CERTAINS CRITÈRES CONCERNANT LE TYPE DES SURFACES DE RIEMANN À POINTS DE RAMIFICATION ALGÉBRIQUES

Par

M. RADOJČIĆ

1. — Parmi les critères servant à discerner le type parabolique du type hyperbolique des surfaces de Riemann simplement connexes on peut distinguer deux espèces de critères: dans les uns on considère la distribution des points de ramification en se rapportant à une métrique spéciale, introduite sur la surface, dans les autres on suppose la surface divisée d'une certaine manière en feuillets et l'on s'occuppe principalement de l'image topologique de la configuration de ces feuillets. Ainsi, dans la première espèce de propositions on peut avoir comme condition déterminant le type parabolique, la divergeance d'une intégrale,[1]) tandis que dans la seconde espèce ce peut être une série qui doit diverger et dont les termes expriment une propriété topologique.[2])

---

[1]) *L. Ahlfors*, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Comm. Math. Helv. 3, 1931); Sur le type d'une surface de Riemann (C. R. Acad. Paris, 201, 1935); Ueber eine Klasse von Riemannschen Flächen (Soc. Sci. Fenn. 9, 1936); *M. Radojčić*, Über einen Satz von Herrn Ahlfors (Publ. Math. Univ. Belgrade, 1937); *Z. Kobayashi*, Theorems on the conformal representation of Riemann surfaces (Sci. Rep. Tokyo Bunr. Dai. 2, 1935) etc.

[2]) *R. Nevanlinna*, Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen (Comm. Helv. 5, 1933); *Z. Kobayashi*, On the type of Riemann surfaces (Sci. Rep. Tokyo Bunr. Dai. 2, 1935); A remark on the type of Riemann surfaces (ibid. 3, 1937) etc.

Dans le présent travail[3]) il s'agira d'un critère de la seconde espèce, s'appliquant aux surfaces de Riemann dont tous les points de ramification sont algébriques.

2. — Considérons la classe suivante de surfaces de Riemann S:

1. S est une surface ouverte et simplement connexe;

2. tous les points de ramification de S sont algébriques et leur ordre ne surpasse pas un nombre entier fixe p;

3. la distance sphérique (sphère de Riemann) entre ces points, mesurée sur S, surpasse une borne positive ε.

Supposons d'abord que la surface considérée S recouvre un plan numérique, soit le plan de w, et que le domaine qui lui correspond par une représentation conforme biunivoque de S sur un certain plan de z soit le cercle $|z| < R \leqslant \infty$, c.à d. un cercle borné (cas hyperbolique) ou toute la partie finie du plan (cas parabolique). Soient A_i, $i = 1, 2, \ldots$ les points de ramification de S. D'après la condition 1. leur nombre est illimité, mais dénombrable. Soit $w = a_i$ la trace de A_i dans le plan de w.[4])

Nous appellerons *feuillet*[5]) un domaine ouvert d'une surface de Riemann, qui recouvre le plan de telle sorte que:

1. aucune partie du plan ne soit recouverte plus d'une fois;

2. il ne reste aucun domaine complémentaire;

3. chaque partie de sa frontière soit commune à certains domaines de la surface, extérieurs au feuillet considéré.

Supposons que S soit divisée en de tels feuillets F_k, $k = 1, 2, \ldots$ le long des demi-droites L_i, $i = 1, 2, \ldots$ ayant leurs

---

[3]) Nous y refaisons et continuons nos considérations qui devaient paraître comme article dans les „Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade" en 1941, mais le tome des „Publications", en question, périt complètement à l'imprimerie pendant la guerre.

[4]) Comme il est souvent usage, nous distinguerons les points sur S de leurs traces dans le plan de w en désignant les premiers par les lettres majuscules correspondantes.

[5]) Voir ma Note: Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes (C. R. Acad. Paris, 190, 1929).

bouts en A_i, données par les relations suivantes:

$$\text{arc } w = \text{arc } a_i, \qquad |w| \geqslant |a_i|, \qquad \text{si} \quad a_i \neq 0,$$
$$\text{arc } w = 0, \qquad \text{si} \qquad a_i = 0;$$

celà est toujours possible.

Le nombre des points de ramification A_i situés sur la frontière d'un feuillet F_k est fini. En effet, s'il ne l'était pas, il y aurait une infinité de ces points, situés sur la frontière d'un certain F_k et qui appartiendraient à un nombre limité de lignes L_i ou bien à une infinité de ces lignes. Supposons d'abord que ces points appartiennent à un nombre limité des L_i. Alors une infinité de ces points se trouveraient sur une seule ligne L_i et les distances entre ces points, mesurées sur S, seraient représentées directement par les distances des traces a_i correspondantes, entre-elles. Ces distances (sphériques) auraient nécessairement pour limite inférieure zéro, ce qui est contraire à la condition 3. du numéro précédent.

Supposons secondement que les points A_i considérés appartiennent à une infinité de lignes L_i de la frontière d'un certain feuillet F_k. Alors, d'après une considération élémentaire des ensembles de telles lignes, il y aurait sur ce feuillet un ensemble-limite d'une suite infinie de ces lignes L_i; cet ensemble-limite consisterait en une demi-droite L^*, partant d'un certain point A^* et satisfaisant aux relations:

$$\text{arc } w = \text{arc } a^*, \quad |w| \geqslant |a^*|, \quad \text{si } a^* \neq 0,$$
$$\text{arc } w = \text{ const. } \quad \text{si } a^* = 0;$$

ou bien il se réduirait au seul point $w = \infty$, que nous désignons alors par A^*. Une infinité des L_i de la suite considérée aurait comme bouts des points convergeant vers A^*, soit $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, \ldots$ Décrivons un cercle de rayon ε du point A^* comme centre. Ce cercle contiendrait une infinité de segments $A^* A_{i_m}$ qui ne traverseraient aucune ligne L_i de la frontière du feuillet envisagé. Or, la distance entre deux de ces points A_{i_m} mesurée sur S aurait pour limite inférieure, évidemment, zéro, contrairement à la condition 3.

Par conséquent, le nombre des points A_i situés sur la frontière d'un feuillet étant fini, le nombre des lignes L_i dont est construite la frontière d'un feuillet, l'est également. Puisque sur une ligne L_i peuvent se trouver plusieurs points de ramification, cela veut dire que, généralement, la frontière d'un feuillet consiste en un nombre fini de fragments de ces lignes (fig. 1).

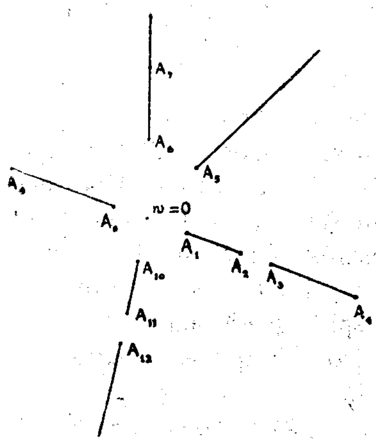

Fig. 1

Divisons l'ensemble des F_k en *générations*[6]) que nous définirons de la manière suivante.

