SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES SÉRIES DE TAYLOR DONT LES COEFFICIENTS SONT CONVEXES OU SATISFONT À D'AUTRES CONDITIONS ANALOGUES

Par

M. TOMIĆ

1. Soit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{1}$$

dont la série converge pour $|z| < 1$; posons

$$R_n(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

c. à d.

$$R_0(z) = f(z),$$

ainsi que

$$r_n(z) = z^{-n} R_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Dans les travaux cités sous [1], [2] et [3] *Fejér* et *Szegö* ont étudié les restes (2) et (3) de la série (1) en supposant que

$$c_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

et que les coefficients c_ν forment une suite monotone du premier ordre, ou d'ordre supérieur, c. à d. que

$$\Delta^k c_n \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

les différences $\Delta^k c_n$, d'ordre k, de la suite c_n étant données par

$$\Delta^k c_n = \binom{k}{0} c_n - \binom{k}{1} c_{n+1} + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} c_{n+k}.$$

L'un des premiers théorèmes de ce genre à été donné par *Fejér* [1], se rapportant à la fonction spéciale

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^{\rho}}, \quad 0<\rho\leqslant 1,$$

à savoir

Théorème a. *Soit* $0<\rho\leqslant 1$ *et*

$$\frac{1}{(1-z)^{\rho}}=\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots+\gamma_n z^n+\ldots,$$

alors

$$|\gamma_0+\gamma_1 z+\ldots+\gamma_n z^n|<\frac{H}{|1-z|^{\rho}},$$

pour tout

$$n=0,1,2,\ldots, \quad et \quad |z|\leqslant 1, \quad z\neq 1,$$

H étant une constante qui dépend de ρ.

En généralisant ce théorème dans diverses directions, *Fejér* et *Szegö* [3] ont finalement démontré le théorème suivant:

Théorème A. *Lorsque la suite des coefficients de la série* (1) *est convexe, c. à. d. satisfait à la condition* (5) *pour* $k=0,1$ *et* 2, *et lorsque, en outre, la condition* (4) *est remplie, la suite des restes* (2) *ainsi que des restes* (3), *satisfait aux inégalités*

$$|R_0(z)|\geqslant|R_1(z)|\geqslant|R_2(z)|\geqslant\ldots, \tag{6}$$

et

$$|r_0(z)|\geqslant|r_1(z)|\geqslant|r_2(z)|\geqslant\ldots, \tag{7}$$

pour tout $|z\leqslant 1$ *et* $z\neq 1$.

Il est évident que ce théorème contient le théorème **a.** comme cas particulier, puisque la suite γ_n est convexe et tend vers zéro pour $0<\rho<1$, et que, d'autre part, de (6) il résulte

$$|f(z)|=|R_0(z)|\geqslant|R_n(z)|=$$
$$=|f(z)-(c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n)|\geqslant|f(z)|-|c_0+c_1 z+\ldots c_n z^n|,$$

c. à d.

$$|c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n|\leqslant 2|f(z)|. \tag{8}$$

Dans cette Note je montre, en premier lieu, que l'on peut déduire le théorème **A** par des considérations géométriques élémentaires, analogues à celles dont je me suis servi dans les Notes citées sous [4] et [5].

D'autre part Szegö [2] a donné le complément suivant du théorème **a**, lorsque $\rho > 1$.

Théorème b. *Soit*

$$\frac{1}{(1-z)^\rho} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots \quad avec \quad \rho > 1,$$

alors

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n| \leqslant \frac{Hn^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \tag{9}$$

$$pour\ tout\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad et \quad |z| \leqslant 1 \quad z \neq 1,$$

H étant une constante qui dépend de ρ.

L'auteur fait remarquer qu'il n'a pas réussi à formuler une généralisation de ce théorème analogue à celle, donnée par le théorème **A** du théorème **a.** Je vais montrer ici, en second lieu, que l'on peut obtenir une telle généralisation par des considérations semblables à celles utilisées pour la démonstration du théorème **A**, et que l'on peut formuler de la manière suivante.

