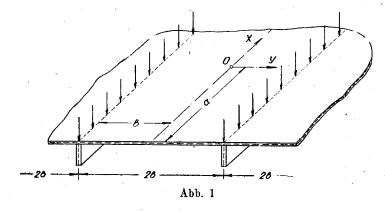
BEULUNG DER GURTPLATTEN VON RIPPENKONSTRUKTIONEN

Von V. BOGUNOVIĆ

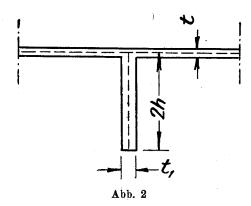
Es wird ein Plattenbalken untersucht, welcher einem System parallel liegender, gleichartiger und gleichartig belasteter Balken



angehört (Abb. 1). Der Plattenbalken ist frei aufliegend, die Stützweite beträgt 2a. Die übrigen Bezeichnungen sind aus der Abb. 2 ersichtlich. Wir setzen voraus, dass die gleichmässige Belastung qt_1 in der Rippenebene wirkt.

Bei relativ dünnen Gurtplatten besteht die Gefahr einer Ausbeulung der Gurtplatte. Wir nehmen an, dass die Belastung q langsam von Null an anwächst und suchen den kritischen Wert q_{cr} , bei welchem die biegungsfreie Gleichgewichtslage der Platte unstabil wird und neben dieser Lage noch eine unendlich

kleine Beulung entstehen kann. Die Gurtplatte würde somit unter dieser kritischen Last ihre Stabilitätsgrenze erreichen.



Bevor man diese Stabilitätsaufgabe angreift, muss zuerst der Spannungszustand des Plattenbalkens untersucht werden.

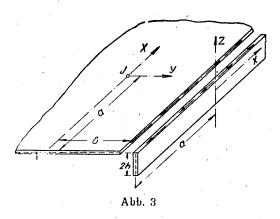
I. Spannugszustand des Plattenbalkens

Wir nehmen an, dass es sich (Abb. 2) um ein dünnes Blech von unbedeutend kleiner Biegesteifigkeit handelt, so dass der Spannungszustand als eben betrachtet werden kann. Die Stärke t_1 der Rippe sei auch klein im Vergleich mit ihren übrigen Abmessungen, so dass der Spannungszustand in ihr auch als eben aufgefasst werden darf.

Die Belastung greift direkt die Rippe an, die mit den beiden Gurtscheiben längs einer (in Gurtmittelebene liegenden) Linie verbunden ist. Auf diese Weise zwingt die Rippe den beiden Gurtscheiben längs der Verbindungslinie ihre Dehnung auf und veranlasst sie zum Mittragen. Dadurch werden von der Rippe auf die Gurtscheiben Schubkräfte $^{1}/_{2}t_{1}r$ übertragen, die nach einem vorläufig noch unbekannten Gesetze verteilt sind. Die Gurtscheiben üben die gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Schubkräfte längs der Kontaktlinien auf die Rippe aus. Durch die Schubkäfte $^{1}/_{2}rt_{1}$ entsteht in der Gurtplatte ein ebener Spannungszustand.

Die Spannugsfunktionen Φ_1 für die Rippe und Φ_2 für die Gurtplatte sind biharmonische Funktionen, die an den Quer-

rändern $x = \pm a$, Randbedingungen für frei gestützte Scheiben erfüllen müssen.



Die Spannungsfunktion der Rippenscheibe die nur mit den längs der Kontaktlinien wirkenden Schubkräften rt_1 belastet ist, hat folgende Randbedingungen zu erfüllen.

Längs des unteren Randes z = -h müssen die Normalund Schubspannungen verschwinden, d. h.

$$\partial^2 \Phi_1/\partial x^2 = 0$$
 und $\partial^2 \Phi_1/\partial x \partial z = 0$;

längs des oberen Randes verschwinden die Normalspannungen auch, die Schubspannungen sind jedoch gleich r, d. h.

$$\partial^2 \Phi_1 / \partial x^2 = 0$$
 und $\partial^2 \Phi_1 / \partial x \partial z = r$.

