\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Il en résulte que la condition (2.2) est bien satisfaite lorsque la condition (2.3) l'est.

Pour démontrer que la condition (2.2) est contenue dans la condition (2.1) posons

$$\Lambda_{\alpha}(x) = e^{x^{\alpha}}, \quad V_{\alpha}(x) = (\lg x)^{1/\alpha},$$

$V_{\alpha}(x)$ étant la fonction inverse de $\Lambda_{\alpha}(x)$, et supposons d'abord que $\beta > 0$. En désignant par λ un nombre > 1, on aura

$$V_{\alpha}\{\lambda \Lambda_{\alpha}(x)\} - x = (x^{\alpha} + \lg \lambda)^{1/\alpha} - x \sim \frac{\lg \lambda}{\alpha} x^{1-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

de sorte que la condition (2.1) est équivalente à

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(\beta, x)} \frac{s(x') - s(x)}{x^{\alpha-\beta}} \geqslant -w_1(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to 1, \qquad (2.4)$$

avec

$$X(\beta, x) = V_\beta\{\lambda \Lambda_\beta(x)\},$$

et la condition (2.2) à

$$\liminf_{x=0} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(\alpha, x)} \{s(x') - s(x)\} \geqslant -w(\lambda) \to 0, \; \lambda \to 1, \qquad (2.5)$$

avec

$$X(\alpha, x) = V_\alpha\{\lambda \Lambda_\alpha(x)\}.$$

Il s'agit donc de montrer que la condition (2.4) sera satisfaite lorsque la condition (2.5) est remplie. Dans ce but posons

$$x_{n+1} = V_\alpha\{\lambda \Lambda_\alpha(x_n)\} = V_\alpha\{\lambda^{n+1} \Lambda_\alpha(x)\},$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots.,$ avec $x_0 = x$.

En déterminant k de manière que

$$x_k \leqslant x' < x_{k+1},$$

on aura

$$s(x') - s(x) =$$

$$= \{s(x_1) - s(x)\} + \{s(x_2) - s(x_1)\} + \cdots + \{s(x_k) - s(x_{k-1})\} +$$

$$+ \{s(x') - s(x_k)\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=0}^{k} \operatorname*{Min}_{x_\nu \leqslant t \leqslant x_{\nu+1}} \{s(t) - s(x_\nu)\}.$$

En supposant que

$$x \leqslant x' \leqslant X(\beta, x),$$

et en déterminant n de manière que

$$x_n \leqslant X(\beta, x) < x_{n+1},$$

on en déduit

$$s(x') - s(x) \geqslant \sum_{\nu=0}^{n} \operatorname*{Min}_{x_\nu \leqslant t \leqslant x_{\nu+1}} \{s(t) - s(x_\nu)\},$$

c. à d.

$$\operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(\beta, x)} \{s(x') - s(x)\} \geqslant \sum_{\nu=0}^{n} \operatorname*{Min}_{x_\nu \leqslant t \leqslant x_{\nu+1}} \{s(t) - s(x_\nu)\}. \quad (2.6)$$

Pour le nombre n ainsi déterminé, on a

$$V_\alpha\{\lambda^n \Lambda_\alpha(x)\} \leqslant V_\beta\{\lambda \Lambda_\beta(x)\} < V_\alpha\{\lambda^{n+1} \Lambda_\alpha(x)\},$$

c. à d.

$$(n \lg \lambda + x^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (\lg \lambda + x_\beta)^{1/\beta} < ((n+1) \lg \lambda + x^\alpha)^{1/\alpha},$$

$$n \leqslant \frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda} < n+1,$$

donc

$$n = \left[\frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda}\right].$$

Par suite, en divisant l'inégalité (2.6) par $x^{\alpha-\beta}$, on en déduit

$$\operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(\beta, x)} \frac{s(x') - s(x)}{x^{\alpha-\beta}} \geqslant \frac{n}{x^{\alpha-\beta}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \operatorname*{Min}_{x_\nu \leqslant t \leqslant x_{\nu+1}} \{s(t) - s(x_\nu)\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda \, x^{\alpha-\beta}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Min}_{x_\nu \leqslant t \leqslant x_{\nu+1}} \{s(t) - s(x_\nu)\}.$$

