SUR L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE THOMAS-FERMI AUTOUR DU POINT $x=0$, $y=1$

Par

MIODRAG V. MIHAILOVIĆ

1. Dans ce qui suit on traitera le cas particulier suivant

$$y''=x^a y^b, \quad a>-2, \; b>0, \tag{1}$$

de l'équation différentielle

$$y''=f(x)\,y^b \tag{2}$$

qui contient comme particulier l'équation différentielle de Thomas-Fermi connue de la Physique atomique, à savoir

$$y''=\frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}}, \quad y(0)=1, \; \lim_{x\to\infty} y(x)=0. \tag{1'}$$

Ces équations ont déjà fait l'objet de maintes recherches. Ainsi, quant à l'existence de l'intégrale de ces équations, les résultats suivants ont été obtenus.

1°. *Scorca-Dragoni G.* a démontré [2] l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle

$$y''=x^a y^b$$

satisfaisant les conditions

$$y(0)=1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) \quad 0$$

pour $a>-1$ et $b>0$.

2°. *V. G. Avakumović* a généralisé le problème et démontré [3] que l'équation (2) pour $b>0$ n'a qu'une seule intégrale satisfaisant les conditions

$$y(0)=1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x)=0$$

lorsque $f(x)$ satisfait les conditions:

$$f(x)>0$$

et continue pour tout $x > 0$,

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\theta}}\right), \quad x \to 0$$

et

$$f(x) > \frac{c}{x^{1+\theta}}, \quad x \to \infty, \quad c > 0,$$

avec

$$\theta < 1.$$

Quant à la recherche de l'intégrale différentielle (1'), les résultats suivants ont été obtenus.

1°. *Fermi* s'est occupé ([1] et [4]) de l'intégration de cette équation en se servant du procédé numérique.

2°. Par la méthode numérique, mais à l'aide de la machine à intégrer, ont procédé *H. Buch* et *S. H. Caldwel* [4].

3°. *Carlo Miranda* en a également effectué l'intégration numérique et a calculé des tables avec les valeurs numériques de $y(x)$ pour $y'(0)$ donné.

4°. *Sommerfeld* a [6] trouvé une expression approchée de l'intégrale de l'équation differentielle (1') pour $x \to \infty$, sans, cependant, la valeur de l'écart.

5°. *V. G. Avakumović* s'est occupé de l'équation (2) et a donné un développement asymptotique des intégrales particulières qui tendent vers zéro lorsque $x \to \infty$.

Il restait à examiner le développement asymptotique de l'intégrale aux environs de point $x = 0$, $y = 1$. Dans cette note nous traitons ce développement asymptotique pour l'équation différentielle (1), lorsque $b > 0$, $-2 < a \neq -1$.

2. Pour faciliter l'énoncé du théorème nous commencerons par donner la signification des constantes dont nous nous servirons.

q étant un nombre entier positif, les constantes sont définies de la manière suivante:

a) $m_q = [q(a+2)]$;

b) $q_k = \left[q - \frac{k}{a+2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, m_q$;

c) la suite des nombres

$$A_{0,\nu} = A_{0,\nu}(a, b) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

(qui ne dépendent de la constante d'intégration C), et la suite des nombres

$$A_{k,\nu} = A_{k,\nu}(a, b, C) = A_{k,\nu}(C) \quad (k = 1, 2, \ldots, m_q;\ \nu = 1, 2, \ldots, q)$$