Théorème B. *Lorsque la suite des coefficients c_n de la série* (1) *ne décroit pas, c. à d.*

$$c_n \leqslant c_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

et lorsqu'il existe un entier k tel que la suite des différences

$$\delta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_{n-\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où l'on a posé

$$c_{-k} = c_{-k+1} = \ldots = c_{-2} = c_{-1} = 0,$$

forment, une suite décroissante, donc, lorsque

$$\delta_n^{(k)} > \delta_{n+1}^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

alors

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqslant H c_n |f(z)| \tag{12}$$

pour tout

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad et \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1,$$

H étant une constante indépendante de z et n.

Ce théorème contient, en effet, le théorème **b,** car en y posant

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^{\rho}}, \quad avec \quad \rho>1,$$

les coefficients

$$\gamma_n=\binom{n+\rho-1}{n}$$

satisfont aux conditions (10) et (11) pour $k=[\rho]$, et puisque

$$\gamma_n \sim \frac{n^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}, \quad n\to\infty,$$

il s'ensuit que les inégalités (12) se réduisent aux inégalités (9).

Enfin, dans la Note [2] *Szegö* généralise une formule classique de *Laplace* relative aux polynomes de *Legendre*, en l'énonçant pour une classe générale de polynomes, de la manière suivante.

Théorème C. *La fonction $f(z)$ étant donnée par la série* (1), *définissons la suite de polynomes $P_n(\cos\theta)$ par la fonction génératrice*

$$f(re^{\theta i})\, f(re^{-\theta i})=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, r^n. \tag{13}$$

Lorsque la suite c_n satisfait aux conditions suivantes

1° $c_{n-1}\geqslant c_n\to 0$, *pour* $n=1, 2, 3,\ldots,\ n\to\infty$,

2° $c_{n+1}\sim c_n,\quad n\to\infty$,

3° $c_n=O(c_{2n}),\quad n\to\infty$,

alors, pour les grandes valeurs de n, les polynomes $P_n(\cos\theta)$ se comportent de la manière suivante

$$P_n(\cos\theta)=2\,c_n\,R\{e^{-n\theta i} f(e^{-2\theta i})\}+o(c_n), \quad n\to\infty, \tag{14}$$

uniformément dans tout intervalle

$$\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon \quad (0<\varepsilon<\pi).$$

En posant dans ce théorème

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}z^n, \tag{15}$$

les polynomes $P_n(\cos\theta)$ se réduisent aux polynomes de Legendre, et l'on en déduit, en particulier, la formule asymptotique de Laplace

$$P_n(\cos\theta)=2\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}R\left\{\frac{e^{-n\theta i}}{\sqrt{1-e^{2\theta i}}}\right\}+$$
$$+o\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\theta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+ \tag{16}$$
$$+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad n\to\infty.$$

Je montrerai, en dernier lieu, qu'en remplaçant dans le théorème **C** les conditions $1^0, 2^0$ et 3^0 par une condition qui est, en quelque sorte, plus restrictive, l'on peut améliorer quelque peu la formule asymptotique (14) en y remplaçant le terme

$$o(c_n)\ \text{par}\ O(c^2_{m-1}),\quad \text{où}\quad m=\left[\frac{n}{2}\right].$$

Théorème C'. *La suite des polynomes $P_n(\cos\theta)$ étant celle du théorème* **C** *lorsque la suite des coefficients c_n satisfait aux conditions*

$$c_1(c_{n-1}-c_n)\leqslant c_2(c_{n-2}-c_n)\leqslant\ldots\leqslant c_{n-m+2}-c_n)\leqslant$$
$$\leqslant c_{m-1}(c_{n-m+1}-c_n)$$

pour tout

$$n=3,4,5,\ldots,\ \text{avec}\ m=\left[\frac{n}{2}\right], \tag{17}$$

et

$$c_n\to 0,\quad n\to\infty,$$

alors les polynomes $P_n(\cos\theta)$ satisfont à la relation asymptotique

$$P_n(\cos\theta)=2c_n R\{e^{-n\theta i}f(e^{2\theta i})\}+O(c^2_{m-1}),\quad n\to\infty, \tag{18}$$

qui a lieu uniformément dans tout intervalle

$$\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon\quad(0<\varepsilon<\pi).$$

Remarquons que les conditions (17) impliquent la condition 1° du théorème **C**, c. à d. la monotonie des coefficients c_n, car en remplaçant dans

$$c_\nu (c_{n-\nu} - c_n) \leqslant c_{\nu+1} (c_{n-\nu-1} - c_n) \tag{19}$$

n par $2n+1$, l'on en déduit

$$c_\nu \geqslant c_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

En prenant dans le théorème **C′** pour $f(z)$ la fonction (15), la relation asymptotique (18) se réduit à la relation (16), mais où le terme

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ est à remplacer par } O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il nous reste à montrer seulement que les coefficients de Taylor

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

de la fonction (15) satisfont bien aux conditions (17), c. à d. (19).

