SUR LA MEILLEURE LIMITE DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION ASSUJETTIE À DES CONDITIONS SUPPLÉMENTAIRES

Par

V. G. AVAKUMOVIĆ et S. ALJANČIĆ

1. Cette note se rapporte à la proposition suivante due à Landau [1]:

Lorsque

$$|\varphi''(x)| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

et

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

alors

$$|\varphi'(x)| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2}$$

Dans cette dernière inégalité la constante 1 *ne peut être améliorée.*

Cette proposition peut être obtenue géometriquement d'une manière très simple, et, en outre, être généralisée de la manière suivante (théorèmes 1 et 2).

Théorème 1. *Lorsque*

$$|\varphi''(x)| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

alors

$$|\varphi'(x) - \varphi(1) + \varphi(0)| \leqslant \frac{1}{2} - x + x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

Le polynome en x qui figure dans cette inégalité ne peut être amélioré.

En effet (v. f. 1), soit M un point de la courbe $y = \varphi'(x)$; du fait que $|\varphi''(x)| \leqslant 1$, cette courbe est entièrement située à l'intérieur des angles PMR et SMQ, dont les côtés coupent l'axe des x sous un angle 45^0. Il en résulte la double inégalité

$$\left.\begin{array}{r} x-h+\varphi'(h) \\ -x+h+\varphi'(h) \end{array}\right\} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \left\{\begin{array}{ll} -x+h+\varphi'(h), & 0 \leqslant x \leqslant h \\ x-h+\varphi'(h), & h \leqslant x \leqslant 1, \end{array}\right.$$

qui, intégrée entre 0 et 1, donne l'affirmation (3).

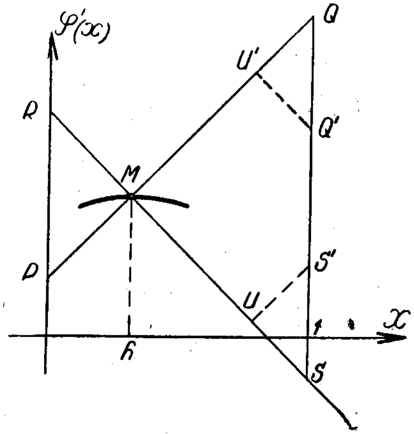

Fig. 1

Que la limite dans l'inégalité (3) est effectivement atteinte pour $x=h$ résulte de l'exemple suivant:

$$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x^2+(1-2h+h^2)x-\frac{1}{4}, & 0 \leqslant x \leqslant h \\ -\frac{1}{2}x^2+(1+h^2)x-h^2-\frac{1}{4}, & h \leqslant x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

La proposition de Landau est bien contenue dans le théorème 1, puisque, de (3), l'on déduit que

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}-x+x^2 \geqslant |\varphi'(x)-\varphi(1)+\varphi(0)| \geqslant |\varphi'(x)|-|\varphi(0)|-|\varphi(1)|,$$

pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, c'est-à-dire,

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}+|\varphi(0)|+|\varphi(1)|,$$

qui se réduit à l'inégalité (2) lorsque la condition (1) est satisfaite.

Dans le même ordre d'idées l'on peut obtenir le théorème suivant par des considérations semblables, en remplaçant, à cause de la condition supplémentaire $\varphi'(0)=\varphi'(1)$, la ligne polygonale PMS de la fig. 1 par la ligne $PMUS'$.

