EINIGE SÄTZE ÜBER LAPLACESCHE INTEGRALE

von

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

1. Im Folgenden wird stets vorausgesetzt dass $A(u)$ von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und

$$L(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\,A(u)$$

konvergent für $R(t) > 0$ ist.

In der Note „Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman", (Math. Zeit. **53**,1 (1950), 53–58), habe ich, anschliessend an einen Satz des Herrn T. Carleman,[1]) bewiesen:

Wenn $L(t)$ der Bedingung

$$L(t) = O\left(e^{-\frac{1}{t}}\right), \quad t \to 0$$

und $A(u)$ der Bedingung

$$\sqrt{u}\,\{A(v) - A(u)\} > m \text{ für alle } u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

genügt, so ist

$$\sqrt{u}\,A(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

In der vorliegenden Note beweise ich einige Sätze die sich auf diejenigen $L(t)$ beziehen die der allgemeineren Bedingung

I) $$L(t) = O\left(e^{-t^{-\vartheta}}\right), \quad t \to 0$$

---

[1]) Die Abhandlung des Herrn T. Carleman (Proc. of the Scandinavian Math. Congress 1934) kenne ich nicht. Den Wortlaut des gedachten Carlemanschen Satzes entnahm ich einer Abhandlung des Herrn N. Wiener (The science reports of national Tsing-Hua University (A), III (1936), 291—298).

mit

$$0 < \vartheta \leqslant 1$$

genügen.

Satz 1. *Wenn $L(t)$ der Bedingung* I) *und $A(u)$ der Bedingung*

$$(K-O) \quad u^{\frac{1}{1+\vartheta}}\{A(v)-A(u)\} > -m \text{ für alle } u \leqslant v \leqslant u+u^{\frac{1}{1+\vartheta}}$$

genügt, so ist

$$u^{\frac{1}{1+\vartheta}} A(u) = O(1), \; u \to \infty.$$

Ausserdem gilt folgende Ergänzung des Satzes 1.

Satz 2. *Wird im Satz 1 die Bedingung $(K-O)$ durch die wesentlich mehr fordernde Bedingung*

$$(K-o) \quad \liminf_{u=\infty} u^{\frac{1}{1+\vartheta}}\{A(v)-A(u)\} = 0 \text{ für alle } u \leqslant v \leqslant u+u^{\frac{1}{1+\vartheta}}$$

ersetzt, so ist

$$u^{\frac{1}{1+\vartheta}} A(u) = o(1), \; u \to \infty.$$

Beide Sätze werden aus folgendem Satz A hergeleitet.

Satz A. *Wenn $L(t)$ der Bedingung* I) *genügt, so konvergiert*

$$L^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(u^{\frac{1}{1+\vartheta}}\right) du$$

für $R(s) > 0$ und die infolgedessen daselbst reguläre Funktion $L^*(s)$ ist noch im Punkte $s=0$ regulär.

Eine nichttriviale Abschätzung über $A(u)$ lässt sich auch dann erhalten wenn $A(u)$ keiner Konvergenzbedingung genügt. Es gilt nämlich folgender

Satz 3. *Wenn $L(t)$ der Bedingung* I) *genügt, so ist*

$$\limsup_{u=\infty} \frac{\lg |A(u)|}{u^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}} \leqslant 0.$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Tatsache dass auch

$$L^{**}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\, A\left(u^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right)$$

für $R(s) > 0$ konvergiert (und im Punkte $s = 0$ regulär ist, welche Eigenschaft zum Beweis des Satzes 3 nicht gebraucht wird). Der Beweis dieser Behauptung ist vollständig analog dem Beweise des Satzes A.

Satz 3 ermöglicht einen äusserst kurzen Zugang zu einigen Sätzen der Partitio numerorum.

2. Bevor ich zum Beweis des Satzes A übergehe leite ich die Sätze 1 und 2 aus dem Satz A ab.

Beweis der Sätze 1 und 2. Ich beweise zunächst: *Für jedes $v > u$ und genügend grosses u, ist*

$$A(v) - A(u) > \begin{cases} -m u^{-\frac{1}{2}} - m' \lg \dfrac{v}{u} & \textit{wenn } \vartheta = 1 \\ -m u^{-\frac{1}{1+\vartheta}} - m''\left(u^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}} - v^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}}\right) & \textit{wenn } 0 < \vartheta < 1 \end{cases} \tag{1}$$

falls nur m' und m'' passend gewählt werden.