Für die Gurtscheibe gelten folgende Randbedingungen: mit Rücksicht auf die Symmetrie der Verzerrung muss die quer zur Balkenachse gerichtete Verschiebungskomponente v längs der Geraden y=0 und y=b verschwinden. Längs der Geraden y=0 verschwinden auch die Schubspannungen, längs der Geraden y=b müssen sie gleich $-rt_1/2t$ sein.

Diese vier Bedingungen für jede Scheibe würden die Spannungsfunktionen bestimmen, falls die Schubkräfte rt_1 schon bekannt wären. Die letzten bestimmt man aus der bedingten Übereinstimmung der Gurtdehnung $(e_x)_{y=b}$ mit der Dehnung der Rippe an derselben Stelle.

Die Spannungsfunktion für die Rippe die die Bedingungen an den Scheibenrändern x = a und x = -a erfüllt, lautet

$$\Phi_{1} = \sum_{i=1,3,5,...}^{\infty} f_{i}(z) \cos i\pi x/2a, \qquad (1)$$

wo

$$f_i = \left(A_{1i} + B_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi z}{2a} + \left(C_{1i} + D_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi z}{2a}$$

und dementsprechend

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial z^{2}} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left[\left(2B_{1i} + C_{1i} + D_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi z}{2a} + \right.$$

$$+ \left(A_{1i} + 2D_{1i} + B_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi z}{2a} \right] \cos \frac{i\pi x}{2a} ,$$

$$\sigma_{2} = \frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial x^{2}} = -\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left[\left(A_{1i} + B_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi z}{2a} + \right.$$

$$+ \left(C_{1i} + D_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi z}{2a} \right] \cos \frac{i\pi x}{2a} ,$$

$$\tau = -\frac{\partial^{2}\Phi_{1}}{\partial x \partial z} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left[\left(A_{1i} + D_{1i} + B_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi z}{2a} + \right.$$

$$+ \left(B_{1i} + C_{1i} + D_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi z}{2a} \right] \sin \frac{i\pi x}{2a} .$$

$$\left. + \left(B_{1i} + C_{1i} + D_{1i} \frac{i\pi z}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi z}{2a} \right] \sin \frac{i\pi x}{2a} .$$

Die Konstanten A_{1i} , B_{1i} , C_{1i} und D_{1i} ergeben sich aus den Bedingungen an dem oberen und unteren Rande der Rippe, d. h.

$$f_i(-h) = 0$$
, $f_i'(-h) = 0$, $f_i(h) = 0$, $\frac{\pi}{2a} \sum_{i=1,3,5,...}^{\infty} f_i'(h) \sin \frac{i\pi x}{2a} = r$.

Die Spannungsfunktion Φ_1 stellt den Spannungszustand einer

Scheibe dar, die am oberen Rand durch Schubkräfte

$$r = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \lambda_i \sin \frac{i\pi x}{2a}$$

beansprucht wird, wo die Konstanten λ_i noch vorläufig unbestimmt bleiben und

$$A_{1i} = -\frac{1}{2} \lambda_{i} h^{2} \frac{\sinh u_{1i}}{u_{1i} (u_{1i} + \frac{1}{2} \sinh 2u_{1i})},$$

$$B_{1i} = -\frac{1}{2} \lambda_{i} h^{2} \frac{\sinh u_{1i}}{u_{1i}^{2} (u_{1i} - \frac{1}{2} \sinh 2u_{1i})},$$

$$C_{1i} = \frac{1}{2} \lambda_{i} h^{2} \frac{\cosh u_{1i}}{u_{1i} (u_{1i} - \frac{1}{2} \sinh 2u_{1i})},$$

$$D_{1i} = \frac{1}{2} \lambda_{i} h^{2} \frac{\cosh u_{1i}}{u_{1i}^{2} (u_{1i} + \frac{1}{2} \sinh 2u_{1i})},$$
(3)

wo $u_{1i} = i\pi h/2a$ bedeutet.