Théorème 2. *Lorsque*

$$|\varphi''(x)|\leqslant 1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

et

$$\varphi'(0)=\varphi'(1)$$

alors

$$|\varphi'(x)-\varphi(1)+\varphi(0)|\leqslant\frac{1}{4}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{4}$$

La constante $\frac{1}{4}$ *ne peut être améliorée.*

Que la limite dans l'inégalite (4) est effectivement atteinte pour $x=\alpha+\frac{1}{4}$ et $x=\alpha+\frac{3}{4}$ résulte de l'exemple suivant:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-\alpha)^2-\frac{1}{32}, & 0\leqslant x\leqslant\alpha+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}(x-\alpha)^2+\frac{1}{2}(x-\alpha)-\frac{3}{32}, & \alpha+\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\alpha+\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(x-\alpha)^2-(x-\alpha)+\frac{15}{32}, & \alpha+\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

En particulier, on voit de ce théorème que, les conditions de la proposition de Landau étant remplies, la constante 1 dans l'inégalité (2) peut se réduire à 3/4, lorsque, en outre, $\varphi'(x)$ est assujettie à la condition $\varphi'(0)=\varphi'(1)$.

Enfin, lorsqu'on assujetti la fonction $\varphi(x)$ à la condition $\varphi(0)=\varphi(1)$, l'on déduit de ces théorèmes que

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{2}-x+x^2, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

lorsque $\varphi'(0)\neq\varphi'(1)$, et que

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{4}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

lorsque $\varphi'(0)=\varphi'(1)$.

2. Désignons par $B_n(x)$ et $b_n(x)$ les polynomes, respectivement les fonctions de Bernoulli et par B_n et E_n les nombres de Bernoulli respectivement d'Euler.

On peut obtenir une généralisation naturelle des théorèmes 1 et 2 se rapportant aux dérivées d'ordres supérieures, à savoir:

Théorème 3. *Lorsque*

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| \leqslant \mu_{n+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

alors

$$\left| \varphi'(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\varphi^{(\nu)}(1) - \varphi^{(\nu)}(0)\} B_\nu(x) \right| \leqslant \mu_{n+1} \int_0^1 |B_n(x) - b_n(x-t)|\, dt,$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Dans cette dernière inégalité l'expression au second membre qui est un polynome en x, ne peut être améliorée.

Théorème 4. *Lorsque*

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| \leqslant \mu_{n+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

et

$$\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1),$$

alors

$$\left| \varphi'(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \{\varphi^{(\nu)}(1) - \varphi^{(\nu)}(0)\} B_\nu(x) \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{|E_n|}{n!\,4^n}\, \mu_{n+1}, & n = 2m \\[2ex] \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}} \dfrac{|B_{n+1}|}{(n+1)!}\, \mu_{n+1}, & n = 2m+1, \end{cases} \tag{5}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Dans cette dernière inégalité les constantes qui figurent au second membre ne peuvent être améliorées.

Il est évident que pour $n=1$ ces deux théorèmes se réduisent aux théorèmes 1 et 2.

Ces théorèmes sont une conséquence immédiate d'une formule sommatoire de Nörlund [3], qui, par une transformation légère, devient:

$$\varphi'(x)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\{\varphi^{(\nu)}(1)-\varphi^{\nu}{}_{(o)}\}B_\nu(x)=$$

$$=\int_0^1\{B_n(x)-b_n(x-t)\}\,\varphi^{(n+1)}(t)dt. \qquad (6)$$

Supposons que

$$|\varphi^{(n+1)}(x)|\leqslant \mu_{n+1}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

et posons

$$J=\int_0^1\{B_n(x)-b_n(x-t)\}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,dt;$$

alors on obtient, en majorant, l'intégrale J dans (6), que

$$|J|\leqslant \mu_{n+1}\int_0^1|B_n(x)-b_n(x-t)|dt, \qquad (7)$$

c'est ce qui démontre le théorème 3.

D'autre part, en supposant en outre que $\varphi^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(1)$ l'on obtient comme borne supérieure de l'intégrale J la valeur plus précise (5).

Pour le démontrer remarquons d'abord que, à cause de la condition supplémentaire $\varphi^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(1)$, l'intégrale J se réduit à

$$-\int_0^1 b_n(x-t)\,\varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que n est paire ou impaire.