Prenons un F_k quelconque pour génération d'ordre nul G_0; l'ensemble des F_k qui ont au moins une frontière commune avec G_0 s'appelle première génération, G_1; l'ensemble des F_k, n'y comptant pas G_0, qui ont au moins une frontière commune avec G_1 s'appelle seconde génération, G_2, etc. En général: l'ensemble des F_k qui ont au moins une frontière commune avec $G_{\nu-1}$, mais qui n'appartiennent pas aux générations précédentes, s'appelle génération d'ordre $\nu\,(\nu=1,2,\ldots)$, G_ν. Ainsi, l'ensemble des F_k se trouve groupé en générations $G_\nu\,(\nu=0,1,2,\ldots)$.

Désignons par $\delta(\nu)$ le nombre des feuillets F_k contenus dans G_ν.

3. — Ceci étant, voici le théorème que nous allons démontrer d'abord:

P r o p o s i t i o n I. *Lorsque la série*

$$\sum^{\infty}\nolimits_{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m_\nu)},$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right]+(\nu+1)\frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]}-1}{6p-1},$$

diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.

---

[6]) Notion introduite dans l'étude des fonctions analytiques par *M. Speiser* (Comm. Math. Helv. 1. 1929; 2. 1930).

4. — Désignons par O_ρ le domaine de S composé des points dont la distance sphérique d'un point fixe de S, par ex. d'un certain point A_0 situé dans G_0 (cette distance étant mesurée sur S) est plus petite que ρ. Considérons de plus près la forme de O_ρ.

O_ρ contient toujours le domaine C_o suivant: lorsque $\rho < \pi$ (π est la distance entre deux points opposés de la sphère de Riemann) C_o se compose de tous les „rayons" de longueur sphérique $\leqslant \rho$, qu'on peut tracer sur S du point A_o dans toutes les directions sans traverser un point de ramification (ce sont des rayons lorsqu'on les considère dans le plan de w; sur la sphère ce sont des circonférences). Chaque rayon a donc la longueur sphérique ρ, excepté dans les directions (qui sont en nombre fini) où l'on rencontre un point de ramification éloigné de A_o de moins que ρ; C_o est par conséquent l'intérieur d'un cercle dont on a extrait certains segments radiaux (fig. 2). Lorsque $\rho = \pi$ le cercle devient infini; alors, et de même si $\rho > \pi$, la forme de C_o reste constante et sa frontière est formée de certaines demi-droites.

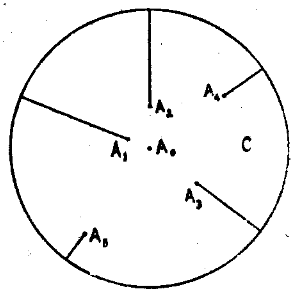

Fig. 2

$$\text{arc}\,(w - a_o) = \text{arc}\,(a_i - a_o), \quad |w - a_o| \geqslant |a_i - a_o| .$$

Si le point a_o était, lui aussi, un point de ramification, C_o recouvrirait le plan plusieurs fois.

Les points de ramification, qui sont situés sur la frontière de C_o sont les centres d'autres domaines appartenant à O_ρ, semblables à C_o. Soit A_i l'un de ces points; on a $|a_i - a_o| \leqslant \rho$. Lorsque $\rho < |a_i - a_o| + \pi$, O_ρ contient le domaine formé par tous les rayons de longueur sphérique $\leqslant \rho - |a_i - a_0|$, qu'on peut tracer sur S du point A_i dans toutes les directions sans rencontrer un point de ramification. Ce domaine existe seulement pour $\rho > |a_i - a_o|$ et il a une partie commune avec C_o; en outre, c'est (comme C_o) l'intérieur d'un „cercle" dont on a extrait certains segments radiaux, mais qui recouvre le plan plusieurs fois, de sorte qu'on peut le considérer comme une partie de la surface de Riemann de la fonction

$$(w-a_i)^{\frac{1}{q}} \qquad (q<p).$$

Lorsque $\rho \geqslant |a_i - a_0| + \pi$, la forme de ce domaine reste constante, la partie circulaire de sa frontière étant disparue (de même qu'il a été dit pour C_0). Maintenant, envisageons tous les domaines de l'espèce considérée, c. à d. qui ont pour centres les points de ramification situés sur la frontière de C_0, et désignons leur ensemble par C_1.

Les points de ramification situés sur la frontière de C_1 et non sur celle de C_0 sont les centres d'autres domaines de la même forme que les domaines considérés précédemment. Soit par ex. A_j un tel point de ramification, situé sur la frontière d'un domaine constitutif de C_1, celui-ci ayant pour centre A_i. Le point A_j est, lui-aussi, le centre d'un domaine semblable à C_0 et son rayon a pour valeur

$$\rho - |a_i - c| - |a_j - a_i|.$$

Sa frontière a une partie circulaire lorsque ce rayon est $<\pi$; lorsqu'il est $\geqslant\pi$, la partie circulaire disparaît come précédemment. Désignons l'ensemble de tous ces domaines par C_2.

En continuant ainsi, on obtient une suite infinie C_1, C_2, $C_3, \ldots$ et l'on trouve que le domaine O_ρ est la somme finie de ces ensembles de domaines, de sorte que l'on a

$$O_\rho = C_0 + C_1 + \cdots + C_k,$$

où k est un nombre augmentant avec ρ. Remarquons que les domaines constituant un certain C_s peuvent empiéter les uns sur les autres, de même que les divers C_s entre-eux.

5. — Considérons certains domaines sur S de la même espèce que O_ρ, mais pour lesquels $\rho = \varepsilon/2$ et dont les centres $(\rho = 0)$ sont différents; désignons ces domaines par E.

Dans un domaine E peut se trouver au plus un point de ramification; car s'il y en avait deux, leurs distances au centre de ce domaine étant ρ' et ρ'', la distance de ces points entre eux serait $\leqslant \rho' + \rho'' < \varepsilon$ (puisque ρ', $\rho'' < \varepsilon/2$) ce qui contredit l'hypotèse 3 du n^0 1.

Lorsqu'aucun point de ramification n'existe dans un E, c'est un cercle, donc sa frontière est $< \varepsilon\pi$ (on aurait $= \varepsilon\pi$ s'il ne s'agissait pas des mesures sphériques). Lorsque le centre d'un domaine E est un point de ramification, sa frontière est $< p\varepsilon\pi$ en vertu de l'hypotèse 2 du nº 1. Quand un point de ramification se trouve autre part dans E, la frontière de E se projette, en deux cercles tangents, l'un de rayon $\varepsilon/2$, l'autre plus petit, donc la frontière est plus petite que dans le cas précédent. Par conséquent, la frontière d'un E est toujours $< p\varepsilon\pi$.

Désignons par D_0 le domaine E dont le centre est A_0. Divisons dans la projection de D_0 sur le plan de w chaque circonférence de la frontière de D_0 en six parties égales et envisageons tous les points correspondants sur S; soient $B_1', B_2'', \ldots$ ces points. Lorsque la frontière de D_0 se projette en une seule circonférence, cela veut dire tout simplement que nous la divisons en six arcs égaux; lorsque la frontiére de D_0 se projette en deux circonférences (fig. 3) nous supposerons, pour préciser, que la division de chaque circonférence en six arcs égaux commence par le point de contact des deux cercles.