Ausser den Schubkräften rt_1 wirkt auf die Rippe noch die gleichmässig verteilte Belastung q. Wenn man Werte der Grössenordnung h^2/a^2 vernachlässigt, hat man für die Normalspannungen die bekannten Ausdrücke

$$\sigma_x = -\frac{3}{4} \frac{a^2 z}{h^3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) q, \qquad \sigma_z = 0,$$
 (4)

oder in Form trigonometrischer Reihe

$$\sigma_{x} = -\frac{24}{\pi^{8}} \frac{a^{2}y}{h^{3}} q \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{i_{j_{2}}(i-1)}}{i^{3}} \cos \frac{i\pi x}{2a}$$
 (5)

Mit Hilfe von Gl. (2) u (5) kann die Dehnung der Rippenfasern im Punkte des oberen Randes berechnet werden, wobei E die übliche Bezeichnung für den Elastizitätsmodul ist.

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{24}{\pi^3} \frac{a^2}{h^2} q \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)}{i^3} \cos \frac{i\pi x}{2a} + \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \lambda_i \frac{2 u_{1i} - \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 4 u_{1i}}{u_{1i}^2 - \frac{1}{4} \operatorname{Sh}^2 2 u_{1i}} \cos \frac{i\pi x}{2a} \right] \cdot$$
(6)

· Der Spannungszustand der Gurtplatte wird durch die Funktion

$$\Phi_2 = \sum_{i}^{\infty} \varphi_i(y) \cos i\pi x/2a,$$

gegeben, wo

$$\varphi_{i}(y) = \left(A_{2i} + B_{2i} \frac{i\pi y}{2a}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + \left(C_{2i} + D_{2i} \frac{i\pi y}{2a}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a},$$

und A_{2i} , B_{2i} , C_{2i} , D_{2i} , i = 1, 3, 5... die Integrationskonstanten sind. Infolge der Symmetrie der Belastung hat man

$$B_{2i} = C_{2i} = 0.$$

Dann werden die Konstanten A_{2i} , D_{2i} aus den Bedingungen am Rand y = b durch die Beziehungen

$$A_{2i} = \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{i\pi} \right)^{2} \frac{\lambda_{i}}{\sinh^{2} u_{2i}} \frac{t_{1}}{t} \left[(1 + \mu) u_{2i} \cosh u_{2i} - (1 - \mu) \sinh u_{2i} \right],$$

$$D_{2i} = -\frac{1}{4} (1 + \mu) \left(\frac{2a}{i\pi} \right)^{2} \frac{\lambda_{i}}{\sinh u_{2i}} \frac{t_{1}}{t}$$
(7)

bestimmt, wobei $u_{2i}=i\pi b/2a$ und μ den Poissonschen Koeffizienten bezeichnet. Aus der Spannungsfunktion Φ_2 erhält man die Spannungskomponenten

$$\sigma_{x} = \frac{\partial^{2}\Phi_{2}}{\partial x^{2}} = \sum_{i} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left[\left(2D_{2i} + A_{2i}\right) \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + D_{2i} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a}\right] \operatorname{Cos} \frac{i\pi x}{2a},$$

$$\sigma_{y} = \frac{\partial^{2}\Phi_{2}}{\partial x^{2}} = -\sum_{i} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left(A_{2i} \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + D_{2i} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a}\right) \operatorname{cos} \frac{i\pi x}{2a},$$

$$\tau = -\frac{\partial^{2}\Phi_{2}}{\partial x \partial y} = \sum_{i} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^{2} \left[D_{2i} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + \left(A_{2i} + D_{2i}\right) \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a}\right] \operatorname{sin} \frac{i\pi x}{2a}.$$

$$(8)$$

Die Dehnung längs der Linie y = b beträgt

$$\frac{1}{4E} \frac{t_1}{t} \sum_{i} \lambda_i \frac{(1+\mu)^2 u_{2i} - (1+\mu)(3-\mu) \operatorname{Sh} u_{2i} \operatorname{Ch} u_{2i}}{\operatorname{Sh}^2 u_{2i}} \cos \frac{i\pi x}{2a}.$$
 (9)

Die Bedingung, dass die Rippe und die Platte längs der Linie y = b gleiche Dehnungen haben, ergibt, wenn man die Gl. (6) u. (9) in Betracht zieht, folgende Beziehung

$$\lambda_{i} \left[\frac{(1+\mu)^{2} u_{2i} - \frac{1}{2} (1+\mu) (3-\mu) \operatorname{Sh} 2 u_{2i}}{2 \operatorname{Sh}^{2} u_{2i}} \frac{t_{1}}{t} - \frac{2 u_{1i} - \frac{1}{2} \operatorname{Sh} 4 u_{1i}}{u_{1i}^{2} - \frac{1}{4} \operatorname{Sh}^{2} 2 u_{1i}} \right] = -\frac{48}{\pi^{3}} \frac{(-1)}{i^{3}} \frac{i-1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^{2} q,$$
(10)

aus der sich λ_i und die Konstanten $A_{1i}, B_{1i}, \ldots, A_{2i}, D_{2i}$ bestimmen lassen, die alle gestellten Bedingungen erfüllen.