À cet effet posons

$$A = (2n - 2\nu - 1)(2n - 2\nu + 1) \ldots (2n - 1),$$
$$B = (2n - 2\nu)(2n - 2\nu + 2) \ldots 2n .$$

Alors,

$$\frac{c_{n-\nu-1} - c_n}{c_{n-\nu} - c_n} = \frac{c_{n-\nu-1}\left\{1 - \frac{A}{B}\right\}}{c_{n-\nu-1}\left\{\frac{2n-2\nu-1}{2n-2\nu} - \frac{A}{B}\right\}} = \frac{1 - \frac{A}{B}}{1 - \frac{A}{B} - \frac{1}{2(n-\nu)}},$$

et puisque

$$\frac{c_\nu}{c_{\nu+1}} = \frac{2\nu+2}{2\nu+1},$$

la condition (19), mise sous la forme

$$\frac{c_\nu}{c_{\nu+1}} \leqslant \frac{c_{n-\nu-1} - c_n}{c_{n-\nu} - c_n},$$

devient

$$\frac{2\nu+1}{2\nu+2} > 1 - \frac{1}{2(n-\nu)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A}{B}}.$$

On en déduit que la suite c_n satisfera à la condition (19) lorsque

$$\frac{A}{B} \geqslant \frac{n-2\nu-1}{n-\nu} = 1 - \frac{\nu+1}{n-\nu}, \tag{20}$$

pour $2\nu+1 \leqslant n$.

Or,

$$\frac{A}{B} = \prod_{\mu=0}^{\nu}\left(1 - \frac{1}{2(n-\mu)}\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2(n-\nu)}\right)^{\nu+1} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{\nu+1}{2(n-\nu)} \geqslant 1 - \frac{\nu+1}{n-\nu},$$

d'où il résulte que l'inégalité (20), c. à d. les conditions (17) sont bien satisfaites lorsque les c_n sont les coefficients de la série (15).

Je voudrais ajouter encore que, quant à la rédaction de cette Note, de nombreuses suggestions me furent données par J. Karamata, en particulier la forme définitive du théoreme **B.**

2. Dans les Notes [4] et [5] j'ai donné une interprétation géométrique des sommes de la forme

$$s_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad s_{-1}(\theta) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

en supposant que la suite de coefficients a_ν est monotone ou convexe. Étant donné que la démonstration des théorèmes précédents repose sur cette interprétation je la reproduirai ici et en déduirai quelques conséquences dont j'aurai besoin dans la suite.

La suite de points dont les affixes sont donnés par (21) sont les sommets d'une ligne polygonale spirale $O, s_0, s_1, s_2, \ldots$ (v. Fig. 1) dont la longueur des cotés est $|s_n - s_{n-1}| = a_n$ et dont les angles extérieurs sont tous égaux à θ, c. à d.

$$\operatorname{arc}\left(\frac{s_{n+1} - s_n}{s_n - s_{n-1}}\right) = \theta.$$

Lorsque la longueur des côtés a_n décroît, cette spirale possède la propriété suivante.

Le cercle K_n qui passe par les sommets s_{n-1} et s_n et dont l'angle au centre correspondant à la corde $s_{n-1}\, s_n$ est égal à θ, contient le cercle suivant K_{n+1}, lorsque $a_n > a_{n+1}$, ou bien il se confond avec celui-ci lorsque $a_n = a_{n+1}$.