Ainsi, en supposant la condition (1.5) remplie, on obtient finalement que

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X(\beta, x)} \frac{s(x') - s(x)}{x^{\alpha-\beta}} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{x=\infty} \frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda \, x^{\alpha-\beta}} \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant t \leqslant X(\alpha, x)} \{s(t) - s(x)\} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\alpha}{\beta} w(\lambda),$$

c. à d.

$$w_1(\lambda) \leqslant \frac{\alpha}{\beta} w(\lambda),$$

d'où il résulte que la condition (2.4) sera bien satisfaite, lorsque (2,5) l'est.

Ceci démontre le lemme 1 dans le cas où $\beta > 0$. Lorsque $\beta = 0$, la démonstration du lemme 1 est la même, mais à la place de la fonction

$$\Lambda_\beta(x) = e^{x^\beta},$$

il faut prendre la fonction

$$\Lambda_0(x) = x.$$

En suivant la même voie de démonstration, l'on obtient dans ce cas que

$$w_1(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^\alpha - 1}{\lg \lambda} w(\lambda).$$

Le lemme 1 est ainsi entièrement démontré.

2.2. En posant dans le lemme 1

$$\alpha = a + \frac{a-b}{k} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a-b}{k},$$

les conditions (2.1), (2.2) et (2.3) se réduisent respectivement aux conditions (1.4), (1.5) et (1.6) de sorte que, d'après ce lemme, il suffit de démontrer le théorème 1 seulement sous l'hypothèse que la condition a), c. à d. (1.4) soit remplie. Pour en simplifier la démonstration, remarquons que l'on peut, en restant dans le cas général, supposer que $s = 0$.

En effet, il suffit de remplacer dans ce théorème la fonction

$$s(x) \quad \text{par} \quad s(x) - \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} s x^a,$$

puisque dans ce cas l'hypothèse (1.2) se réduit à

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) = s' x^b + o(x^b), \quad x \to \infty,$$

et l'affirmation (1.3) à

$$s(x) = o(x^a), \quad x \to \infty,$$

Quant à la condition (1.4), elle garde la même forme puisque

$$\frac{x'^a - x^a}{x^a} \to 0, \quad x \to \infty,$$

pour tout $x \leqslant x' \leqslant x + \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}$.

Il nous reste donc à démontrer le

Théorème 1'. *Soit $s(x)$ à variation bornée dans tout intervalle fini, k entier $\geqslant 1$ et $a > b$. De la relation*

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) \sim s' x^b, \quad x \to \infty, \tag{2.7}$$

il résulte

$$s(x) = o(x^a), \quad x \to \infty, \tag{2.8}$$

lorsque la fonction $s(x)$ satisfait en outre à la condition

$$\liminf_{x=\infty} \; \underset{x \leqslant x' \leqslant x + d(x)}{\mathrm{Min}} \; \frac{s(x') - s(x)}{x^a} > o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.9}$$

avec

$$d(x) = \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}$$

A cet effet démontrons d'abord les deux lemmes suivants:

Lemme 2. *Soit*

$$S_n(x) = \int_0^x S_{n-1}(t)\, dt \tag{2.10}$$

pour $n = 1, 2, 3 \ldots,$ avec $S_0(x) = s(x)$,
c. à d.

$$S_n(x) = \frac{x^n}{n!} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n ds(t), \quad avec \quad s(0) = 0,$$

et soit $d>0$; *alors, pour tout entier* k,

$$\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d s(x+t_1+t_2+\cdots+t_k)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} S_k(x+\nu d). \tag{2.11}$$

Ce lemme se démontre facilement par l'induction. En effet, il est évident que (2.11) est valable pour $k=1$. En supposant que cette identité est valable pour un k, en y remplaçant x par $x+t_{k+1}$, puis en l'intégrant par rapport à d, on en déduit, en tenant compte de (2.10), que cette identité est de même valable pour $k+1$.

Lemme 3. *La condition* (2.9) *étant supposée remplie, on aura de même*

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x\leqslant t\leqslant x+d(x)} \frac{s(x+\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}})-s(t)}{x^a} > o(1),\ \varepsilon\to 0, \tag{2.12}$$

pour $d(x)=\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}$.