Zu diesem Zwecke setze ich abkürzend $\alpha(t) = \exp\left[t^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right]$ und bezeichne mit $\beta(t)$ die zu $\alpha(t)$ inverse Funktion $(\lg t)^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}$. Ferner bestimme ich ein $\lambda > 1$ derart dass

$$\beta(\lambda\alpha(x)) \leqslant x + x^{\frac{1}{1+\vartheta}}$$

für genügend grosse x ist, was wegen

$$\beta(\lambda\alpha(x)) = x + \binom{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}{1} x^{\frac{1}{1+\vartheta}} \lg \lambda + O\left(x^{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}\right), \quad x \to \infty$$

offenbar möglich ist. Dann ist für jedes x der Strecke $(x, \beta(\lambda\alpha(x))$,

$$x^{\frac{1}{1+\vartheta}}\{A(x') - A(x)\} > -m. \tag{2}$$

Sei y irgendeine Zahl die $> x$ ist. Ich setze zur Abkürzung

$$x_{\nu+1} = \beta(\lambda\,\alpha(x_\nu)) = \beta(\lambda^\nu\,\alpha(x)) \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, n$$

und grenze die Zahl n derart ab dass $x_n \leqslant y \leqslant x_{n+1}$. Ferner setze ich in (2) zunächst x_ν statt x' und $x_{\nu-1}$ statt x, wobei $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ sein soll; und schliesslich y statt x' und x_n statt x. Werden die auf diese Weise gebildeten Ungleichungen addiert, so erhält man

$$A(y) - A(x) > -mx^{-\frac{1}{1+\vartheta}} - m \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ (\beta\,\lambda^\nu\,\alpha(x)) \right\}^{-\frac{1}{1+\vartheta}}.$$

Das zweite Glied rechter Hand lässt sich mittels

$$\int_0^n \left\{ \beta(\lambda^\tau\,\alpha(x)) \right\}^{-\frac{1}{1+\vartheta}} d\tau \tag{3}$$

majorieren welches Integral den Wert

$$\frac{1}{2\lg\lambda} \lg \frac{x_n}{x} \qquad \text{falls } \vartheta = 1$$

und den Wert

$$\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)\lg\lambda} \left(x^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}} - x_n^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}} \right) \qquad \text{falls } 0 < \vartheta < 1$$

hat, wie dies mittels der Substitution $\lambda^\tau\,\alpha(x) = \exp\left[\nu^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right]$ unmittelbar aus (3) folgt. Damit ist die aufgestellte Behauptung schon bewiesen da $x_n \leqslant y$ ist.

Aus (1) folgt: man kann die Zahlen m_1 und m_2 derart wählen dass

$$A(v) - A(u) > -m_1 u^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}} \text{ für } u \leqslant v \leqslant 2u \tag{4}$$

und falls noch

$$A(u) = O\left(u^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}}\right), \quad u \to \infty \tag{5}$$

vorausgesetzt wird, dass

$$v^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) - u^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(u^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) > -m_2 \quad \text{für } u \leqslant v \leqslant u+1 \tag{6}$$

ist wenn nur u genügend gross.

Die erste Behauptung ist in (1) unmittelbar enthalten da für $x > 1$, $x^{-\frac{1}{\vartheta+1}} < x^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}}$ ist, die zweite folgt aus (1) und der Identität

$$v^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) - u^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(u^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) = u^{\frac{1}{\vartheta}}\left\{A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) - A\left(u^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)\right\} +$$

$$+\left(v^{\frac{1}{\vartheta}} - u^{\frac{1}{\vartheta}}\right) A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)$$

indem man beachtet, dass gemäss (5) und der für $u \leqslant v \leqslant u+1$ giltigen Ungleichung $v^{\frac{1}{\vartheta}} - u^{\frac{1}{\vartheta}} = O\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)$, $\left(v^{\frac{1}{\vartheta}} - u^{\frac{1}{\vartheta}}\right) A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)$ für alle $u \leqslant v \leqslant u+1$ gleichmässig beschränkt bleibt.