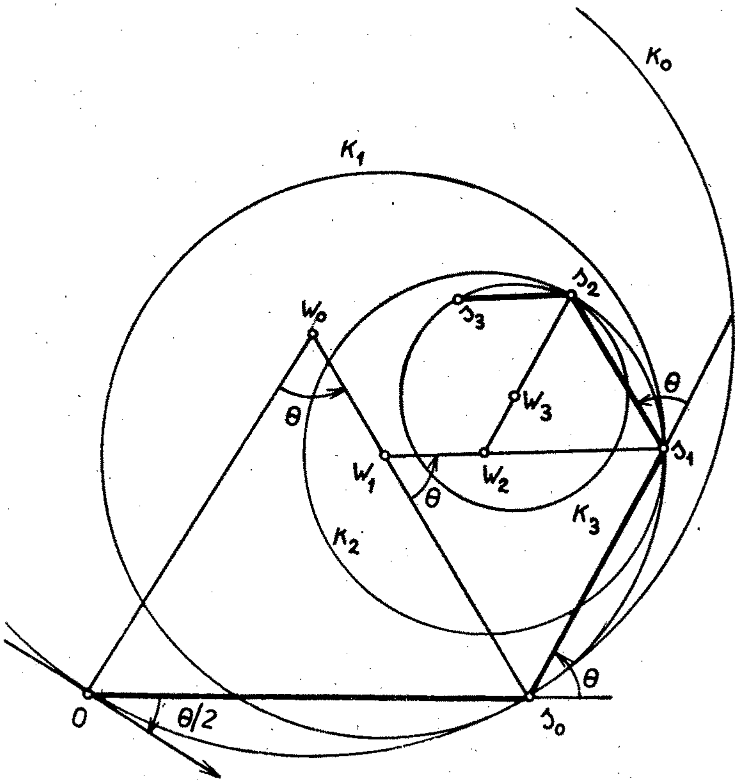

Fig. 1

Désignons par w_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, les centres des cercles K_n, ou, plus précisément, les nombres complexes dont les affixes sont les centres des cercles K_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Le rayon du cercle K_n est égal à

$$r_n = |w_n - s_{n-1}| = |w_n - s_n| = \frac{a_n}{2 \sin \theta/2}.$$

Étant donné que

$$|w_{n+1} - w_n| = \frac{a_n - a_{n+1}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad arc\left(\frac{w_{n+1} - w_n}{w_n - w_{n-1}}\right) = \theta ,$$

les points $w_0, w_1, w_2 \ldots$ seront de même les sommets d'une spirale analogue à la spirale $O, s_0, s_1, \ldots,$ lorsque

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

est une suite non croissante, c. à d. lorsque

$$\Delta^2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Désignons par K_n' le cercle qui passe par les sommets w_{n-1} et w_n dont l'angle au centre correspondant à la corde $w_{n-1} w_n$ est égal à θ, et par w_n' le centre de ce cercle. D'une manière analogue on aura

$$|w'_{n+1} - w_n'| = \frac{2a_n}{(2 \sin \theta/2)^2} .$$

Ainsi, les points $w_0', w_1', w_2', \ldots$ seront de même les sommets d'une spirale analogue aux spirales $O, s_0, s_1, \ldots$ et $w_0, w_1, w_2, \ldots$ lorsque $\Delta^2 a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite non croissante, c. à d. lorsque

$$\Delta^3 a_n \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{etc.}$$

De la propriété que le cercle K_{n+1} est entièrement situé dans le cercle K_n ou, tout au plus, peut se confondre avec lui, il résulte que les points $s_n = s_n(\theta)$ se trouvent à l'intérieur ou sur la circonférence des cercles $K_0, K_1, \ldots K_n$ lorsque $\Delta a_n \geqslant 0$. En particulier, le point

$$s_\infty = s(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu \theta i}$$

doit être situé à l'intérieur ou sur la circonférence de tous les cercles K_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Il en résulte de même que le point w_n doit être situé à l'intérieur ou sur la circonférence des cercles $K_0', K_1', K_2', \ldots,$ lorsque $\Delta^2 a_n \geqslant 0$, et, en particulier, que le point w_∞ doit être à l'intérieur ou sur la circonférence de tous les cercles K'_n, $n=0, 1, 2, \ldots$

Étant donné que

$$s(\theta)=s_\infty=w_\infty ,$$

le point $s(\theta)$ se trouvera à l'intérieur ou sur la circonférence de chacun des cercles K_n, et K'_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, lorsque $\Delta a_n \geqslant 0$ et $\Delta^2 a_n \geqslant 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