(qui dépendent de la constante d'intégration C) sont définis par les formules recurrentes suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(a+2)[\nu(a+2)-1]A_{k,\nu+1} = B_{k,\nu} \\
&B_{0,0} = 1,\ A_{1,0} = C,\ B_{k,\nu} = \\
&= \sum_{\lambda=1}^{q}\binom{b}{\lambda}\Bigg[\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m=\lambda}\frac{\lambda!}{k_0!\,k_1!\ldots k_m!}\Bigg\{\sum_{k_{01}+\cdots+k_{0n_0}=k_0}\ \sum_{k_{10}+k_{11}+\cdots+k_{1n_1}=k_1}\cdots \\
&\qquad 1\Big(\sum_{i=0}^{q_1}k_{1,i}\Big)+2\Big(\sum_{i=1}^{q_2}k_{2,i}\Big)+\cdots+m\Big(\sum_{i=1}^{q_m}k_{m,i}\Big)=k \\
&\qquad \sum_{i=1}^{q_0}ik_{0,i}+\sum_{i=1}^{q_1}ik_{1,i}+\cdots+\sum_{i=1}^{q_m}ik_{m,i}=\nu \\
&\cdots \sum_{+k_{m,1}+\cdots+k_{m,n_m}=k_m}\frac{k_0!}{k_{01}!\ldots k_{0n_0}!}\times\frac{k_1!}{k_{10}!\,k_{11}!\ldots k_{1n_1}!}\times\cdots\times \\
&\times\frac{k_m!}{k_{m1}!\cdots k_{mn_m}!}\times A_{0,1}^{k_{01}}\cdots A_{0,n_0}^{k_{0q_0}}\times\cdots\times \\
&\times A_{m,1}^{k_{m1}}\cdots A_{m,n_m}^{k_{mq_m}}\Bigg\}\Bigg], \quad (k = 1, \ldots m_q;\ \nu = 0, 1, \ldots q).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Théorème A. *Soient a un nombre rationnel (c'est-à-dire $a = \frac{\alpha}{\beta}$, α et β étant entiers)*

$$a > -1$$

et $y(x)$ une des intégrales particulières de l'équation différentielle (1) *passant par le point*

$$x = 0, \quad y = 1.$$

Alors il existe un nombre C (constante d'intégration) tel que pour tout n entier positif on a

$$y(x) = 1 + Cx + \sum_{i=1}^{n} a_\nu (x^{1/\beta})^i + O((x^{1/\beta})^{n+1}), \quad x \to 0$$

où

$$a_i = \sum_{\beta k+\nu(2\beta+\alpha)=i} A_{k,\nu}\,.$$

Pour $a = -\frac{1}{2}$, cas interessant du point de vue de la Physique atomique (l'équation différentielle (1')) on a

$$y(x) = 1 + Cx + \sum_{i=3}^{n} a_i x^{i/2} + O(x^{(n+1)/2}), \quad x \to 0, \tag{4}$$

où

$$a_i = \sum_{2k+3=i} A_{k,\nu}\,.$$

Pour $n = 9$, par exemple les coefficients seront:

$$a_3 = A_{0,1} = \frac{4}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = A_{1,1} = \frac{2}{5}C, \quad a_6 = A_{0,2} = \frac{1}{3}.$$

$$a_7 = \frac{3}{70}C^2, \quad a_8 = A_{1,2} = \frac{2}{15}C, \quad a_9 = A_{0,3} + A_{3,1} = \frac{1}{63}\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{8}C^3\right)$$

de sorte qu'on obtient

$$\begin{cases} y(x) = 1 + Cx + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}Cx^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{70}C^2x^{7/2} + \\ \qquad + \frac{2}{15}Cx^{8/2} + \frac{1}{63}\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{8}C^3\right)x^{9/2} + O(x^5), \quad x \to 0. \end{cases}$$

Le théorème A est un cas spécial du théorème II qu'on démontrera plus loin. En d'autres termes, l'intégrale (4) s'obtient de (10) en réunissant les termes avec les mêmes exposants figurant sous différents signes de sommes et rangeant clairement suivant les exposants croissants.

Théorème I. *Soient:*

1. *n une nombre entier positif,*

$$-2 < a < -1, \quad b > 0$$

$$m_n = [n(a+2)]$$

et

$$n_k = \left[n - \frac{k}{a+2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots m_n,$$

2.

$$\varphi_n(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{n} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + x \sum_{\nu=1}^{n_1+1} A_{1,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \cdots +$$

$$+ x^k \sum_{\nu=1}^{n_k+1} A_{k,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \cdots + x^{m_n} \sum_{\nu=1}^{n_m+1} A_{m,\nu}\, x^{\nu(a+2)}$$

$$\left(avec \sum_{\nu=1}^{n_k+1} = 0, \quad quand \quad n_k + 1 = 0)\right).$$

Alors

$$y(x) = \varphi_n(x) + O\left(x^{(n+1)(a+2)}\right), \quad x \to 0 \tag{6}$$

ou

$$= \varphi_n(x) + A_{m+1,1}\, x^{m+1+(a+2)} + O\left(x^{(n+1)(a+2)}\right), \quad x \to 0$$

suivant que

$$[(n+1)(a+2)] = m \tag{8}$$

ou

$$[(n+1)(a+2)] = m + 1. \tag{9}$$

Théorème II. *Soient:*

n un nombre entier positif,

$$a > -1,$$

$$m_n = [n(a+2)], \quad m_{n-1} = [(n-1)(a+2)]$$

et

$$n_k = \left[n - \frac{k}{a+2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots m_n.$$