En effet, quelque soit t de l'intervalle

$$x\leqslant t\leqslant x+\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}.$$

on a l'inégalité

$$\frac{s(x+\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}})-s(t)}{x^a} \geqslant \frac{t^a}{x^a} \min_{t\leqslant t'\leqslant t+d(t)} \frac{s(t')-s(t)}{t^a} \geqslant$$

$$\geqslant (1+\varepsilon x^{-\frac{a-b}{k}}) \min_{t\leqslant t'\leqslant t+d(t)} \frac{s(t')-s(t)}{t^a},$$

d'où il résulte, d'après (2.9), l'affirmation (2.12) du lemme 3.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1'. D'après (2.10), l'hypothèse (2.7) peut être mise sous la forme

$$S_k(x)=\frac{s'}{k!}x^{k+b}+o(x^{k+b}),\quad x\to\infty,$$

et on en déduit, d'après l'identité (2.11) que

$$\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d s(x+t_1+t_2+\cdots+t_k)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k =$$

$$= \frac{s'}{k!}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}(x+\nu d)^{k+b}+o\{(x+kd)^{k+b}\},\quad x\to\infty.$$

En y posant

$$d=d(x)=\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}},$$

il est clair que

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{\nu}(x+\nu d)^{k+b}=o(x^{k+b}),\quad x\to\infty,$$

et l'on obtient ainsi la relation

$$\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d s(x+t_1+t_2+\cdots+t_k)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k=o(x^{k+b}),\quad x\to\infty.$$

Afin de normer l'intégrale k-ième de cette relation, divisons la par

$$x^a\frac{d^k}{k!}=\frac{\varepsilon^k}{k!}x^{k+b};$$

on en déduit

$$\frac{k!}{d^k}\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d \frac{s(x+t_1+t_2+\cdots+t_k)}{x^a}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k=o(1),\quad k\to\infty.$$

Puisque, quelque soit y,

$$\frac{s(y)}{x^a}=\frac{k!}{d^k}\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d \frac{s(y)}{x^a}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k,$$

il en résulte finalement la relation

$$-\frac{s(y)}{x^a}=-\left(\frac{y}{x}\right)^a\frac{s(y)}{y^a}=$$

$$=\frac{k!}{d^k}\int_0^d \cdots \int_0^d \int_0^d \frac{s(x+t_1\cdots t_k)-s(y)}{x^a}\,dt_1\cdots dt_k+o(1),\quad x\to\infty,$$

où l'on a posé

$$d = d(x) = \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}.$$

Posons, à présent,

$$\underset{x \leqslant x' \leqslant x+d(x)}{\text{Min}} \frac{s(x') - s(x)}{x^a} = -w_x(\varepsilon), \tag{2.14}$$

avec

$$d(x) = \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}},$$

il s'ensuit, la condition (2. 9) du théorème étant supposée remplie, que

$$\limsup_{x=\infty} w_x(\varepsilon) = w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

D'autre part, en posant dans la relation (2. 13) $y = x$, il s'ensuit, d'après (2. 14), que

$$\frac{s(x)}{x^a} \leqslant w_x(k\varepsilon) + o(1), \quad x \to \infty.$$

Par suite, on en déduit, en premier lieu, que

$$\limsup_{x=\infty} \frac{s(x)}{x^a} \leqslant w(k\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.15}$$

Posons, en second lieu,

$$\underset{x \leqslant t \leqslant x+d(x)}{\text{Min}} \frac{s(x + \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}}) - s(t)}{x^a} = -w_x^*(\varepsilon), \tag{2.16}$$

avec

$$d(x) = \varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}},$$

il s'ensuit, d'après le lemme 3, c. à d. la condition (2. 12), que

$$\limsup_{x=\infty} w_x^*(\varepsilon) = w^*(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

D'autre part, en posant dans la relation (2. 13)

$$y = kd(x) = x + k\varepsilon x^{1-\frac{a-b}{k}},$$

il s'ensuit, d'après (2. 16), que

$$(1 + k\varepsilon x^{-\frac{a-b}{k}}) \frac{s(y)}{y^a} \geqslant -w_x^*(k\varepsilon) + o(1), \quad x \to \infty,$$

On en déduit que

$$\lim_{y=\infty} \inf \frac{s(y)}{y^a} \geqslant - w^*(k\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.17}$$

Des relations (2.15) et (2.17) il résulte, enfin, l'affirmation (2.9).