Soient maintenant $E_1', E_1'', \ldots$ les domaines E ayant les points $B_1', B_1'', \ldots$ pour centres; leur nombre est $\leqslant 6p$; désignons l'ensemble de D_0 et de ces domaines par D_1. Les frontières des deux domaines D_0 et D_1 n'ont pas de points communs. En effet, $B_1^{(\nu)}$ et $B_1^{(\nu+1)}$ étant deux points voisins sur la frontière de D_0, les domaines correspondants $E_1^{(\nu)}$ et $E_1^{(\nu+1)}$ contiennent, tous les deux, l'arc que nous désignerons par $B_1^{(\nu)} B_1^{(\nu+1)}$; or toute la frontière de D_0 est contenue ainsi dans les $E_1^{(\nu)}$ et par conséquent elle est contenue à l'intérieur de D_1.

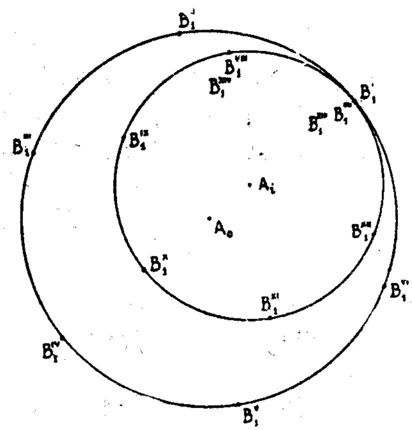

Fig. 3

Divisons maintenant dans la projection chaque circonférence des domaines $E_1', E_1'', \ldots$ en six parties égales, comme nous l'avons fait précédemment avec D_0, et envisageons tous les points correspondants sur S. Soient B_2', B_2'',... ces points et E_2', E_2'',... les domaines E ayant ces points-ci comme centres. Puisque le nombre de chaque groupe de ces domaines, construits autour de l'un des domaines E_1', E_1'',... est $\leqslant 6p$, leur nombre total est $\leqslant (6p)^2$. Désignons l'ensemble de D_1 et de ces domaines par D_2. Les frontières de D_1 et D_2 n'ont pas, non plus, de points communs, ce qu'on voit immédiatement, comme dans le cas précédent.

Continuons ainsi indéfiniment. Il en résulte une suite de domaines de S dont chacun contient le précédent: $D_0, D_1, D_2, \ldots$

Or, comme le nombre des domaines E_1', E_1'',... fut $\leqslant 6p$ et celui des domaines E_2', E_2'',... fut $\leqslant (6p)^2$, ainsi le nombre des domaines E_3', E_3'',... est $\leqslant (6p)^3$ etc. Donc le nombre des domaines E dont se composent $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ est au plus égal a

$$\begin{array}{l} 1, \\ 1+6p, \\ 1+6p+(6p)^2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1+6p+(6p)^2+\cdots+(6p)^k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

respectivement. Par conséquent nous pouvons énoncer le

Lemme 1. *Le nombre des domaines E dont se compose de la manière décrite le domaine D_k est au plus égal à*

$$N^{(k)} = \frac{(6p)^{k+1}-1}{6p-1}.$$

6. — Les frontières de D_k et D_{k+1} n'ayant pas de points communs, cherchons une borne inférieure pour la distance de ces frontières.

Prenons d'abord $k=0$, c. à d. D_0 et D_1. Considérons la circonférence où se projette la frontière de D_0, ou, s'il y a deux circonférences, la plus petite des deux, et désignons-la par K (fig. 4; nous imaginons dans cette figure qu'il y a deux circonférences et que le rayon de K est donc $< \varepsilon/2$). Envisageons sur K deux centres voisins, soit b_1' et b_1'', se rapportant aux domaines E_1' et E_1''; soient K' et K'' les circonférences de centres b_1' et b_1'' et de rayon $\varepsilon/2$ de ces deux domaines. Elles se coupent en deux points dont un seul peut se rapporter à la frontière de D_1, à savoir celui qui est plus éloigné de a_0; nous le désignerons par b.

Le point B est le plus proche de l'arc $B_1' B_1''$ parmi tous les points de la frontière de D_1. En effet, décrivons la circonférence de centre a_0 et de rayon $|b - a_0|$; elle passe par tous les points analogues à b, tandis que les traces de tous les autres points de la frontière de D_1 se trouvent, évidemment, à l'extérieur de ce cercle. Donc, si nous envisageons sur K tous les couples de centres voisins, tels que b_1' et b_1'', nous voyons que parmi tous les points de la frontière de D_1 les points tels que B sont les plus proches de K, c. à d. de la frontière de D_0.

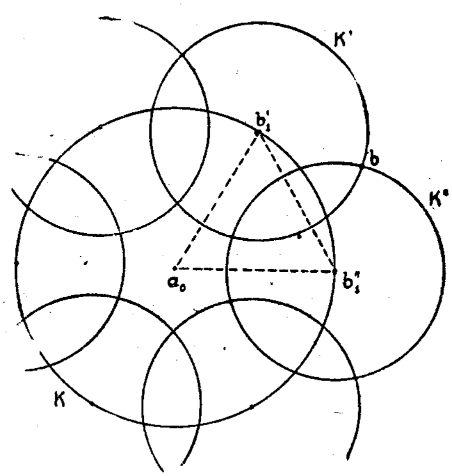

Fig. 4

Or, on calcule facilement une borne inférieure de la distance de b à K. Cette distance étant τ et le rayon de K étant ρ, on a $\tau = |b - c| - \rho$. En appliquant le théorème de Pythagore, qui s'exprime sur la sphère par une inégalité, on obtient immédiatement

$$|b - c| > \frac{\sqrt{3}}{2}\rho + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2}}{2}$$

et d'ici

$$\tau > \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\rho.$$

Le second membre de cette inégalité a dans l'intervalle $(0, \varepsilon/2)$, où varie ρ, sa plus petite valeur pour $\rho = \varepsilon/2$, à savoir $(\sqrt{3} - 1)\varepsilon/2$.

Donc

$$\tau > (\sqrt{3}-1)\frac{\varepsilon}{3} > \frac{\varepsilon}{5},$$

c. à d. $\varepsilon/5$ est une borne inférieure de la distance de b à K.

Cependant, nous n'avons pas encore tenu compte de ce que E_1' et E_1'' peuvent contenir des points de ramification et qu'alors leurs frontières peuvent être plus compliquées, comme nous l'avons déjà vu. Soit par ex. dans E_1' un point de ramification A_i à la distance $\eta (< \varepsilon/2)$ de B_1'. Le domaine E est alors plus compliqué, sa frontière se projette en deux circonférences, K' et une autre, plus petite, tangente à la première et de centre a_i, soit K_1' (fig. 5 et 6).

Si le point de la frontière de D_1, le plus rapproché de la frontière de D_0 était un certain point de la frontière de E_1', se rapportant à K', la considération précédente resterait valable. Supposons donc que le point le plus rapproché soit un certain point se rapportant à la circonférence K_1'. Si nous désignons par d et d' les distances de a_i à K et a K_1', la distance, considérée sur S, de K_1' à K sera $d+d'$.