Nun schliesse ich weiter: Aus I) (gebraucht wird nur $L(t) = O\left(t^{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}\right)$, $t \to 0$) und (4) folgt (5)[2]). *Folglich ist* (6) *richtig.*

Damit ist aber der Beweis des Satzes schon beendet. Denn aus (6) und dem regulären Verhalten von $L^*(s)$ im Punkte $s=0$ folgt $u^{\frac{1}{\vartheta}} A\left(u^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right) = O(1)$ wenn $u \to \infty$ wie dies die Herren A. E. Ingham[3]) und J. Karamata[4]) im Anschluss an die Arbeiten der Herren N. Wiener – S. Ikehara und H. Heilbron – E. Landau bewiesen haben.

---

[2]) Insofern mir bekannt, ist diese Behauptung bisher nicht ausgesprochen. Da aber der Beweis dieser Behauptung eine triviale Übertragung des bekannten Beweises im Falle $\vartheta = 1$ darstellt und überdies der entsprechende o — Inversionssatz bekannt ist (J. Karamata, Studia Mathematica, IV (1934) 4—7) so glaube ich diesen Beweis unterlassen zu können.

[3]) A. E. Ingham — Proc. London Math. Soc, 38 (1935), 458—480.

[4]) J. Karamata — Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, V. (1936), 28—38.

Satz 2 ergibt sich auf dieselbe Weise indem man beachtet dass aus $(K-O)$ und I) (gebraucht wird nur $L(t)=o\left(t^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta+1}}\right)$, $t\to 0$), die Ungleichung (5) folgt, woraus sich zusammen mit $(K-o)$,

$$\lim_{u=\infty}\inf\left\{v^{\frac{1}{\vartheta}}A\left(v^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)-u^{\frac{1}{\vartheta}}A\left(u^{\frac{1+\vartheta}{\vartheta}}\right)\right\}=0 \text{ für } u\leqslant v\leqslant u+1 \text{ ergibt.}$$

3. Der Beweis des Satses A stützt sich auf folgenden

Hilfssatz. *Sei*

$$k\geqslant 2$$

und für positive z,

$$\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} z^{-\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu/k)}\,d\nu,\ \varepsilon>0.$$

Dann ist $\chi(z)$ *eine ganze Funktion und genügt der Ungleichung*

$$\left|z^{\frac{k}{2(1-k)}}\exp\left[(k-1)\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]\chi(z)\right|<C(k).$$

Vorerst leite ich den Satz A ab.

Beweis des Satzes A. a) O. B. d. A sei $A(0)=0$. Dann ist, wenn

$$q(\alpha)=\int_0^{\alpha} e^{-tu}\,dA(u)$$

gesetzt wird,

$$e^{-tu}A(u)=e^{-tu}\int_0^{u} e^{t\alpha}\,dq(\alpha)$$

woraus für jedes $t>0$,

$$e^{-tu}A(u)=o(1),\ u\to\infty \tag{7}$$

folgt, da der Voraussetzung nach $\lim\limits_{\alpha=\infty} q(\alpha)$ vorhanden ist. Wegen

$$q(\alpha)=e^{-t\alpha}A(\zeta)+t\int_{\zeta}^{\alpha} e^{-tu\alpha}A(u)\,du$$

ist also

$$L(t) = \lim_{\alpha=\infty} q(\alpha) = t \int_0^\infty e^{-tu} A(u)\, du. \tag{8}$$

b) Abkürzend werde

$$\vartheta = \frac{1}{k-1}$$

gesetzt (also $k \geqslant 2$).

Wegen (7) ist $L(t) = O(1)$, $t \to \infty$ woraus zusammen mit I) und der Behauptung des Hilfssatzes die Ungleichung

$$\left| L(t^k)\, \chi\left(\frac{s}{t}\right) \right| < C \left(\frac{|s|}{t}\right)^{\frac{k}{2(k-1)}} \exp\left[(k-1)\left(\frac{|s|}{kt}\right)^{\frac{k}{k-1}} - \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]$$

für jedes komplexwertige s folgt.