Le théorème 1′ se trouve ainsi démontré, et par cela même les théorèmes 1 et 2.

Quant à la démonstration du théorème 3, remarquons que tout le raisonnement de la démonstration du théorème 1, à l'exception de celui du lemme 3, s'applique sans aucun changement lorsqu'on suppose que x, au lieu de tendre vers l'infini d'une manière continue, devient infiniment grand en parcourant une suite discrète de valeurs x_n (ou même, plus généralement, en parcourant les valeurs d'un ensemble donné de l'intervalle $(0, \infty)$). Vu que ce raisonnement ne s'applique pas au lemme 3, c. à d. que ce lemme n'est plus valable lorsqu'on suppose que la condition (1.4), ou bien que (2.9) n'est remplie que pour une suite de valeurs $x = x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, on est obligé de remplacer dans ces conditions, ainsi que dans (2.5) et (2.6), le signe $>$ par le signe $=$. Dans ce cas le lemme 3 devient supperflu et dans le théorème 3 on doit remplacer ces conditions par (1.10) et (1.11).

3. Afin de montrer que dans le théorème 2, et ses conséquences, la limite donnée par (1.7) de l'ordre de croissance de la fonction $s(x)$ est la plus précise possible, nous construirons un exemple qui nous montrera, dans le cas particulier $k = 1$ du théorème 2′, que l'ordre de croissance donné par la relation (1.9) est le plus précis possible même lorsqu'on y remplace l'hypothèse (1.8) par l'hypothèse plus restrictive

$$xs'(x) = O(x^{\theta}), \quad x \to \infty. \tag{3.1}$$

Nous allons montrer en effet que dans les deux théorèmes: *La condition* (3.1) *étant satisfaite, de*

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t)\,dt = o(1), \quad x \to \infty, \tag{3.2}$$

il résulte

$$s(x) = o(x^{\theta/2}), \quad x \to \infty. \tag{3.3}$$

La condition (3. 1) *étant supposée satisfaite, de*

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = O(1), \quad x \to \infty, \tag{3.4}$$

il résulte

$$s(x) = O(x^{\theta/2}), \quad x \to \infty. \tag{3.5}$$

L'ordre de grandeur donné par les relations (3. 3) et (3. 5) est le plus précis possible. En d'autres termes, nous allons montrer qu'il existent des fonctions $s(x)$ qui satisfont aux conditions (3. 1) et (3. 2), respectivement au (3. 4), telles que pour une suite donnée λ_n de valeurs de x la suite

$$s(\lambda_n)\,\lambda_n^{-\theta/2}$$

tend vers zéro aussi lentement que possible, respectivement reste supérieure à un nombre positif.

Dans ce but posons

$$s(x) = u(x^\theta) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\theta} = \alpha > 1.$$

La condition (3.1) se transforme alors en

$$u'(x) = O(1), \quad x \to \infty, \tag{3.6}$$

les relations (3. 2), respectivement (3.4), en

$$\frac{\alpha}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}\,u(t)\,dt = o(1), \quad \text{resp.} \quad = O(1), \quad x \to \infty, \tag{3.7}$$

tandis que les conditions (3. 3), resp. (3. 5), en

$$u(x) = o(\sqrt{x}), \quad \text{resp.} \quad = O(\sqrt{x}), \quad x \to \infty. \tag{3.8}$$

Definissons la fonction $u(x)$ de la manière suivante

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda_1 - \mu_1, \\ \mu_n\, g\left(\dfrac{x-\lambda_n}{\mu_n}\right) & \text{pour} \quad \lambda_n - \mu_n \leqslant x \leqslant \lambda_n + \mu_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{pour} \quad \lambda_n + \mu_n \leqslant x \leqslant \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}, \end{cases}$$

la fonction $g(t)$ étant donnée dans l'intervalle $(-1, +1)$ par

$$g(t) = \begin{cases} 1+t & \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1-t & \text{pour } \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

et où l'on a posé

$$\lambda_n = 2^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

quant à la suite μ_n nous poserons

$$\mu_n = \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} = \varepsilon_n 2^{n/2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

respectivement

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = 2^n/_2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

suivant qu'il s'agit, dans (3. 7) ou (3. 8), du „o" ou du „O", et où la suite ε_n peut tendre vers zéro aussi lentement qu'on le veut.