Alors

$$\left.\begin{aligned} y(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{n} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + x \sum_{\nu=1}^{n_1+1} A_{1,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \\ + x^2 \sum_{\nu=1}^{n_2+1} A_{2,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \cdots + x^k \sum_{\nu=1}^{n_k+1} A_{k,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \cdots + \\ + \cdots + x^{m_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{2} A_{m_{n-1},\nu}\, x^{\nu(a+2)} + \\ + x^{a+2}\left(A_{m_{q-1}+1,1}\, x^{m_{q-1}+1} + A_{m_{q-1}+2,1}\, x^{m_{q-1}+2} + \right. \\ \left. + \cdots + A_{m-1,1}\, x^{m-1} + A_{m,1}\, x^{m}\right) + O\left(x^{(n+1)(a+2)}\right), \quad x \to 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Démonstration du Théorème I

a) *De*

$$y(x) = 1 + o(1), \quad x \to 0$$

et l'équation différentielle (1) *il s'ensuit*

$$y(x) = 1 + O(x^{a+2}); \quad x \to 0.$$

En posant $y(x) = 1 + E_1(x)$, où

$$E_1(x) = o(1), \quad x \to 0 \tag{11}$$

dans l'équation différentielle (1) on a

$$E_1''(x) = x^a \{1 + E_1(x)\}^b$$

c'est-à-dire d'après (11)

$$E_1''(x) = O(x^a), \quad x \to 0$$

et, puisque $-2 < a < -1$

$$E_1'(x) = C_1 + O\left(\int_x^\delta x^a\,dx\right) = O(x^{a+1}), \quad x \to 0$$

et par suite

$$E_1(x) = C_2 + O\left(\int_0^x x^{a+1}\,dx\right) = C_2 + O(x^{a+2}), \quad x \to 0.$$

D'après (11) on doit avoir $C_2 = 0$, donc

$$E_1(x) = O(x^{a+2}), \quad x \to 0.$$

b) *Soit*

$$p = \left[\frac{1}{2+a}\right]. \tag{12}$$

Alors pour tout

$$0 \leqq r < p$$

de

$$y(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r-1} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + O(x^{r(a+2)}), \quad x \to 0$$

il suit

$$y(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + O(x^{(r+1)(a+2)}), \quad x \to 0.$$

Posons

$$y(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r-1} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + E_r(x) \tag{13}$$

où

$$E_r(x) = O(x^{r(a+2)}), \quad x \to 0.$$

En portant l'expression (13) dans l'équation différentielle on a

$$\sum_{\nu=1}^{r-1} [\nu(a+2)][\nu(a+2)-1] A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)-2} + E_r''(x) =$$

$$= x^a \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{r-1} A_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + O(x^{r(a+2)}) \right\}^b, \quad x \to 0$$

$$= x^a \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} B_{0,\nu}\, x^{\nu(a+2)} + O(x^{r(a+2)}) \right\}, \quad x \to 0.$$

Comme

$$\nu(a+2) - 2 = (\nu - 1)(a+2) + a$$

et

$$\nu(a+2)[\nu(a+2)-1] A_{0,\nu+1} = B_{0,\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

on a

$$E_r''(x) = B_{0,r}\, x^{(r-1)(a+2)+a} + O(x^{r(a+2)+a}), \quad x \to 0$$

d'où il suit

$$E_r' = \frac{B_{0,r}}{r(a+2)+1} x^{r(a+2)-1} + K_1 + O\left(\int_x^\delta x^{r(a+2)+a}\, dx \right),$$