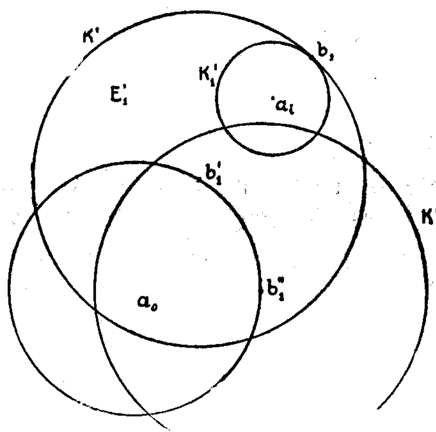

Fig. 5

Nous distinguons deux cas, selon que A_i se trouve dans un seul des domaines $E_1', E_1'', \ldots$ ou bien dans les parties communes aux deux ou à plusieurs de ces domaines. Si A_i se trouve dans un seul de ces domaines, donc dans E_1' (fig. 5), la circonférence K_1' est tangente à K' en un point tel que b_1. Celui-ci est plus éloigné de K que le point b. Donc on a $d+d' > \tau > \varepsilon/5$.

Si A_i se trouve dans deux domaines $E_1^{(\nu)}$ au moins, supposons par ex. que ce soit la partie commune à E_1' et E_1'' — désignons-la par F — alors il y a deux ou plusieurs circonférences concentriques, telles que K_1', soit K_1', K_1'',.., de centre a_i et tangentes aux circonférences K' et K'', et peut-être à d'autres encore. Evidemment, c'est toujours la plus grande de ces circonférences qui compte, car elle seule appartient à la frontière de D_1. Or, c'est, plus précisément, la circonférence qui appartient à celui des domaines $E_1^{(\nu)}$, dont le centre $B_1^{(\nu)}$ est le plus près de A_i. Par conséquent, si c'est par ex. la circonférence K_1' qui compte, il faut supposer que A_i se trouve dans le triangle curviligne $AA'B$ — et a_i dans le triangle correspondant du plan (fig. 6), limité par les arcs aa' et ab de K

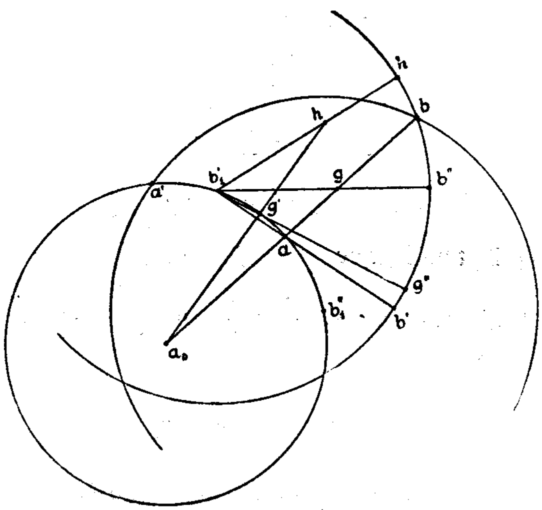

Fig. 6

et K'' et par un segment de droite. Car, si le point A_i se trouvait dans l'autre moitié du domaine F, il serait plus rapproché de B_1'' que de B_1'.

Alors, si $a_i \equiv a$, on a $d = 0$ et $d + d' = |a - b'|$, où b' est le point commun de K' et K_1'. Si $a_i \equiv g$, où g est la trace d'un point intérieur du segment AB, on a

$$d + d' = |a - g| + |g - b''| > |a - b''| > |a - b'|,$$

b'' étant dans ce cas le point commun de K' et K_1'. Donc $d + d' > |a - b'|$.

Supposons que a_i soit un point g' de l'arc AA'. Alors on a $d=0$ et

$$d+d'=|g'-g''|>|a-b'|,$$

où g'' est maintenant le point commun de K' et K_1'. Cette inégalité a lieu, puisque g' est plus près du centre b_1' que a. Donc on a de nouveau $d+d'>|a-b'|$.

Supposons enfin que a_i soit un point h se rapportant à l'intérieur du triangle $AA'B$. Soit g' le point d'intersection de K et de la trace de la droite A_0H. On a

$$d+d'=|g'-h|+|h-h'|,$$

où h' est maintenant le point commun de K' et K_1'. Donc on a

$$d+d'>|g'-h'|>|g'-g''|$$

et par conséquent $d+d'>|a-b'|$.

Donc, nous avons toujours $d+d'>|a-b'|$.

Or

$$|a-b'|=|b_1'-b'|-|b_1'-a|$$

et $|b_1'-b'|=\varepsilon/2$, tandis que

$$|b_1'-a|=2\rho\cdot\sin\frac{\pi}{12}\leqslant\varepsilon\sin\frac{\pi}{12}<\varepsilon\cdot 0,3;$$

donc

$$d+d'>\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon\cdot 0,3=\frac{\varepsilon}{5},$$

c. à d. la distance entre les points des frontières de D_0 et D_1 a encore comme borne inférieure $\varepsilon/5$. C'est donc une borne valable toujours.

Puisque D_2 s'obtient en ajoutant à chaque domaine E de l'ensemble $E_1', E_1'', \ldots$ des domaines E de la même manière qu'on a fait précédemment en ajoutant des domaines E à D_0, la même borne vaut pour la distance des frontières de D_1 et D_2, et ainsi de suite. Donc $\varepsilon/5$ est une borne inférieure valable pour chaque couple de domaines D_k et D_{k+1}.

Par conséquent nous pouvons énoncer le

L e m m e 2. *La distance sphérique sur S des points de la frontière du domaine D_k aux points de la frontière du domaine D_{k+1} est supérieure à $\varepsilon/5$, quelque-soit k.*

7. — Comme conséquence immédiate du lemme 2 nous pouvons dire que tous les points de S, dont la distance au point A_0, mesurée sur S, est inférieure à $\varepsilon/2$, $3\varepsilon/5$, $4\varepsilon/5, \ldots$, $(k+2)\varepsilon/5, \ldots$ appartiennent sûrement à $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ respectivement.

Or, d'après le lemme 1, le nombre des domaines E dont se compose D_k est $\leqslant N^{(k)}$. Puisque chaque E peut contenir au plus un point de ramification A_i, il en résulte que le nombre des points de ramification contenus dans D_k ne surpasse pas $N^{(k)}$.

Si nous choisissons k assez grand pour qu'on ait

$$(k+2)\frac{\varepsilon}{5} > \sigma \quad \text{c. à d.} \quad k > \frac{5\sigma}{\varepsilon} - 2,$$

le domaine formé de tous les points de S dont la distance sphérique mesurée sur S, au point A_0 est inférieure à un certain nombre σ, est contenu à l'intérieur du domaine D_k. Donc le nombre des points de ramification contenus dans ce domaine ne peut pas surpasser $N^{(k)}$. Enfin, puisque

$$\frac{5\sigma}{\varepsilon} - 2 < \left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right] - 1,$$

on peut choisir

$$k \geqslant \left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right] - 1$$

et par conséquent le nombre des A_i dont la distance à un certain point de S est inférieure à σ ne surpasse pas

$$N^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]-1} = \frac{(6p)^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}.$$

Donc nous avons le

Lemme 3. *Le nombre des points de ramification de S, dont la distance à un certain point de S est inférieure à un nombre σ ne surpasse pas*

$$N_\sigma = \frac{(6p)^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}.$$

8. — Nous demandons maintenant: combien de générations G_ν sont-elles nécessaires pour recouvrir l'un des ensembles C_k de domaines?