Also ist

$$L^*(s) = \int_0^\infty L(t^k)\, \chi\left(\frac{s}{t}\right) \frac{dt}{t^{k+1}}$$

für

$$|s| < \frac{k}{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}}$$

vorhanden und folglich $L^*(s)$ daselbst regulär.

Wird $0 < s < k/(k-1)^{\frac{k-1}{k}}$ angenommen und im letzten Integral die rechte Seite von (8) eingesetzt so lässt sich, wie leicht nachzuprüfen ist, im resultierenden wiederholten Integral die Folge der Integration vertauschen. Auf diese Weise erhält man

$$L^*(s) = \int_0^\infty A(u) \frac{du}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} s^{-\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu/k)} d\nu \int_0^\infty e^{-t^k u} t^{\nu-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^\infty A(u) \frac{du}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \left(s u^{\frac{1}{k}}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu)\, d\nu$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-s u^{\frac{1}{k}}} A(u)\, du,$$

Daraus folgt: Die im Punkte $s=0$ reguläre Funktion $L^*(s)$ ist für $s>0$ als konvergentes Laplace-Integral darstellbar und stellt folglich die analytische Fortsetzung von $L^*(s)$ in der rechten Halbebene dar.

4. Beweis des Hilfssatzes. a) Auf Grund des Cauchyschen Satzes und der für jedes σ giltigen Ungleichung

$$|\Gamma(\sigma+it)| = O\left(|t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \quad t\to\infty \tag{9}$$

kann in $\chi(z)$ der Integrationsweg beliebig weit nach links verschoben werden wenn man nur jeweils die Residuen der dabei überschrittenen Pole von $\Gamma(v)$ in Abrechnung bringt. Auf diese Weise erhält man

$$\chi(z) = +\sum_{\nu=0}^{n}\left\{\text{Residuum von } z^{-v}\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v/k)} \text{ in } v=-\nu\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_n-i\infty}^{\varepsilon_n+i\infty} z^{-v}\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v/k)}\,dv$$

wobei $-n-1<\varepsilon_n<-n$ ist.

Da wegen (9) das letztgennante Integral zu Null strebt wenn $\varepsilon_n\to-\infty$ und $\Gamma(v)$ im Pole $v=-\nu$ das Residuum $(-1)^\nu/\Gamma(\nu+1)$ hat, so wird

$$\chi(z) = +\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu/k)} \tag{10}$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

b) Wegen

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -\frac{x}{\pi}\sin\pi x$$

erhält man aus (10)

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-z)^\nu\,\Gamma(\nu/k)}{\Gamma(\nu)}\sin\pi\nu/k.$$

Nun ist, wie leicht nachzuprüfen,

$$\int_0^\infty \exp\left[-u^k - ze^{\pm i\pi/k}u\right] du = -\frac{e^{\mp i\pi/k}}{zk}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-z)^\nu\,\Gamma(\nu/k)}{\Gamma(\nu)}e^{\pm i\pi/k}$$

und somit

$$\chi(z) = -\frac{z\,e^{-i\pi/k}}{2\pi i}\int_0^\infty \exp\left[-u^k - ze^{-i\pi/k}u\right] du$$

$$+\frac{z\,e^{+i\pi/k}}{2\pi i}\int_0^\infty \exp\left[-u^k - ze^{+i\pi/k}u\right] du =$$

$$= \frac{z}{2\pi i}\int_{K_{\pi/k}} \exp\left[\xi^k - z\xi\right] d\xi$$

wobei der Weg $K_{\pi/k}$ aus den von o in der Richtung π/k ausgehenden Strahl $C_{\pi/k}$ und den in o in der Richtung $-\pi/k$ einmündenen Strahl $C_{-\pi/k}$ zusammengesetzt ist.