Diese Werte sind für zwei Fälle mit $\mu=0,3$ in der Tab. I zusammengefasst:

Fall A:
$$a/b = 1$$
, $h/a = 1/10$, $t/t_1 = 1$.
Fall B: $a/b = 1$, $h/a = 1/10$, $t/t_1 = 1/2$.

Tab. 1

i	Fall A		
	λ_i	A_{2i}	D_{2i}
1	+5,68 q	$+0,940 (2a/\pi)^2 q$	$-0.801(2a/\pi)^2 q$
3	0,532 q	$-0.1295 \cdot 10^{-1} (2a/3\pi)^2 q$	$+3,105 \cdot 10^{-3} (2a/3\pi)^2 q$.
5	+0,1606 q	$+0,296\cdot10^{-3}(2a/5\pi)^2q$	$-4.05 \cdot 10^{-5} (2a/5\pi)^2 q$
Fail B			
1	+5,36 q	$+1,776 (2a/\pi)^2 q$	$-1,512 (2a/\pi)^2 q$
3	-0,457 q	$-0.222 \cdot 10^{-1} (2a/3\pi)^2 q$	$+5,34\cdot10^{-3}(2a/3\pi)^2q$
5	+0,131 q	$+0,483\cdot10^{-3}(2a/5\pi)^2q$	$-6,61\cdot10^{-5}(2a/5\pi)^2 q$

II. Beulung der Gurtplatte

1. Allgemeines

Die Ausbiegung w(x, y) der Platte genügt bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{D}{t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (11)$$

Hier bedeutet D die Plattensteifigkeit $Et^3/12(1-\mu^2)$, wo t die Plattendicke bezeichnet. Die Spannungskomponenten σ_x , σ_y , τ sind durch Gl. (8) bestimmt.

Da die Platte an den Rändern frei aufliegt, setzen wir für die Ausbiegung

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$
 (12)

an, was offenbar die Grenzbedingungen erfüllt.

Setzt man den Ansatz (12) und die Ausdrücke (8) für die Spannungskomponenten in die Differentialgleichung (11) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{D}{t} a^{2} \sum_{m} \sum_{n} a_{mn} \left(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}}\right)^{2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{m\pi y}{2b} - \\
- \sum_{m} \sum_{n} \sum_{i} a_{mn} i^{2} \left\{ \left[\left(\frac{a_{2}}{b^{2}} n^{2} - m^{2}\right) A_{i} - 2m^{2} D_{i} \right] \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + \\
+ \left(\frac{a^{2}}{b^{2}} n^{2} - m^{2}\right) D_{i} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a} \right\} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} - \\
- 2 \frac{a}{b} \sum_{m} \sum_{n} \sum_{i} a_{mn} m n i^{2} \left[D_{i} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} + \\
+ (A_{i} + D_{i}) \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a} \right] \sin \frac{i\pi x}{2a} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} = 0.$$
(13)

Man multipliziert die linke Seite der Gleichung der Reihe nach mit $\cos p\pi x/2a \cdot \cos r\pi y/2b$ (p=1,3,5,...,r=1,3,5,...), inte-

griert über die ganze Plattenfläche und setzt die so erhaltenen Integrale gleich Null. Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha_{inr} = \frac{\pi}{2a} \int_{-b}^{+b} \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} \cos \frac{npy}{2b} \cos \frac{r\pi y}{2b} dy,$$

$$\beta_{inr} = \frac{\pi}{2a} \int_{-b}^{+b} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \cos \frac{r\pi y}{2b} dy,$$

$$\gamma_{inr} = \frac{\pi}{2a} \int_{-b}^{+b} \operatorname{Sh} \frac{i\pi y}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \cos \frac{r\pi y}{2b} dy,$$