Considérons d'abord C_0. Lorsque ρ augmente à partir de zéro, C_0 croît à partir du point A_0, qui appartient au feuillet constituant la génération G_0. Donc, C_0 est d'abord contenu dans ce feuillet. Lorsque ρ atteint une certaine valeur, C_0 atteint au moins une ligne L_i de la frontière de ce feuillet en un endroit d'où l'on passe de ce feuillet à d'autres feuillets. Puisque C_0 croît radialement de A_0 et que ρ continue à augmenter, C_0 rentrera dans ces feuillets, qui se trouvent au-delà de L_i. Ceci ayant lieu en un certain point T de L_i, on a, plus exactement, plusieurs cas à distinguer.

1. Le bout de la demi-droite L_i étant A_i, l'angle formé par L_i et la demi-droite partant de A_i et passant par A_0 désignons par α et supposons d'abord que $\alpha = \pi$. Alors A_0 se trouvant sur le prolongement de L_i, on a $T \equiv A_i$ et C_0 reste, en embrassant T, dans G_0 (fig. 7, le cas de L_1 et A_1).

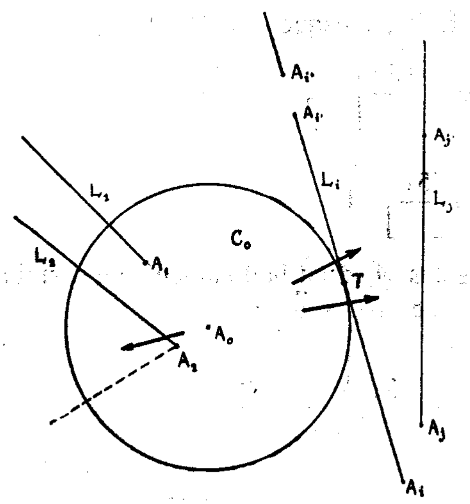

Fig. 7

2. Lorsque $\pi > \alpha \geqslant \pi/2$, on a encore $T \equiv A_i$ et de cet endroit on passe dans un seul feuillet nouveau, ceci ayant lieu de l'un ou de l'autre côté de A_i (fig. 7, le cas de L_2 et A_2; la flèche désignant l'endroit du passage).

3. Lorsque $\alpha < \pi/2$, le point T est différent de A_i. Puisque L_i comprend en général plusieurs segments isolés, soit $A_iA_{i'}$, $A_{i''}A_{i'''}$ etc. (fig. 7), qui constituent la frontière du feuillet envisagé, c. à d. de G_0, il se peut que T soit l'un des points $A_{i'}$, $A_{i''}$, $A_{i'''}$ etc. Alors on a de nouveau les deux cas précédents, c. à d. T est l'endroit d'où l'on passe dans un seul feuillet nouveau.

4. Si $\alpha < \pi/2$, lorsque T est un point intérieur de l'un des arcs $A_i A_{i'}$, $A_{i''} A_{i'''}, \ldots$ on sort de G_0 des deux côtés de T à la fois, mais puisque C_0 croît radialement, on rentre de chaque côté dans un seul feuillet nouveau. Cependant T peut-être un point ordinaire de S ou bien un point de ramification. Dans ce dernier cas on rentre des deux côtés de T dans deux feuillets différents (marqué dans la fig. par deux flèches).

Ainsi, dans tous les cas le domaine C_0 pénètre, après avoir traversé le point T, au plus dans un ou dans deux feuillets nouveaux et qui se limitent avec G_0. Par conséquent, C_0 pénètre là dans une seule génération nouvelle, c. à d. dans la suivante, G_1.

Lorsque ρ croît d'avantage, C_0 peut rentrer en d'autres endroits (fig. 7, ligne L_j) dans des feuillets toujours nouveaux, appartenant aux générations de plus en plus avancées: chaque fois l'ordre maximum des générations prises en considération augmente d'une unité au plus.

Pour obtenir une borne supérieure du nombre des générations auxquelles C_0 arrive ainsi, essayons de trouver le nombre possible des traversements considérés des L_i par C_0 lorsque ce domaine augmente.

En tout cas ce nombre ne surpasse pas le nombre de ces lignes, ou plutôt le nombre des segments de ces lignes, découpés par les points A_i; ou, si l'on veut: le nombre des A_i situés sur les lignes L_i considérées. Puisque le rayon ρ de C_0 croît jusqu'à π, il s'agit là des L_i dont la distance à A_0 n'atteint pas π. Or, la longueur des L_i ne surpasse jamais π, de sorte qu'il s'agit seulement des points A_i dont la distance à C_0 ne surpasse nullement π. Par conséquent tous ces A_i sont éloignés de A_0 moins que 2π. D'après le lemme 3 le nombre de ces points ne surpasse pas

$$N_{2\pi} = \frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p - 1}.$$

Donc, ceci est une borne supérieure pour le nombre des générations de plus en plus élevées, dans lesquelles pénètre C_0 lorsque ρ augmente. Par conséquent, en ajoutant G_0 on peut dire que C_0 pénètre au plus dans $1 + N_{2\pi}$ premières générations $G_0, G_1, G_2, \ldots$

Considérons maintenant un domaine de l'ensemble C_1. Son centre est un point A_i, situé sur la frontière de C_0; donc, dès son origine le domaine considéré appartient à plusieurs feuillets qui s'interchangent autour de A_i, leur nombre étant p au plus. Sauf cette différence, toutes les circonstances sont les mêmes que pour C_0. Donc, nous pouvons immédiatement dire: lorsque ρ augmente à partir d'une certaine valeur ρ jusqu'à $\rho+\pi$, ce domaine croît à partir de A_i et pénètre dans un certain nombre de feuillets et de générations nouvelles; mais le nombre de ces générations est plus petit que le nombre des traversements des lignes L_k, c. à d. il est plus petit que le nombre des points A_k dont la distance au centre A_i est inférieure à 2π. Par conséquent, le domaine considéré pénètre, lui aussi, en croissant au plus dans $N_{2\pi}$ générations nouvelles.

Or, C_1 s'étale dès le début dans $\leqslant p$ feuillets, c. à d. dans $\leqslant [p/2]+1$ générations. Car c'est le nombre maximum des générations autour d'un point de ramification. En effet, soient $F', F'', \ldots, F^{(s)}$ $(s \leqslant p)$ ces feuillets dans leur ordre cyclique; si par ex. $F^{(s)}$ appartient à la génération du plus petit ordre, l'ordre augmenté de l'unité correspond à la fois à F' et à $F^{(s-1)}$, le suivant à F'' et $F^{(s-2)}$ etc. jusqu á $F^{(k)}$ où $k=[s/2]$, d'où résulte l'affirmation précédente. Par conséquent, un domaine quelconque de l'ensemble C_1 pénètre dans moins que

$$1+\left[\frac{p}{2}\right]+N_{2\pi}$$

générations. La même chose a lieu pour chaque domaine de C_k, $k=2, 3, \ldots$

Donc on peut dire: lorsque O_ρ augmente avec ρ, aussi longtemps que O_ρ contient uniquement C_0, il pénètre dans moins que $1+N_{2\pi}$ premières générations; tant que O_ρ se compose seulement de C_0 et des domaines C_1, il pénètre dans moins que $[p/2]+N_{2\pi}$ générations nouvelles, c. à d. en tout dans moins que

$$1+\left[\frac{p}{2}\right]+2N_{2\pi}$$

premières générations; tant que O_ρ se compose de C_0, C_1 et C_2, il pénètre lui-aussi dans moins que $[p/2]+N_{2\pi}$ générations nouvelles, c. à d. en tout dans moins que

$$1+2\left[\frac{p}{2}\right]+3N_{2\pi}$$

premières générations, etc. En général: tant que O_ρ se compose seulement de $C_0, C_1, \ldots, C_k$, il pénètre dans moins que

$$1+k\left[\frac{p}{2}\right]+(k+1)\,N_{2\pi}$$

premières générations. Ainsi donc, nous avons obtenu le

Lemme 4. *Pour recouvrir O_ρ, composé de $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$, les générations $G_0, G_1, \ldots, G_{m_\nu}$, où*