$$= \frac{B_{0,r}}{r(a+2)+1} x^{r(a+2)-1} + O(x^{(r+1)(a+2)-1}), \quad x \to 0$$

puisque $(r+1)(a+2) - 1 < 0$. Donc

$$E_r(x) = A_{0,r+1}\, x^{r(a+2)} + K_2 + O(x^{(r+1)(a+2)}), \quad x \to 0.$$

Comme $E_r(0) = 0$, on a $K_2 = 0$ et l'on obtient

$$E_r(x) = A_{0,r+1}\, x^{r(a+2)} + O(x^{(r+1)(a+2)}), \quad x \to 0.$$

Comme précédemment on démontre:

c) *En prenant p comme précédemment, c'est-à-dire si p est un nombre entier, défini par* (12), *alors de*

$$y(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{p-1} A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)} + O(x^{p(a+2)}), \quad x \to 0$$

il suit

$$y(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{p} A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)} + O(x^{(p+1)(a+2)}), \quad x \to 0.$$

d) *Soient*

1. $$p = \left[\frac{1}{a+2}\right]$$

et q un nombre entier et positif satisfaisant l'inégalité

$$q > p - 1.$$

2. $$m_q = [q(a+2)]$$

et

$$q_k = \left[q - \frac{k}{a+2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots m_q.$$

3.

$$\varphi_q^*(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{q-1} A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)} + x \sum_{\nu=1}^{q_1} A_{1,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots +$$

$$+ x^k \sum_{\nu=1}^{q_k} A_{k,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots + x^{m_q} \sum_{\nu=1}^{q_{m_q}} A_{m_q,\nu} x^{\nu(a+2)}$$

où $\sum_{\nu=1}^{q_k} = 0$, *quand* $q_k = 0$.

Alors de

$$y(x) = \varphi_q^*(x) + O(x^{q(a+2)}), \quad x \to 0$$

il suit

$$y(x) = \phi_q(x) + O(x^{(q+1)(a+2)}), \quad x \to 0$$

ou

$$y(x) = \varphi_q(x) + A_{m+1,1} x^{1+(a+2)} + O(x^{(q+1)(a+2)}), \quad x \to 0$$

suivant que

$$[(q+1)(a+2)] = m \tag{8'}$$

ou

$$[(q+1)(a+2] = m+1. \tag{9'}$$

Afin que la démonstration du théorème soit plus claire, nous ne donnerons ici que le cas où $[(q+1)(a+2)] = m$.

En posant

$$y(x) = \varphi_n^*(x) + x A_q(x),$$

où

$$A_q(x) = O(x^{q(a+2)-1}), \quad x \to 0, \tag{14}$$

dans l'équation différentielle (1) on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{q} \nu(a+2)[\nu(a+2)-1] A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)-2} + \cdots + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{q_{m_q}} [m+\nu(a+2)][m+\nu(a+2)-1] A_{m_q,\nu} x^{m_q+\nu(a+2)} + \\ &+ x A_q''(x) + 2A_q'(x) = x^a \{\varphi^*(x) + x A_q(x)\}^b. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

En tenant compte de (14) le second membre de cette équation devient

$$x^a \left\{ \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu=1}^{q_k} B_{k,\nu} x^{k+\nu(a+2)} + O(x^{q(a+2)}) \right\}, \quad x \to 0,$$

(avec $n_0 = q-1$). De (15) il suit

$$x A_q''(x) + 2A_q'(x) = x^a \{B_{0,q-1} x^{(q-1)(a+2)} + B_{1,q_1} x^{1+q_1(a+2)} +$$

$$+ \cdots + B_{m_q,q_{m_q}} x^{m_q+q_{m_q}(a+2)} + O(x^{q(a+2)}), \quad x \to 0.$$

Soit $A_q^*(x)$ l'intégrale particulière de l'équation différentielle qu'on obtient de l'équation précédente en omettant le terme $O(x^{q(a+2)})$, c'est-à-dire

$$A_q^*(x) = \sum_{k=0}^{m_q} A_{k,q_k+1} x^{k+(q_k+1)(a+2)-1},$$

En posant

$$A_q(x) = A_q^*(x) + R_q(x), \tag{16}$$

où on a d'après (14)