Damit ist im Falle $k=2$ die Behauptung schon bewiesen. Denn es ist

$$\frac{z}{2\pi i}\int_{K_{\pi/k}} e^{\xi^2 - z\xi}\, d\xi = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2 - izv}\, dv = \frac{z}{2\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2}.$$

Nun sei $k > 2$. Unter Benutzung von (9) wende ich den Cauchyschen Satz noch einmal an und verschiebe den Weg $K_{\pi/k}$ parallel zu sich selbst um eins nach rechts. Das über den zu $C_{\pi/k}$ parallelen Strahl $C^*_{\pi/k}$ erstreckte Integral nenne ich $\chi_1(z)$ und das über den zu $C_{-\pi/k}$ parallelen Strahl $C^*_{-\pi/k}$ erstreckte $\chi_2(z)$.

Wird in $\chi_1(z)$, z zunächst als reell und positiv angenommen und

$$\xi = z^{\frac{1}{k-1}}\,\eta$$

gesetzt, so erhält man

$$\frac{2\pi i}{k}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{k}{1-k}}\exp\left[(k-1)\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]\chi_1(z)= \tag{11}$$

$$=\int\limits_{C^*_{\pi/k}}\exp\left[\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}}(v^k-kv+k-1)\right]dv.$$

Auf Grund des Cauchyschen Satzes lässt sich in (11) der Weg $C^*_{\pi/k}$ durch jeden anderen von 1 in der Richtung θ_0 ausgehenden Strahl $C^*_{\theta_0}$ ersetzen wenn nur

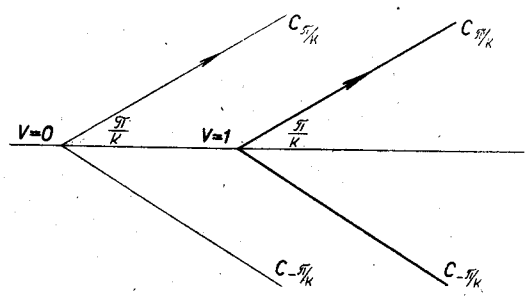

Fig. 1

$$\frac{\pi}{2}<k\theta_0<\frac{3\pi}{2}$$

ist.

Ich setze noch abkürzend

$$x=\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

und

$$\varphi_{\theta_0}(x)=\int\limits_{C^*_{\theta_0}}\exp\left[x(v^k-kv+k-1)\right]dv.$$

$\varphi_{\theta_0}(x)$ konvergiert für alle diejenigen x deren Argument

$$\arg x=\omega$$

der Ungleichung

$$\frac{\pi}{2}<\omega+k\theta_0<\frac{3\pi}{2} \tag{12}$$

genügt und stellt demnach die analytische Fortsetzung von (11) für alle mittels (10) definierte x. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussweise gelangt man zu dem Ergebnis dass $\varphi_{\theta_0}(x)$, die analytische Fortsetzung der ursprünglich nur für reelle und positive x bzw. z erklärten Funktion $\varphi_{\theta_0}(x)$ bzw. (11) auch dann darstellt wenn zwischen θ_0 und ω die Ungleichung (12) besteht.

Auf dieselbe Weise sieht man dass das über den Weg $C^*_{-\pi/k}$ erstreckte Integral in der ganzen komplexen Ebene analytisch fortsetzbar ist und durch das über $C^*_{-\theta_0}$ genommene Integral darstellbar ist wenn nur

$$-\frac{3\pi}{2} < \omega - k\theta_0 < -\frac{\pi}{2}.$$

Dieses Integral bezeichne ich mit $\varphi_{-\theta_0}(x)$.

Ich habe zu zeigen dass $\varphi_{\theta_0}(x)$ und $\varphi_{-\theta_0}(x)$ für jedes $|z|$ und alle ω dem Betrage nach kleiner als $C/\sqrt{|x|}$ bleiben. Wird unter Beachtung der Ungleichung (12) ω um 2π vermehrt, so geht θ_0 in θ_0' über und man erhält

$$-\frac{3\pi}{2} < \omega + k\theta'_0 < -\frac{\pi}{2}$$

d. h.

$$\varphi_{\theta_0'}(\omega + 2\pi) = \varphi_{-(-\theta_0')}(\omega).$$

Demnach braucht man nur die eine der Ungleichungen zu beweisen, etwa diejenige für $\varphi_{\theta_0}(\omega)$ und zwar für alle ω einer Strecke der Länge 2π.