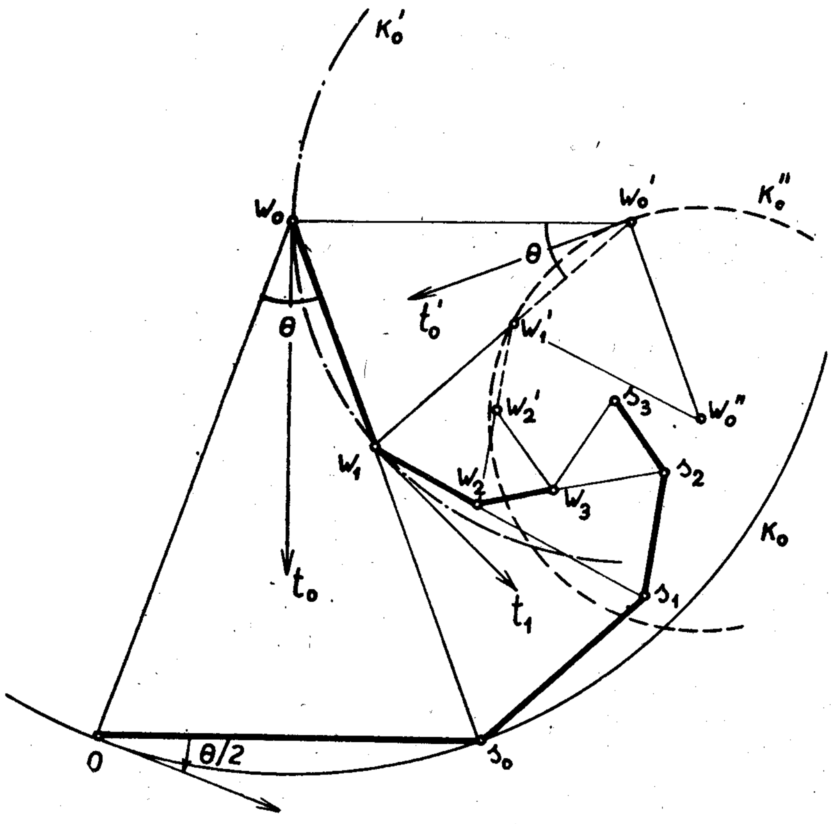

Fig. 2

Une seconde propriété dont nous nous servirons dans la suite est la suivante. La tangente $w_n t_n$ (où bien $w'_n t'_n$), au cercle K'_n (ou bien K''_n), passant par le sommet w_n (ou bien w'_n) est la bissectrice de l'angle extérieur θ du sommet w_n (ou bien w'_n) de la spirale considérée (v. Fig. 2).

Il en résulte que cette tangente $w_n t_n$ (ou bien $w_n' t_n'$) est la normale au côté $s_{n-1} s_n$ (ou bien $w_n w_{n+1}$) de la spirale précédente, qui passe par le milieu de ce côté.

En particulier, la tangente $w_0 t_0$ du cercle K_0' au point w_0 est normale à l'axe réelle, en passant par le milieu du côté Os_0, et tous les cercles K_n', $n=0, 1, 2, \ldots$, se trouvent donc situés à droite de cette tangente, étant donné que le cercle K_0' contient tous les cercles K_n', $n=1, 2, \ldots$.

3. *Démonstration du théorème A.* Rappelons, en premier lieu, qu'il suffit de démontrer les inégalités (6) de ce théorème. Car, en se servant de l'artifice utilisé par *Fejér* et *Szegö* [3], c. à d. en appliquant le lemme de Schwarz aux quotients

$$\frac{R_n(z)}{R_{n-1}(z)}, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

les inégalités (7) résultent des inegalités (6).

Remarquons, en second lieu, qu'il suffit de démontrer les inégalités (6) pour $z=e^{\theta i}$. Car, la suite des coefficients c_n étant convexe, il en est de même de la suite

$$a_n=c_n q^n \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant q \leqslant 1.$$

Donc, pour démontrer le théorème **A**, il suffit de montrer que la suite des restes

$$\rho_n(\theta)=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

satisfait aux inégalités

$$|\rho_0(\theta)| \geqslant |\rho_1(\theta)| \geqslant |\rho_2(\theta)| \geqslant \ldots, \quad \text{pour} \quad 0<\theta\leqslant\pi, \tag{22}$$

lorsque la suite a_n est convexe, c, à d. lorsque

$$\Delta a_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Delta^2 a_n \geqslant 0, \quad n=0, 1, 2, \ldots.$$

À cet effet, posons

$$s_n=s_n(\theta)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \; n=0, 1, 2, \ldots,$$

avec

$$s_\infty=s(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\theta i},$$

de sorte que

$$\rho_{n+1}(\theta) = s_\infty - s_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad \rho_0(\theta) = s_\infty. \tag{23}$$