$$\delta_{inr} = \frac{\pi}{2a} \int_{-b}^{+b} \frac{i\pi y}{2a} \operatorname{Ch} \frac{i\pi y}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \cos \frac{r\pi y}{2b} dy,$$

$$\varphi_{imp} = \frac{\pi}{2a} \int_{-a}^{+a} \cos \frac{i\pi x}{2a} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{p\pi x}{2a} dx,$$

$$\psi_{imp} = \frac{\pi}{2a} \int_{-a}^{+a} \sin \frac{i\pi x}{2a} \sin \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{p\pi x}{2a} dx,$$

und führt statt Ai, Di dimensionslose Koeffizienten

$$\overline{A}_i = \frac{1}{q} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2 A_i, \qquad \overline{D}_i = \frac{1}{q} \left(\frac{i\pi}{2a}\right)^2 D_i$$

ein, so erhält man

$$\frac{\dot{D}}{q_{cr}t} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{4} a^{2} \left(p^{2} + \frac{a^{2}}{b^{2}} r^{2}\right)^{2} a_{pr} - \sum_{m} \sum_{i} \sum_{m} \sum_{i} a_{mn} \left\{ \left[(k_{mn} \overline{A}_{i} - 2m^{2} \overline{D}_{i}) \alpha_{inr} + k_{mn} \overline{D}_{i} \beta_{inr} \right] \varphi_{imp} + 2 \frac{a}{b} mn \left[(\overline{A}_{i} + \overline{D}_{i}) \gamma_{inr} + \overline{D}_{i} \delta_{inr} \right] \psi_{imp} \right\} = 0,$$
(14)

mit $k_{mn} = a^2 n^2/b^2 - m^2$.

Das auf diese Weise erhaltene, lineare und homogene, Gleichungssystem hat nur dann eine Lösung für die Koeffizienten a_{mn} der eine ausgebogene Gleichgewichtslage entspricht, wenn die Eliminante des Systems verschwindet. Auf diese Weise erhält man die Beulbedingung, aus der die kritischen Werte der Belastung berechnet werden können.

Die grösste Wurzel $1/q_{cr}$ dieser Beulbedingung entspricht dem kleinsten Wert der kritischen Belastung q_{cr} .

III. Beispiel: Berechnung der kritischen Belastung

Es wird die kritische Belastung q_{cr} für die Rippenkonstruktion mit a/b = 1, h/a = 1/10, $t/t_1 = 1$ gesucht,

Statt des allgemeinen Ausdrückes (12) für die Beulfläche nehmen wir den einfacheren Ansatz

$$w = \cos \frac{\pi y}{2a} \sum_{m=1,3,5,...}^{\infty} a_{m1} \cos \frac{m\pi x}{2a}, \qquad (15)$$

was der Annahme entspricht, dass sich die Gurtplatte in der y-Richtung in eine Halbwelle ausbeult. Setzt man a = b, n = 1, r = 1 in die Gl. (14) ein, so erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\frac{D}{q_{cr} t} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{4} a^{2} (p^{2} + 1)^{2} a_{p_{1}} - \sum_{m} \sum_{i} a_{m_{1}} \left\{ \left[(k_{m_{1}} \overline{A}_{i} - 2m^{2} \overline{D}_{i}) \alpha_{i_{11}} + k_{m_{1}} \overline{D}_{i} \beta_{i_{11}} \right] \varphi_{imp} + \right. \\
+ 2m \left[(\overline{A}_{i} + \overline{D}_{i}) \gamma_{i_{11}} + \overline{D}_{i} \delta_{i_{11}} \right] \psi_{imp} \right\} = 0. \tag{16}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$L_{im} = (k_{m_1} \overline{A}_i - 2m^2 \overline{D}_i) \alpha_{i_{11}} + k_{m_1} \overline{D}_i \beta_{i_{11}},$$

$$N_{im} = 2m [(\overline{A}_i + \overline{D}_i) \gamma_{i_{11}} + \overline{D}_i \delta_{i_{11}}]$$

ein, so folgt

$$\frac{D}{q_{cr}t}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4a^2(p^2+1)^2a_{p1}-\sum_m\sum_i a_{m1}(L_{im}\varphi_{imp}+N_{im}\psi_{imp})=0.$$
 (17)

Aus diesen Gleichungen, die in den a_{m_1} homogen sind, erhält man nur dann von Null verschiedene Werte von a_{m_1} , wenn die Eliminante verschwindet. Diese Bedingung ergibt die Gleichung, aus der man die kritische Belastung q_{cr} nach der Methode der sukzessiven Approximation berechnen kann.