Sei $\delta > 0$ und es bezeichne D den mittels

$$\frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta \leqslant \omega \leqslant 2\pi - \left(\frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta\right) = \frac{3k-2}{2k-4}\pi - \delta \qquad (13)$$

erklärten Winkelraum. $\overline{D}$ bezeichne den zu D komplementären Winkelraum

$$\frac{3k-2}{2k-4}\pi - \delta < \omega < 2\pi + \frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta,$$

Ich beweise: *Die Ungleichung*

$$|\sqrt{x}\,\varphi_{\theta_0}(x)| < C(k) \tag{14}$$

gilt für

c) *jedes* x *aus* D

und

d) *jedes* x *der Begrenzung von* $\overline{D}$

wenn nur δ *genügend klein gewählt wird.*

e) *Innerhalb* $\overline{D}$ *gilt für jedes* $\varepsilon > 0$,

$$|\sqrt{x}\,\varphi_{\theta_0}(x)| = O(\exp[\varepsilon|x|^{\frac{\pi}{2\alpha}}]),\ |x| \to \infty$$

wobei 2α *die Winkelöffnung von* $\overline{D}$ *ist.*

Aus c) d) und e) folgt auf Grund des bekannten E. Phragmén – E. Lindelöfschen[5]) Satzes die Behauptung des Hilfssatzes.

Es werde

$$v = 1 + \rho e^{i\theta_0} = r e^{i\theta},$$

$$\zeta = x(v^k - kv + k - 1)$$

und

$$\delta = \frac{2k+4}{2k-4}\varepsilon$$

gesetzt.

c) 1. Zunächst sei

$$\frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$$

also

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{3\pi}{2k} - \frac{\omega}{k} + \frac{\varepsilon}{k}.$$

Dann werde θ_0 mittels der Ungleichung

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{k} - \frac{\omega}{k} - \frac{\varepsilon}{k} \tag{15}$$

---

[5]) E. Phragmén — E. Lindelöf, Acta Math., 31 (1908), 381—406.

festgesetzt. Wegen $0 \leqslant \theta < \theta_0$ ist $2\theta_0 \leqslant 2\theta_0 + (k-2)\theta < k\theta_0$ und somit wegen (15),

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + 2\theta_0 + (k-2)\theta < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon. \tag{16}$$

Nun ist

$$R\left\{\frac{d^2\zeta}{d\rho^2}\right\} = R\left\{\frac{d}{dv}\left(\frac{d\zeta}{dv}\frac{dv}{d\rho}\right)\frac{dv}{d\rho}\right\}$$

$$= k(k-1)\,|x|\,r^{k-2}\cos(\omega + 2\theta_0 + (k-2)\theta),$$

also wegen (16), $R\left\{\frac{d^2\zeta}{d\rho^2}\right\} < 0$ wenn $\rho > 0$. Da $R\{\zeta\} = 0$ wenn $\rho = 0$, so ist für alle $\rho > 0$,

$$R\{\zeta\} < 0.$$

2. Nun sei

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2}.$$

Wenn

$$\frac{\pi}{2} < \omega \leqslant \pi$$

so werde θ_0 mittels

$$\frac{\varepsilon}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2k} - \frac{\varepsilon}{k}$$

und wenn

$$\pi \leqslant \omega < \frac{3\pi}{2}$$

mittels

$$-\frac{\pi}{2k} + \frac{\varepsilon}{k} < \theta_0 < -\frac{\varepsilon}{2}$$

festgezetzt. In beiden Fällen ist, wie leicht nachzuprüfen,

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + 2\theta_0 + (k-2)\theta < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

woraus wie vorhin $R\{\zeta\} < 0$ wenn $\rho > 0$ und $= 0$ wenn $\rho = 0$ folgt,

3. Schliesslich sei

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{3k-2}{2k-4}\pi - \delta$$

also

$$\frac{\pi}{2k} - \frac{\omega}{k} + \frac{\varepsilon}{k} < \frac{3\pi}{4} - \frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant 0.$$

Dann werde θ_0 mittels der Ungleichung

$$\frac{\pi}{2k} - \frac{\omega}{k} + \frac{\varepsilon}{k} < \theta_0 < \frac{3\pi}{4} - \frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

festgesetzt. Wegen $\theta_0 < \theta \leqslant 0$ ist $k\theta_0 < 2\theta_0 + (k-2)\theta \leqslant 2\theta_0$ und somit wegen (17),

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + 2\theta_0 + (k-2)\theta < \frac{3\pi}{3} - \varepsilon$$

woraus wie ad 1., $R\{\zeta\} < 0$ wenn $\rho > 0$ und $= 0$ wenn $\rho = 0$, folgt.