Considérons, maintenant, (v. Fig. 2), deux sommets consécutifs s_{n+1} et s_n, ainsi que le cercle K'_{n-1} qui passe par le point w_n. Étant donné que la tangente $w_n t_n$ à ce cercle, au point w_n, est normale au côté $s_{n-1} s_n$, en passant par son milieu, il en résulte que pour tout point d'affixes z, qui est situé du même côté de la tangente $w_n t_n$ que le point s_n, la distance au point s_{n-1} est inférieure à la distance au point s_n, c. à d. que

$$|z - s_{n-1}| > |z - s_n|.$$

En particulier, s_∞ étant situé dans le cercle K'_{n-1}, il se trouve du même côté de la tangente $w_n t_n$ que le point s_n. On peut donc poser $z = s_\infty$, et l'on déduit que

$$|s_\infty - s_{n-1}| > |s_\infty - s_n|$$

c. à d., d'après (23),

$$|\rho_n(\theta)| > |\rho_{n+1}(\theta)|,$$

ce qui démontre l'affirmation (22), c. à d. le théorème **A**.

Démonstration du théorème **B**. Pour démontrer l'inégalité (12) supposons, d'abord, que $z = e^{\vartheta i}$. On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} f_n(z) &= c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n = \\ &= e^{n\vartheta i}(c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \ldots + c_0 e^{-n\vartheta i}). \end{aligned} \tag{23}$$

Ainsi, en posant

$$\theta = -\vartheta \text{ et } a_\nu = c_{n-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots n,$$

la suite des coefficients c_n étant supposée non decroissante, la suite a_n sera non croissante, et le point

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 e^{\theta i} + \ldots + a_n e^{n\theta i} = \\ &= c_n + c_{n-1} e^{-\vartheta i} + \ldots c_0 e^{-n\vartheta i} \end{aligned} \tag{24}$$

sera situé dans le cercle K_0 (v. Fig. 1), qui passe par l'origine, et dont le rayon est égal à

$$r = \frac{a_0}{2|\sin\theta/2|} = \frac{c_n}{2|\sin\vartheta/2|}.$$

Par suite

$$|s_n| \leqslant 2r,$$

c. à d. d'après (23) et (24)

$$|c_0+c_1 z+\ldots c_n z^n| \leqslant \frac{c_n}{|\sin \vartheta/2|} \leqslant \frac{2c_n}{|1-z|}, \quad \text{avec } z=e^{\vartheta i}.$$

Cette inégalité, qui est équivalente à

$$|(1-z) f_n(z)| \leqslant 2 c_n, \tag{25}$$

étant valable pour $z=e^{\vartheta i}$, le sera aussi, d'après le lemme de *Cauchy*, pour tout z du cercle $|z| \leqslant 1$. Cette dernière inégalité, multipliée par

$$|(1-z)^{k-1} f(z)|,$$

devient

$$|(z-1)^k f(z)| \, |f_n(z)| \leqslant 2 c_n |1-z|^{k-1} |f(z)|. \tag{26}$$

Étant donné que

$$|1-z|^{k-1} \leqslant 2^{k-1}, \text{ pour tout } |z| \leqslant 1,$$

et que dans l'expression

$$(z-1)^k f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu^{(k)} z^\nu,$$

d'après l'hypothèse (11) du théorème B, la suite des coefficients, c. à d. des différences $\delta_\nu^{(k)}$ décroît, d'après le théorème de *Kakeya-Eneström* [6], [7], il existe une constante $m>0$, telle que

$$|(1-z)^k f(z)| > m \quad \text{pour tout} \quad |z| \leqslant 1.$$

Donc, de l'inégalité (26) il résulte l'inégalité

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{2^k}{m} c_n |f(z)|, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1,$$

qui se réduit à l'inégalité (12), pour $H=2^k/m$, et qui démontre le théorème **B**.