Vernachlässigt man alle Koeffizienten a_{m1} ausser a_{11} , so ergibt die erste der Gleichungen (16)

$$\frac{D}{q_{cr}t}\frac{\pi^{4}}{(2\dot{a})^{2}}-\left[\left(k_{11}\,\overline{A}_{1}-2\,\overline{D}_{1}\right)\alpha_{111}+k_{11}\,\overline{D}_{1}\,\beta_{111}\right]\phi_{111}-\\
-2\left[\left(\overline{A}_{1}+\overline{D}_{1}\right)\gamma_{111}+\overline{D}_{1}\,\delta_{111}\right]\psi_{111}=0,$$
(18)

wobei für die Spannungskomponenten ebenfalls nur das erste Glied der Reihe in Betracht gezogen wird. Setzt man die berechneten Werte für die Konstanten aus der Tab. 1 in Gl. (18) ein, so erhält man nach Durchführung der Integrationen den ersten Näherungswert

$$q_{cr}=3,50\frac{D}{i}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$$
.

Um die zweite Näherung zu erhalten, nimmt man zwei Gleichungen mit den Koeffizienten a_{11} und a_{31} und erhält

$$a_{11} \left[\frac{D}{q_{cr} t} \frac{\pi^4}{(2a)^2} - (L_{11} \varphi_{111} + N_{11} \psi_{111}) \right] - a_{31} (L_{13} \varphi_{131} + N_{13} \psi_{131}) = 0,$$

$$- a_{11} (L_{11} \varphi_{113} + N_{11} \psi_{113}) + a_{31} \left[25 \frac{D}{q_{cr} t} \frac{\pi^4}{(2a)^2} - (L_{13} \varphi_{133} + N_{13} \psi_{133}) \right] = 0.$$

$$(19)$$

Nullsetzung der Eliminante ergibt die zweite Annäherung für q_{cr} :

$$q_{cr} = 3.39 \frac{D}{t} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2,$$
 (20)

die nur um etwa 3,2 v. H. kleiner als die erste ist,

Nimmt man drei Gleichungen des Gleichungssystems, so erhält man

$$a_{11} \left[\frac{D}{q_{cr} t} \frac{\pi^{4}}{(2a)^{2}} - (L_{11} \varphi_{111} + N_{11} \psi_{111}) \right] -$$

$$- a_{31} \left(L_{13} \varphi_{131} + N_{13} \psi_{131} \right) - a_{51} \left(L_{15} \varphi_{151} + N_{15} \psi_{151} \right) = 0,$$

$$- a_{11} \left(L_{11} \varphi_{113} + N_{11} \psi_{113} \right) + a_{31} \left[25 \frac{D}{q_{cr} t} \frac{\pi^{4}}{(2a)^{2}} -$$

$$- \left(L_{13} \varphi_{133} + N_{13} \psi_{133} \right) \right] - a_{51} \left(L_{15} \varphi_{153} + N_{15} \psi_{153} \right) = 0,$$

$$- a_{11} \left(L_{11} \varphi_{115} + N_{11} \psi_{115} \right) - a_{31} \left(L_{13} \varphi_{135} + N_{13} \psi_{135} \right) +$$

$$+ a_{51} \left[169 \frac{D}{q_{cr} t} \frac{\pi^{4}}{(2a)^{2}} - \left(L_{15} \varphi_{155} + N_{15} \psi_{155} \right) \right] = 0.$$

$$(21)$$

Berechnet man die Eliminante dieses Gleichungssystems und sucht die grösste Wurzel $1/q_{cr}$ der Gleichung $\Delta=0$ auf, so ergibt sich

$$q_{cr} = 3.39 \frac{D}{t} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$$
, (22)

d. h. der gleiche Wert (in Grenzen der Genauigkeit unserer Rechnung) wie in der zweiten Annäherung.