Da, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, für jedes ω aus D sowohl

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + 2\theta_0 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

als auch

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + k\theta_0 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

ist, so folgt

$$\lim_{\rho=0} \frac{R\{\zeta\}}{\rho^2} = \frac{k(k-1)}{2}|x|\cos(\omega + 2\theta_0)$$

$$< -\frac{k(k-1)}{2}|x|\sin\varepsilon$$

und

$$\lim_{\rho=\infty} \frac{R\{\zeta\}}{\rho^k} = |x|\cos(\omega + k\theta_0)$$

$$< -|x|\sin\varepsilon.$$

Aus diesen zwei Ungleichungen ergibt sich, dass für alle x aus D ein von x unabhängiges $A = A(k) > 0$ vorhanden ist derart dass längst $C^*_{\theta_0}$

$$R\{\zeta\} < -A|x|\rho^2$$

ist.

Für alle x aus D ist somit

$$|\sqrt{x}\,\varphi_{\theta_0}(x)| < \sqrt{|x|}\int_0^\infty e^{-A|x|\rho^2}\,d\rho = C(k).$$

Wenn $2 < k < 6$ so ist damit die Behauptung des Hilfssatzes schon bewiesen. Denn in diesem Falle kann man $\delta = \delta(k)$ derart einschränken, dass die Winkelöffnung von D grösser als 2π ist.

d) Sei $k \geqslant 6$. Die Begrenzung des Winkelraumes $\overline{D}$ besteht aus den zwei Strahlen in den Richtungen

$$2\pi - \frac{k-6}{2k-4}\pi - \delta \text{ und } 2\pi + \frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta.$$

Längst des ersten Strahles (der die gemeinsame Begrenzung von D und $\overline{D}$ bildet) ist gemäss c) die Ungleichung (14) erfüllt.

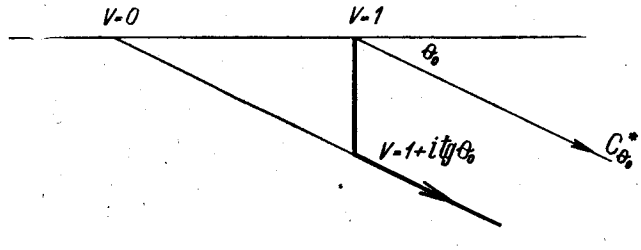

Fig. 2

Um dieselbe Abschätzung längst des zweiten Strahles d. h. für $\omega = 2\pi + \frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta$ zu erhalten, ersetze ich, auf Grund des Cauchyschen Satzes, den Weg $C^*_{\theta_0}$ durch den aus der Strecke von $v = 1$ bis $v = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ und den von $v = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ in der Richtung θ_0 ausgehenden Strahl zusammengesetzten Weg (vergleiche Fig. 2).

Wird θ_0 mittels der Ungleichung

$$-\frac{3\pi}{2k}-\frac{k-6}{2k-4}\frac{\pi}{k}-\frac{\delta}{k}<\theta_0<-\frac{\pi}{k}-\frac{k-6}{2k-4}\pi-\frac{\delta}{k}$$

festgesetzt und $\varepsilon>0$ genügend klein gewählt, so wird für alle $\theta_0\leqslant\theta\leqslant 0$,

$$\frac{3\pi}{2}+\varepsilon<\omega+(k-2)\theta<\frac{5\pi}{2}-\varepsilon \tag{18}$$

und zugleich

$$\frac{\pi}{2}<\omega+k<\frac{3\pi}{2}. \tag{19}$$

Auf dem ersten Teil des Weges setze ich

$$\nu=1+\rho\, e^{-i\frac{\pi}{2}}=re^{\theta}.$$

Dann ist

$$R\left\{\frac{d^2\xi}{d\rho^2}\right\}=-k(k-1)\,|x|\,r^{k-2}\cos(\omega+(k-2)\theta)$$

woraus wegen (18), $R\left\{\frac{d^2\xi}{d\rho^2}\right\}<0$ folgt.