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right]+(\nu+1)N_{2\pi},$$

suffisent.

9. — Lorsque ρ augmente, O_ρ se complique de plus en plus; il se compose des parties que nous avons désignées par C_0, $C_1, \ldots, C_k$; k augmente à l'infini avec ρ. Soit ρ_k la limite inférieure des ρ pour lesquels O_ρ possède C_k; alors C_k existe pour chaque $\rho > \rho_k$.

L' ensemble de domaines C_{k+1} prend origine dans un certain point de ramification A_i lorsque O_ρ arrive en croissant jusqu'à cet A_i ou, plus exactement, lorsque l'un des domaines de l' ensemble C_k arrive avec sa frontière circulaire jusqu' à A_i. Or, ce dernier domaine a pris naissance dans un certain point A_j lorsque ρ avait une valeur moindre, que nous désignerons par ρ_k'. Puisque ce domaine n'est pas nécessairement le premier de l' ensemble C_k, on a $\rho_k \leqslant \rho_k'$. D'autre part la distance entre A_i et A_j est supérieure à ε, de sorte qu'on a

$$\rho_{k+1} - \rho_k' > \varepsilon$$

et à plus forte raison

$$\rho_{k+1} - \rho_k > \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

donc

$$\rho_{k+h} - \rho_k > h\varepsilon, \qquad h, k = 1, 2, \ldots$$

En posant $k=1$, $h=\nu-1$ et puisque $\rho_1>0$, on obtient

$$\rho_\nu > (\nu-1)\varepsilon, \qquad \nu=1,2,\ldots$$

et à plus forte raison

$$\rho_\nu > \nu\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{2}$$

10. — Désignons par $f(\rho)$ le nombre des feuillets F_i ayant des points communs avec le domaine O_ρ et par $g(\rho)$ l'ordre le plus élevé des générations qui ont des points communs avec O_ρ. D'après la définition des nombres $\delta(\nu)$ (voir le n° 2) on a

$$f(\rho) \leqslant \sum_0^{g(\rho)} \mu\,\delta(\mu). \tag{3}$$

Soit $N(\rho)$ le nombre des points de ramification contenus dans O_ρ, c. à d. dont la distance sphérique au pont A_0 situé dans G_0 est plus petite que ρ. Puisque la distance sphérique entre les points de la frontière d'un feuillet et le point $w=a_0$ considéré sur le même feuillet est au plus égale à π, le nombre des points de ramification situés sur la frontière d'un F_k est, d'après le lemme 3, au plus égal à N_π. Donc on a

$$N(\rho) \leqslant N_\pi f(\rho). \tag{4}$$

Enfin, désignons par $n(\rho)$ le nombre des points de ramification contenus dans O_ρ, mais chacun pris autant de fois que son degré de ramification (c. à d. l'ordre diminué d'un) contient d'unités. On a évidemment

$$n(\rho) < pN(\rho). \tag{5}$$

De (3), (4), et (5) résulte

$$n(\rho) < pN_\pi \sum_0^{g(\rho)} \mu\,\delta(\mu). \tag{6}$$

11. — Il a été prouvé ailleurs[7]) que la surface de Riemann dont les points de ramification sont tous algébriques est du

---

[7]) *L. Ahlfors*, Ueber eine Klasse von Riemannschen Flächen (Comm. Soc. Sc. Fenn., 1936); *M. Radojčić*, Uber einen Satz von Herrn Ahlfors (Publ. Math. Univ. Belgrade, 1937).

type parabolique, lorsque l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)}$$

diverge. Puisque la suite des ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, est croissante vers l'infini, c'est équivalent à la divergence de la suite des intégrales

$$J_i = \int_{\rho_1}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

D'après (6) on a

$$J_i > \frac{1}{pN_\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\sum_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu)},$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$J_i > \frac{1}{pN_\pi} \sum_1^{i} {}_{\nu} \int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\sum_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu)}. \tag{7}$$

Considérons l'une quelconque de ces intégrales. Nous y avons $\rho \leqslant \rho_{\nu+1}$. Mais alors (voir le n^0 9) O_ρ se compose des C_k pour lesquels $k \leqslant \nu$. Donc, selon le lemme 4 O_ρ ne pénètre alors que dans les générations G_m où $m < m_\nu$. D'après la définition de $g(\rho)$ il en résulte que $g(\rho) < m_\nu$, donc on a pour chaque intégrale dans (7)

$$\int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\sum_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu)} > \frac{\rho_\nu(\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)}{\sum_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu)},$$

d'où, en appliquant (1) et (2) on obtient

$$J_i > \frac{1}{pN_\pi} \sum_1^{i} {}_{\nu} \frac{\rho_\nu(\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)}{\sum_0^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)} > \frac{\varepsilon^2}{2pN_\pi} \sum_1^{i} {}_{\nu} \frac{\nu}{\sum_0^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)}.$$

Par conséquent, *lorsque la série*

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\nu}{\sum_{0}^{m_\nu}{}^{\mu}\, \delta(\mu)},$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right] + (\nu+1)\, N_{2\pi},$$

diverge, la suite des intégrales J_i diverge d'autant plus et d'après le théorème mentionné *le type de S est parabolique*. C'est ce qu'il fallait démontrer.