Die gleiche Rechnung haben wir mit drei Gliedern der Reihe für die Spannungskomponenten durchgeführt. Der erhaltene Wert für die kritische Belastung unterscheidet sich vom oben angeführten um etwa 0,2 v. H. Aus obigen Lösungen lässt sich schliessen, dass man in Grenzen der praktischen Anwendung die zweite Annäherung als ausreichend für die kritische Belastung betrachten kann.

Mit $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ und $\mu = 0.3$ geht die Gl. (22) in

$$q_{cr} = 6440 \ (t/2a)^2 \ \text{in} \ t/\text{cm}^2$$
 (23)

über.

Auf ähnliche Weise haben wir für den Fall a/b=1, h/a=1/10, $t/t_1=1/2$ die kritische Belastung

$$q_{cr} = 1.79 \frac{D}{t} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \tag{24}$$

erhalten, die für Baustahl mit $E=2100 \text{ t/cm}^2$ und $\mu=0.3$

$$q_{cr} = 3400 (t/2a)^2 \text{ in } t/\text{cm}^2$$
 (25)

ergibt.*)

IV. "Mitwirkende Breite" mit Rücksicht auf die Beulung der Gurtplatte

Die Bemessung der Rippenkonstruktion erfolgt praktisch in der Annahme eines ideellen Plattenbalkens, der aus der vorhandenen Rippe und einem anschliessenden Plattenstreifen von der Breite b_0 , s. g. "mitwirkender Breite", besteht. Zur Bemessung des Plattenbalkens auf Grund der "zulässigen Spannung" ist in der Regel die Rippenrandspannung der Biegezugseite entscheidend. Wir bestimmen die mitwirkende Breite b_0 dieses "Ersatzbalkens" aus der Bedingung, dass die elementare Biegetheorie für die Randspannung der Rippe genau den gleichen Wert ergibt den man bei Zugrundelegung der strengeren Theorie erhält.

Aus Gl. (2) u. (4) erhält man mit Rücksicht auf Gl. (3) nach einigen Umformungen die Normalspannung σ_x des Rippenrandes.

$$(\sigma_{x})_{\substack{x=0\\z=-h}} = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^{2} q - \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \lambda_{i} \frac{2u_{1i} \operatorname{Ch} 2u_{1i} - \operatorname{Sh} 2u_{1i}}{u_{1i}^{2} - \frac{1}{4} \operatorname{Sh}^{2} 2u_{1i}}$$
(26)

Wenn man die Werte der Grössenordnung t/2h vernachlässigt und das Widerstandsmoment des Rippenquerschnittes mit W_0 bezeichnet, erhält man für das Widerstandsmoment W des Ersatzbalkens den Ausdruck

$$W = W_0 \frac{1 + 4 \frac{b_0}{2h} \frac{t}{t_1}}{1 + 2 \frac{b_0}{2h} \frac{t}{t_1}},$$
 (27)

oder

$$W = \kappa W_0, \tag{28}$$

^{*)} Der Kontrolle wegen, haben wir die kritische Belastung q_{cr} auch nach dem Ritzschen Verfahren berechnet; wie zu erwarten war, haben wir dasselbe Ergebnis erhalten.

wo der Beiwert k durch die Gleichung

$$\kappa = \frac{1 + 4\frac{b_0}{2h}\frac{t}{t_1}}{1 + 2\frac{b_0}{2h}\frac{t}{t_1}}$$
(29)

bestimmt ist.

Wir erhalten die Randspannung für den Ersatzbalken, mit Rücksicht auf Gl. (28), nach einfacher Umrechnung aus

$$\sigma_u = \frac{1}{\kappa} \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h} \right)^2 q. \tag{30}$$

Setzt man beide Spannungen einander gleich, so erhält man für die Hilfsgrösse κ mittels der Gleichungen (26) u. (30) nach einigen Umformungen

$$\kappa = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{q} \sum_{i} \lambda_i \frac{2u_{1i} Ch 2u_{1i} - Sh 2u_{1i}}{u_{1i}^2 - 1 \cdot 4 \cdot Sh^2 2u_{1i}}}$$
(31)

Für eine Konstruktion von gegebenen Abmessungen erhält man mittels der Gl. (30) u. (34) die Randspannung der Rippe und mittels Gl. (29) u. (31) die mittragende Breite. Auf diese Weise kann man auf Grund der elementaren Biegetheorie den genauen Wert der Randspannung der Rippe bestimmen.