Auf dem zweiten Teil des Weges ist, wenn $\nu=\rho\, e^{i\theta_0}$ gesetzt wird,

$$R\left\{\frac{d^2\xi}{d\rho^2}\right\}=k(k-1)\,|x|\,r^{k-2}\cos(\omega+k\theta_0)$$

woraus wegen (19), $R\left\{\frac{d^2\xi}{d\rho^2}\right\}<0$ folgt.

Daraus folgt auf dieselbe Weise wie in c) dass die Ungleichung (14) für alle x längst des Strahles in der Richtung $2\pi+\frac{k-6}{2k-4}\pi+\delta$ besteht.

e) Sei wieder $k\geqslant 6$ und x gehöre zu $\overline{D}$. Auf Grund des Cauchyschen Satzes kann man $C^*_{\theta_0}$ durch den aus der Strecke von 1 bis 0 und den Strahl C_{θ_0} zusammengesetzten Weg

ersetzen. Offenbar ist

$$\left|\int_0^1 e^{\zeta}\, dv\right| < e^{(k-1)|x|}.$$

Abkürzend werde $\omega = 2\pi + \omega'$ gesetzt. Wenn

$$-\frac{k-6}{2k-4}\pi - \delta < \omega' \leqslant 0$$

so werde θ_0 mittels

$$-\frac{3\pi}{2k} + \frac{k-6}{2k-4}\frac{\pi}{k} + \frac{\varepsilon+\delta}{k} < \theta_0 < \frac{\pi}{2k} - \frac{\varepsilon}{k}$$

eingeschränkt und wenn

$$0 < \omega' \leqslant \frac{k-6}{2k-4}\pi + \delta$$

mittels

$$-\frac{3\pi}{2k} + \frac{\varepsilon}{k} < \theta_0 < -\frac{\pi}{2k} - \frac{k-6}{2k-4}\frac{\pi}{k} - \frac{\varepsilon+\delta}{k}.$$

In beiden Fällen ist, wie leicht nachzuprüfen,

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \omega + k\theta_0 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

und zugleich

$$\frac{3\pi}{2} < \omega + \theta_0 < \frac{5\pi}{2}.$$

Für $v = re^{i\theta_0}$, d. h. längst C_{θ_0} ist also

$$R\{\zeta\} = |x|\,(r^k \cos(\omega + k\theta_0) - kr\cos(\omega+\theta_0) + (k-1)\cos\omega)$$
$$\leqslant -|x|\,r^k \sin\varepsilon + |x|\,(k-1)$$

und somit

$$\left|\int_{C_{\theta_0}} e^{\zeta}\, dv\right| < e^{(k-1)|x|}\int_0^\infty e^{-|x|\,r^k \sin\varepsilon}\, dr < \frac{C(k)}{|x|^{\frac{1}{k}}}\, e^{(k-1)|x|}.$$

Für alle x aus $\overline{D}$ ist also

$$|\varphi_{\theta_0}(x)| \leqslant \left|\int_0^1\right| + \left|\int_{C_{\theta_0}}\right| < C(k)\, e^{(k-1)|x|} \max\left\{1, \frac{1}{|x|^{\frac{1}{k}}}\right\}. \tag{20}$$

Die Winkelöffnung 2α von $\overline{D}$ beträgt $\frac{k-6}{2k-2}\pi + 2\delta$. Für genügend kleines δ ist also $\frac{\pi}{2\alpha} > 1$. Wegen (20) ist also für alle x aus $\overline{D}$ und jedes $\varepsilon > 0$,

$$|\sqrt{x}\,\varphi_{\theta_0}(x)| = O\left(\exp\left[\varepsilon |x|^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right]\right), \; |x| \to \infty.$$

Mitgeteilt den 3-VIII-1950.