$$R_q(x) = o(1), \ x \to 0, \tag{17}$$

on obtient

$$x R_q''(x) + 2 R_q'(x) = O(x^{q(a+2)+a}), \ x \to 0.$$

Si l'on écrit

$$x R_q''(x) + 2 R_q'(x) = \psi_q(x),$$

avec

$$\psi_q(x) = O(x^{q(a+2)+a}), \ x \to 0, \tag{18}$$

et l'on pose $R_q'(x) = x^{-2} C(x)$, on aura

$$C(x) = C_{q1} + \int_0^x x \psi_q(x)\, dx,$$

d'où il suit, d'après (18), que

$$C(x) = C_{q1} + O(x^{(q+1)(a+2)}), \ x \to 0.$$

Donc

$$R_q(x) = C_{q1} x^{-1} + O(x^{(q+1)(a+2)-2}), \ x \to 0. \tag{19}$$

En vertu de (17), on doit avoir $C_{q1} = 0$, de sorte que, en tenant compte de (16) et (19), on trouve

$$A_q(x) = \sum_{k=0}^{m_q} A_{k,q_k+1} x^{k+(q_k+1)(a+2)-1} + O(x^{(q+1)(a+2)-1}), \ x \to 0.$$

4. Démonstration du Théorème II

Le Théorème II peut être démontré de la même façon que la Théorème I. Pour cette raison nous donnons ici seulement les passages principaux.

a) *De* $y(x) = 1 + o(1)$, $x \to 0$ *et l'équation différentielle* (1) *il suit* $y(x) = 1 + O(x)$, $x \to 0$.

b) *De* $y(x) = 1 + O(x)$, $x \to 0$ *il suit* $y(x) = 1 + Cx + O(x^{a+2})$, $x \to 0$.

c) *Soient: q un nombre entier* $\geqslant 1$,

$$q_k = \left[q - \frac{k}{2+a}\right], \quad (k = 1, 2, \ldots, m_q),$$

$$m_q = [q(2+a)] \text{ et } m_{q-1} = [(q-1)(2+a)].$$

Alors de

$$y(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{q-1} A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)} + x \sum_{\nu=1}^{q_1} A_{1,\nu} x^{\nu(a+2)} +$$

$$+ x^2 \sum_{\nu=1}^{q_2} A_{2,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots + x^k \sum_{\nu=1}^{q_k} A_{k,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots +$$

$$+ x^{m_{q-1}} A_{m_{q-1},1} x^{(a+2)} + O(x^{q(a+2)}), \quad x \to 0$$

il suit

$$\left.\begin{aligned} y(x) = 1 + Cx + \sum_{\nu=1}^{q} A_{0,\nu} x^{\nu(a+2)} + x \sum_{\nu=1}^{q_1+1} A_{1,\nu} x^{\nu(a+2)} + \\ + x^2 \sum_{\nu=1}^{q_2+1} A_{2,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots + x^k \sum_{\nu=1}^{q_k+1} A_{k,\nu} x^{\nu(a+2)} + \\ + \cdots + x^{m_{q-1}} \sum_{\nu=1}^{2} A_{m_q,\nu} x^{\nu(a+2)} + \cdots + \\ + x^{a+2}(A_{m_{q-1}+1,1} x^{m_{q-1}+1} + A_{m_{q-1}+2,1} x^{m_{q-1}+2} + \\ + \cdots + A_{m_q,1} x^m) + O(x^{(q+1)(a+2)}), \quad x \to 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Communiqué le 3 août 1949.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] L. H. Thomas — Proc. Cambr. Phil. Soc. 23. p. 542 (1926).
E. Fermi — Zeitschr. f. Phys. 48. S. 73 (1928).
E. Fermi — Atti. Accad. Lincei (6) (1927), 602—607.
V. G. Avakumović — Глас САН, CXCI, стр. 163—185.

[2] Scorca-Dragoni, G. — Atti Accad. Lincei (6) 9 (1929), 623—625.

[3] V. G. Avakumović — Глас САН, CXCI, стр. 163—185.

[4] H. Buch and S. H. Caldwell — Physical Review (2) 38 (1931), 1898—1901.

[5] C. Miranda — C. Reale Accad. d'Italia V. (1934) 268—321.

[6] A. Sommerfeld — Zeitschr. f. Phys. 78 (1932) 283—308.

[7] V. G. Avakumović — Publ. mat. T. II. (1948) 223—233.