Bezeichnet man die Randspannung der Rippe, die der kritichen Belastung q_{cr} entspricht, mit $\overline{\sigma}_{cr}$, so erhält man aus Gl. (30)

$$\overline{\sigma}_{cr} = \frac{1}{\kappa} \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 q_{cr}. \tag{32}$$

Die Stabilität der Gurtplatte kann formell auf dieselbe Weise in Betracht gezogen werden. Multipliziert man das Widerstandsmoment W mit dem Verhältnis σ_{cr} σ_F , wobei σ_F die übliche Bezeichnung für die Fliessgrenze ist, so erhält man

$$W_{red} = \frac{\overline{\sigma_{cr}}}{\sigma_E} W, \tag{33}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (28)

$$W_{red} = \tilde{\omega} W_0, \tag{34}$$

wenn man

$$\tilde{\omega} = \kappa \frac{\overline{\sigma_{cr}}}{\sigma_F} \tag{35}$$

setzt. Dabei bedeutet W_{red} das Widerstandsmoment eines idellen Querschnittes, der aus der vorhandenen Rippe und aus einem anschliessenden Plattenstreifen der Breite B besteht.

Mit Rücksicht auf Gl. (31) kann man den Beiwert durch den einfacheren Ausdruck

$$\tilde{\omega} = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{q_{cr}}{\sigma_F} \tag{36}$$

ersetzen. Ist der Koeffizient $\tilde{\omega}$ bekannt, so kann man die Spannung nach elementarer Biegetheorie ermitteln, ohne Rücksicht auf die Gefahr der Gurtbeulung. Die reduzierte Breite B bestimmt man mittels Gl. (27), wenn man W durch W_{red} und b_0 durch B ersetzt. Die mittels der Gleichung

$$\sigma_{\omega} = \frac{M_{max}}{W_{red}} = \frac{M_{max}}{\tilde{\omega} W_0} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 q \tag{37}$$

erhaltene Spannung σ_{ω} ist nicht die wirkliche, sondern nur eine idelle, die zum Vergleich mit der zulässigen Spannung σ_{zut} dient, unter Voraussetzung des gleichen Wertes für Beulsicherheit und Sicherheit gegen Fliessen, d. h. v=2,4/1,4=1,71.

V. Numerisches Beispiel

Es wird eine beiderseits frei ausliegende Rippenkonstruktion untersucht die eine Stützweite 2a=180 cm hat und gleichförmig mit $qt_1=4,02$ t/m belastet ist. Dicke der Gurtplatte t=0,6 cm, Rippenhöhe 2h=108 cm, Rippenbreite $t_1=1,2$ cm, Rippenabstand 2b=180 cm.

Mittels der Gl. (31) bestimmen wir den Beiwert $\kappa = 1,795$, mit drei Gliedern der Reihe.

Ohne Rücksicht auf die Gefahr der Plattenbeulung, würde man für die Randspannung aus Gl. (30) den zulässigen Höchstwert

 $\sigma_u=1,4$ t/cm² erhalten. Die Sicherheit gegen Fliessen würde dann $v=\sigma_F/\sigma_u=2,4/1,4=1,71$ betragen. Aus Gl. (29) ermittelt man $b_0/2h=3,9$, oder $b_0/2a=0,39$, d. h. die mittragende Breite beträgt b=70,2 cm.

Um den Stabilitätsnachweis auf dieselbe Weise wie den Spannungsnachweis durchzuführen rechnet man wie folgt. Aus Gl. (36) ermittelt man $\tilde{\omega}$ und mittels der Beziehung $\sigma_{\omega}=M/\omega\ W_0$ findet man $\sigma_{\tilde{\omega}}=2,13\ t/cm^2$. Diese Spannung ist grösser als die zulässige $\sigma_{zul}=1,4\ t/cm^2$. Die Beulsicherheit beträgt daher nur v=2,4/2,13=1,13, was kleiner als die vorausgesetzte Sicherheit 1,71 ist.