Remarquons que le théorème **b**, c. à d. l'inégalité (9) est une conséquence immédiate de l'inégalité (25), car en y posant

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu z^\nu,$$

l'on en déduit

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu z^\nu\right| \leqslant \frac{2\gamma_n}{|1-z|} = \frac{2\gamma_n}{|1-z|^\rho}|1-z|^{\rho-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\rho \gamma_n}{|1-z|^\rho} \leqslant \frac{(1+\varepsilon_n)2^\rho}{\Gamma(\rho)} \frac{n^{\rho-1}}{|1-z|^\rho}, \quad \varepsilon_n > 0,$$

étant donné que

$$\gamma_n \sim \frac{n^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}, \quad n \to \infty.$$

Démonstration du théorème $\mathfrak{C}'$. Étant donné que le polynome $P_n(\cos\theta)$ est défini par (1) et (13), il est de la forme

$$P_n(\cos\theta) = 2c_0c_n \cos n\theta + 2c_1 c_{n-1} \cos(n-2)\theta +$$
$$+ 2c_2c_{n-2} \cos(n-4)\theta + \ldots + 2c_{m-1}c_{n-m-1} \cos(n-2m+2)\theta + r_m,$$

où l'on a posé

$$m = \left[\frac{n}{2}\right]$$

et

$$r_m = \begin{cases} c_m^2 & \text{lorsque } n \text{ est pair, } n = 2m, \\ 2c_m c_{m+1} \cos\theta & \text{lorsque } n \text{ est impair, } n = 2m+1. \end{cases} \tag{27}$$

Ainsi, en posant

$$Q_n(\theta) = 2e^{-n\theta i} \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu c_{\nu-n} e^{\nu\theta i} + r_m,$$

on aura

$$P_n(\cos\theta) = R\{Q_n(\theta)\}.$$

En posant, en outre,

$$S_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{2\nu\theta i}, \quad S(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu\theta i},$$

et

$$d_n - 2e^{-n\theta i} \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu (c_{n-\nu} - c_n) e^{2\nu\theta i}, \tag{29}$$

on aura

$$d_n = Q_n(\theta) - 2c_n e^{-n\theta i} S_{m-1}(\theta) - r_m,$$

ce qui donne l'expression suivante pour $Q_n(\theta)$,

$$Q_n(\theta) = 2\, c_n\, e^{-n\theta i}\, S(\theta) + d_n + r_m - 2\, c_n\, e^{-n\theta i} \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu\theta i}. \tag{30}$$

Or, d'après l'hypothèse (17) du théorème **C'**, les coefficients dans l'expression (29) de d_n ne décroissent pas, donc, en exprimant qu'il sont situés dans le cercle, dont le rayon est égal au plus grand de ces coefficients $c_{m-1}(c_{n-m+1} - c_n)$, divisé par $\sin\theta$, l'on obtient l'inégalité

$$|d_n| \leqslant \frac{c_{m-1}(c_{n-m+1} - c_n)}{\sin\theta} \leqslant \frac{2}{\sin\theta}\, c_{m-1}^2.$$

Pour la même raison, les coefficients c_n ne croissant pas, on a

$$2\, c_n \left| \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu\theta i} \right| < 2\, \frac{c_n c_m}{\sin\theta} \leqslant \frac{2}{\sin\theta}\, c_{m-1}^2,$$

enfin, d'après (27), on a

$$|r_n| \leqslant 2\, c_{m-1}^2.$$

En majorant, donc, les trois derniers termes de (30), par les inégalités ainsi obtenues, l'on obtient finalement la relation asymptotique pour $Q_n(\theta)$, à savoir

$$Q_n(\theta) = 2\, c_n\, e^{-n\theta i}\, S(\theta) + O(c_{m-1}^2), \quad n \to \infty.$$

Les parties réelles des deux membres de cette relation donnent, d'après (28), l'affirmation (18) du théorème **C'**, qui se trouve ainsi démontré.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] Fejér, L. — Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. *Math. Zeit.* **24**, 267—284 (1925).

[2] Szegö, G. — Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. *Math. Zeit.* **25**, 172—187 (1926).

[3] Fejér, L. et Szegö, G. — Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Prace mat. - fiz.* **44**, 15—25 (1935).

[4] T o m i ć, M. — Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. *Publ. de l'inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences* **2**, 146—154 (1948).

[5] K a r a m a t a, J. et T o m i ć, M. — Considérations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences*, **2**, 157—171 (1948).

[6] K a k e y a, S. — On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tok. Math. Journ.* **2**, 140—142 (1912).

[7] E n e s t r ö m, G. — Remarque sur un théorème relatif aux racines de l'équation etc. *Tok. Math. Journ.* **18**, 34—36 (1920).