12. — Ajoutons quelques conséquences immédiates de la proposition I. A la place des m_ν on peut choisir n' importe quelle suite de nombres supérieurs à m_ν. Ainsi, en posant

$$m = \left[\frac{p}{2}\right] + \frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}$$

on a

$$m_\nu < (\nu+1)\, m,$$

et par conséquent

$$\sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m_\nu)} >$$

$$> \sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta[(\nu+1)m]} =$$

$$= \sum_{2}^{\lambda+1}{}^{\nu} \frac{\nu-1}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(\nu m)} >$$

$$> \frac{1}{2}\sum_{2}^{\lambda+1}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m\nu)},$$

donc la

Proposition II. *Si la série*

$$\sum^{\infty}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m\nu)}, \qquad (10)$$

où m a la valeur (9) *di erge, la surface de Riemann S est du type parabolique.*

Les termes des séries (8) ou (10) sont, à des facteurs bornés près, les valeurs réciproques des moyennes arithmétiques

$$M_h{}^k[\delta(\mu)] = \frac{\delta(h) + \delta(h+1) + \cdots + \delta(k)}{k - h + 1}.$$

En effet,

$$\frac{\delta(0) + \delta(1) + \cdots + \delta(m_\nu)}{\nu} = \frac{m_\nu + 1}{\nu} M_0^{m_\nu}[\delta(\mu)],$$

et

$$\frac{m_\nu + 1}{\nu} < \frac{(\nu+1)m + 1}{\nu} < 2m + 1.$$

Donc on peut écrire, au lieu de (8) et (10), les expressions

$$\sum^\infty {}^\nu \frac{1}{M_0{}^{m_\nu}[\delta(\mu)]} \quad \text{et} \quad \sum^\infty {}^\nu \frac{1}{M_0{}^{m\nu}[\delta(\mu)]}.$$

La dernière nous conduit à l'énoncé de la

P r o p o s i t i o n III. *Lorsque la série des valeurs réciproques de chaque m-ième moyenne arithmétique des nombres $\delta(\mu)$ diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.*

Remarquons qu'au lieu de $h = 0$ on peut prendre h quelconque, mais constant.

Le critère contenu dans la proposition III se simplifie lorsqu'on peut supposer que la suite des $\delta(\mu)$ est monotone non-décroissante, car alors

$$M_h{}^k[\delta(\mu)] \leqslant \delta(k)$$

et par suite

$$\sum_1^\lambda {}^\nu \frac{1}{M_h{}^{m_\nu}[\delta(\mu)]} \geqslant \sum_1^\lambda {}^\nu \frac{1}{\delta(m_\nu)},$$

donc on a la

P r o p o s i t i o n IV. *La suite des nombres $\delta(\mu)$ des feuillets contenus dans la μ-ième génération étant monotone* *non-décroissante, lorsque la série*

$$\sum^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\delta(m_\nu)}$$

diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.

Evidemment, au lieu de m_ν on peut écrire $m\nu$. Puisqu'alors

$$\frac{1}{\delta(m\nu)} > \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\delta(m\nu)} + \frac{1}{\delta(m\nu+1)} + \cdots + \frac{1}{\delta[(m+1)\nu-1]}\right), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

on a

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{1}{\delta(m\nu)} > \frac{1}{m} \sum_{m}^{\lambda'}{}_{\nu} \frac{1}{\delta(\nu)},$$

où $\lambda' = (m+1)\lambda - 1$; donc on a la

Proposition V. *Lorsque, la suite des $\delta(\nu)$ étant non-décroissante, la série des valeurs réciproques des $\delta(\nu)$ diverge, la surface de Riemann est du type parabolique.*

13. — Il faut pourtant remarquer qu'en général ces critères topologiques n'auront pas la même portée, que le critère sous forme d'intégrale, sur lequel ils sont basés. Ainsi, considérons les fonctions elliptiques. Si la division d'un parallélogramme de périodicité en domaines d'univalence (qui correspondent aux feuillets) est connue, les nombres $\delta(k)$ se déterminent immédiatement. Mais il suffit de trouver au lieu des valeurs exactes une majoration convenable des sommes

$$\sum_{0}^{m\nu}{}_{\mu} \delta(\mu).$$

Une telle somme, valable pour toutes les fonctions elliptiques, résulte de ce que chaque parallélogramme de périodicité correspond à un nombre fixe q de feuillets: la fonction y est q-valente.

Considérons, ce qui est plus commode, au lieu des générations de feuillets de la fonction inverse d'une fonction elliptique, les ensembles correspondants des domaines d'univalence et désignons maintenant ces ensembles par G_ν; les nombres $\delta(\nu)$ restent, évidemment, les mêmes. Envisageons les groupements analogues des parallélogrammes de périodicité et désignons-les par $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (fig. 8). Supposons que Γ_0 soit le parallélogramme qui contient G_0. On a

$$G_0 + G_2 + \ldots + G_q \supset \Gamma_0,$$

$$G_0 + G_1 + \ldots + G_{2q} \supset \Gamma_0 + \Gamma_1,$$

et c., en général

$$\sum_0^{(\nu+1)q} G_k \supset \sum_0^{\nu} \Gamma_k, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

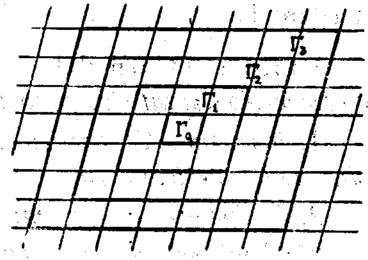

Fig. 8

conséquence immédiate de la définition de G_k et Γ_k.

Or, les nombres des feuillets contenus dans les deux membres de la relation précédente sont respectivement

$$\sum_0^{(\nu+1)q} \delta(k) \quad \text{et} \quad q(2\nu+1)^2,$$

car $(2\nu+1)^2$ est le nombre des parallélogrammes de périodicité contenus dans le parallélogramme $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_\nu$. Donc

$$\sum_0^{(\nu+1)q} \delta(k) > q(2\nu+1)^2.$$

Par conséquent la série

$$\sum_\nu^\infty \frac{2}{q(2m\nu+1)^2} \tag{11}$$

est ici une majorante de la série (10). Or la série (11) est convergente, donc la série (10) l'est également, par conséquent la proposition II ne s'applique pas.

14. — Les considérations incluses dans la démonstration de la proposition I se simplifient notablement lorsqu'on modifie la condition 3 dans la définition des surfaces S, en exigeant que le nombre des points de ramification dont la distance d'un point quelconque de la surface de Riemann, mesurée sur celle-ci, reste au-dessous d'une limite fixe, soit borné. Démontrons à cet égard la

Proposition VI. *Soit T une surface de Riemann ouverte et jouissant des propriétés suivantes:*

1. *les points de ramification de T sont tous algébriques d'ordre non supérieur à p;*

2. *le nombre des points de ramification dont la distance d'un point quelconque de T, mesurée sur T en mesures sphériques (sphère de Riemann), est au plus égale à 2π, ne surpasse pas le nombre entier N.*

Lorsque la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} \frac{\nu}{\sum_{0}^{\nu m} \mu\, \delta(\mu)} \tag{12}$$

où

$$m = N + N\left[\frac{p}{2}\right]$$

diverge, la surface T est du type parabolique.

Retenons les notations. L'ordre le plus élevé des générations nécessaires pour recouvrir le domaine O_ρ étant $g(\rho)$, cherchons une borne supérieure de $g(\rho)$ quand $\rho = \nu\pi$, $\nu = 1, 2 \ldots$

Supposons d'abord que ρ augmente de 0 a π. Alors $\nu = 1$ et il s'agira de O_π, c. à d. du domaine de T dont les points sont à une distance à A_0, inférieure à π. Les feuillets F_k dans lesquels rentre le domaine O_π s'interchangent autour des points de ramification qui sont: ou bien contenus dans O_π, ou bien situés à une distance à O_π, ne depassant pas la longueur possible d'une partie rectiligne de la frontière d'un feuillet c. a d. π. Il s'agit donc des points de ramification dont la distance à A_0 est sûrement inférieure à 2π. D'après la condition 2 de notre proposition leur nombre ne surpasse pas N.