Il est évident que la fonction $u(x)$ ainsi définie satisfait à la condition (3. 6), puisque

$$|u'(x)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad x \geqslant 0.$$

D'autre part, en désignant par n le plus grand entier tel que

$$\lambda_n + \mu_n \leqslant x,$$

on a

$$\frac{\alpha}{x^a} \int_0^x t^{\alpha-1} u(t)\, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{x^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \int_{\lambda_\nu - \mu_\nu}^{\lambda_\nu + \mu_\nu} t^{\alpha-1} g\left(\frac{t-\lambda_\nu}{\mu_\nu}\right) dt + \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_{\lambda_\nu + \mu_\nu}^{x} t^{\alpha-1} u(t)\, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{x^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu^2 \int_{-1}^{+1} (\lambda_\nu + \mu_\nu t)^{\alpha-1} g(t)\, dt + R(x) =$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \int_{-1}^{+1} (\lambda_\nu + \mu_\nu t)^\alpha g'(t)\, dt + R(x) =$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^\alpha \mu_\nu \int_0^1 \left\{\left(1 + \frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu} t\right)^\alpha - \left(1 - \frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu} t\right)^\alpha\right\} dt + R(x) =$$

$$= \frac{\alpha}{x^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^\alpha \frac{\mu_\nu^2}{\lambda_\nu} + R(x) + o(1), \quad x \to \infty,$$

où

$$R(x) = 0 \quad \text{lorsque} \quad x \leqslant \lambda_{n+1} - \mu_{n+1},$$

et

$$R(x) = \frac{\alpha\, \mu_{n+1}^2}{x^\alpha} \int_{-1}^{\rho} (\lambda_{n+1} + t\,\mu_{n+1})^{\alpha-1} g(t)\, dt$$

lorsque $x = \lambda_{n+1} + \rho\,\mu_{n+1}$, $|\rho| \leqslant 1$.

Il en résulte que

$$\frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} u(t)\, dt \to 0, \quad x \to \infty,$$

respectivement

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} u(t)\, dt = \frac{\alpha\, 2^\alpha}{2^\alpha - 1},$$

suivant que

$$\mu_n = \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} = \delta_n\, 2^{n/2},$$

respectivement

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = 2^{n/2}.$$

Par suite les fonctions $u(x)$ ainsi définies satisfont bien aux relations (3. 7).

Enfin, pour $x = \lambda_n$, on a

$$u(\lambda_n) = \mu_n = \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}, \quad \text{resp.} \quad = \sqrt{\lambda_n},$$

d'où il résulte que, d'une part,

$$\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$$

tend vers zéro, pour $x = \lambda_n$, aussi lentement que l'on veut, et que, d'autre part,

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{u(x)}{\sqrt{x}} = 1.$$

Il s'ensuit que les relations (3. 8) sont les plus précises possibles les conditions (3. 6) et (3. 7) étant supposées remplies.

RÉFÉRENCES

1. H y s l o p, J. M. — On the approach of a series to its Cesàro limit. *Proc. of the Edinbourgh Math. Soc.* **5**, (2), p. 182 - 201 (1938).
2. K a r a m a t a, J. — Eine weitere Umkehrung des Cesàroschen Limitierungs-verfahrens. *Bull. de l'Acad. serbe*, № **2**, p. 67—72 (1935).
3. P o p o v i ć, B. — Sur un théorème relatif aux valeurs asymptotiques de l'intégrale de Laplace-Abel. *Bull. de l' Acad. serbe*, № **7**, p. 5—11 (1941).
4. M e y e r - K ö n i g, W. — Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. *Dissertation.* Tübingen (1939). *Math. Zeit.* **45**, p. 447—478 (1939).

Beograd, Novembre 1939.