Or, autour de chaque point de ramification s'interchangent p feuillets au plus. Ceux-ci appartiennent, comme nous l'avons vu (n^0 8), au plus à $1 + [p/2]$ générations successives. Donc, le nombre des générations successives qui, à partir de G_0, rentrent en jeu en ce qui concerne O_π, ne surpasse absolument pas $N+N[p/2]$, c. à d. on a

$$g(\pi) \leqslant N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right).$$

Continuons à étendre O_ρ en laissant ρ augmenter de π à 2π. Le domaine $O_{2\pi}-O_\pi$ est contenu dans l'ensemble des domaines de la même espèce que O_π, mais dont les points de départ sont les différents points de la frontière de O_π. Comme nous venons de voir, dans chacun de ces domaines l'ordre des générations ne peut augmenter de plus que de $N+N[p/2]$, par conséquent l'ordre des générations auxquelles appartienent les points de $O_{2\pi}$ ne surpasse pas le double de ce nombre, c. à d. on a

$$g(2\pi) \leqslant 2N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right).$$

En continuant ainsi, nous obtenons la relation générale suivante:

$$g(\nu\pi) \leqslant \nu m \qquad \text{où} \qquad m=N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right). \tag{13}$$

Ceci étant, reprenons les considérations des n^0 9—11. Le nombre des points de ramification situés sur la frontière d'un feuillet est, en vertu de la condition 2, au plus égal à N; donc on peut poser dans (4) et dans les relations suivantes N à la place de N_π. Choisissons comme limites des intégrales considérées $\nu\pi$ au lieu de ρ_ν. Nous avons alors

$$J_i > \frac{1}{pN}\sum_1^i{}^{\nu} \int\limits_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{\rho\, d\rho}{\sum\limits_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu)}.$$

D'après (13) on a $g(\rho) \leqslant (\nu+1)m$ dans l'intervalle $[\nu\pi, (\nu+1)\pi]$ et par conséquent

$$J_i > \frac{\pi^2}{pN}\sum_1^i{}^{\nu} \frac{2\nu+1}{\sum\limits_0^{(\nu+1)n} \mu\, \delta(\mu)} > \frac{\pi^2}{pN}\sum_2^{i+1} \frac{\nu}{\sum\limits_0^{m\nu} \mu\, \delta(\mu)}.$$

Donc, la série (12) étant divergente, la suite des intégrales J_i l'est aussi, d'où resulte la proposition VI.

15. — Il ne serait pas, peut-être, sans intérêt à étendre nos considérations aux surfaces de Riemann plus générales. Faisons donc quelques ramarques à ce propos. Des extensions sont possibles sans difficultés. Nous montrerons comment on peut supprimer la condition, que l'ordre des points de ramification soit borné, tout en gardant les deux autres. Donc il s'agira simplement des surfaces U de Riemann dont tous les points de ramification sont algébriques, la distance sphérique entre ces points, mesurée sur U, étant au-dessus d'une borne positive ε.

Sauf les cas que l'on signalera explicitement, nous retiendrons les mêmes notions et notations.

Soit donc G_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ la suite des générations de feuillets. Désignons par p_μ l'ordre maximum des points de ramification situés sur les frontières des feuillets dont se composent les générations $G_0, G_1, \ldots, G_\mu$. La suite des p_μ, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ est non-décroissante; lorsqu'elle est bornée on a les surfaces S.

Puisque $g(\rho)$ est l'ordre maximum des générations qui ont des points communs avec O_ρ, l'ordre des points de ramification dans O_ρ a comme borne supérieure $p_{g(\rho)}$. Donc

$$n(\rho) < p_{g(\rho)} N(\rho).$$

On a de même dans O_ρ au lieu de N_π le nombre $N_\pi(\rho)$ où

$$N_\lambda(\rho) = \frac{(6p_{g(\rho)})^{\left[\frac{5\lambda}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p_{g(\rho)} - 1}$$

et d'autre part

$$N(\rho) \leqslant N_\pi(\rho) \cdot f(\rho),$$

d'où

$$n(\rho) < p_{g(\rho)} N_\pi(\rho) \sum_0^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu). \tag{14}$$

Passons aux intégrales.

$$J_i = \int_{\rho_1}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)} > \sum_1^i {}_\nu \frac{1}{n\rho_{\nu+1}} \int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \rho\, d\rho > \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_1^i {}_\nu \frac{\nu}{n(\rho_{\nu+1})}. \tag{15}$$

Mais lorsque $\rho \leqslant \rho_{\nu+1}$, les C_k existent pour $k \leqslant \nu$ et pénètrent seulement dans les générations G_μ où $\mu < m_\nu$, c. à d. on a $g(\rho) < m_\nu$, donc

$$p_{g(\rho_{\nu+1})} \leqslant p_{m_\nu}, \tag{16}$$

d' où

$$N_\lambda(\rho_{\nu+1}) \leqslant \frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\lambda}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1}. \tag{17}$$

Donc on a de (14), (16) et (17)

$$n(\rho_{\nu+1}) < p_{m_\nu} \frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1} \sum_0^{m_\nu} {}_\mu\, \delta(\mu) \tag{18}$$

et d' après (15)

$$J_i > \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_1^i {}_\nu \frac{\nu(6\,p_{m_\nu} - 1)}{p_{m_\nu}\left\{(6p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1\right\} \sum_0^{m_\nu} {}_\mu\, \delta(\mu)} \tag{19}$$

Par conséquent on peut énoncer la

Proposition VII. *Lorsque la série*

$$\sum^\infty {}_\nu \frac{\nu(6\,p_{m_\nu} - 1)}{p_{m_\nu}\left\{(6p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1\right\} \sum_0^{m_\nu} {}_\mu\, \delta(\mu)} \tag{20}$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p_{m_\nu}}{2}\right] + (\nu+1)\, \frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1} \tag{21}$$

diverge, la surface U est du type parabolique.

Puisque

$$p\frac{p^s - 1}{p - 1} < s\,p^{s-1},$$

on peut substituer à la place de (20) la série

$$\sum^{\infty} \nu \frac{\nu}{p_{m_\nu}^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} \sum\limits_{0}^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)}.$$

Mais l'intérêt qu'on pourrait avoir à considérer la proposition VII nous semble être d'autant moindre que l'équation fonctionnelle (19), d'où il faudrait calculer la suite des nombres m_ν, ne se prête pas à un calcul direct.

Des considérations semblables nous donneraient un critère analogue en ce qui concerne les surfaces de Riemann pour lesquelles une borne ε imposée à la distance entre les points de ramification n'existerait pas, mais pour lesquelles subsisterait la borne p. Au lieu de (18) il serait question alors de la divergence de

$$\sum^{\infty} \nu \frac{\nu\, \varepsilon_{m_\nu}^{2}}{(6p)^{d_\nu} \sum\limits_{0}^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)}$$

où une suite de nobres ε_ν tendant vers zéro, viendrait à la place de ε et où

$$d_\nu = \left[\frac{5\pi}{\varepsilon_{m_\nu}}\right].$$

On pourrait de même supposer à la fois $p_\nu \to \infty$ et $\varepsilon_\nu \to 0$, mais ces considérations ne nous semblent pas avoir un intérêt suffisant pour être traitées ici.