1°. $n=2m+1$

$$|J|\leqslant \mu_{2m+2}\int_0^1|b_{2m+1}(x-t)|\,dt=$$

$$\leqslant \mu_{2m+2}\int_0^1|B_{2m+1}(t)|\,dt=$$

$$\leqslant 2\,\mu_{2m+2}\left|B_{2m+2}(0)-B_{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=$$

$$\leqslant\frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m}}\,\frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)!}\,\mu_{2m+2}\,.$$

2°. $n=2m$. En tenant compte de la condition $\varphi^{(n)}(0)=$ $=\varphi^{(n)}(1)$ on a

$$|J|=\left|\int_0^1\left\{b_{2m}(x-t)-b_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt\right|=$$

$$\leqslant \mu_{2m+1}\int_0^1\left|b_{2m}(x-t)-b_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)\right|dt=$$

$$\leqslant \mu_{2m+1}\int_0^1\left|B_{2m}(t)-B_{2m}\left(\frac{1}{4}\right)\right|dt=$$

$$\leqslant 2\,\mu_{2m+1}\left|B'_{2m+1}\left(\frac{1}{4}\right)-B_{2m+1}\left(\frac{3}{4}\right)\right|=$$

$$\leqslant \frac{|E_n|}{(2m)!\,4^{2m}}\,\mu_{2m+1}\,.$$

Pour reconnaître que les limites qui donnent les théorèmes 3 et 4 sont les meilleures possibles, il suffit de prendre dans le cas du théorème 3 pour $\varphi(t)$ la fonction qui satisfait aux conditions

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\begin{cases}+1 & \text{si} \quad B_n(\alpha)-b_n(\alpha-t)>0\,,\\ -1 & \text{si} \quad B_n(\alpha)-b_n(\alpha-t)<0\,.\end{cases}$$

Alors, pour $x=\alpha$, le signe $=$ est effectivement atteint dans le théorème 3.

De même, dans le théorème 4 il suffit de poser

pour $n=2m+1$:

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\begin{cases}+1 & \text{si} \quad b_n(\alpha-t)>0\,,\\ -1 & \text{si} \quad b_n(\alpha-t)<0\,,\end{cases}$$

pour $n=2m$:

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\begin{cases}+1 & \text{si} \quad b_n(\alpha-t)-b_n\left(\frac{1}{4}\right)>0\,,\\ -1 & \text{si} \quad b_n(\alpha-t)-b_n\left(\frac{1}{4}\right)<0\,.\end{cases}$$

Quant à la condition $\varphi^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(1)$ du théorème 4, elle est alors une conséquence immédiate de la répartition des zéros des fonctions

$$b_n(x) \quad \text{et} \quad b_n(x)-b_n\left(\frac{1}{4}\right).$$

Alors, pour $x=\alpha$ le signe $=$ est effectivement atteint dans le théorème 4.

3. Remarquons qu'on peut obtenir l'identité (6) d'une manière facile en se servant des suites d'intégrales successives que nous avons appelées [2] „intégrales harmoniques" et qui sont définies comme suit.

Soit $H_o(t)$ une fonction intégrable. Nous appellerons, par définition, la suite des fonctions

$$H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x), \ldots$$

une suite d'intégrales harmoniques de la fonction $H_o(x)$ par rapport à l'intervalle $(0,1)$, si les fonctions $H_\nu(x)$ satisfont aux conditions

$$H'_\nu(x)=H_{\nu-1}(x), \quad \nu=1,2,\ldots$$
$$H_\nu(0)=H_\nu(1), \quad \nu=1,2,\ldots$$

Etant donné que l'intégrale harmonique d'une fonction $H_n(x)$ peut être mise sous l'une des deux formes:

$$H_n(x)=\int_0^1 \{B_n(x)-b_n(x-t)\}\,H_o(t)\,dt,$$

$$H_n(x)=G_n(x)-\sum_{\nu=2}^{n+1}\{G_\nu(1)-G_\nu(o)\}\,B_{n-\nu+1}(x)$$

où $G_n(x)$ est une intégrale n-ième quelconque de $G_o(x)=H_o(x)$, on a l'identité

$$G_n(x)-\sum_{\nu=2}^{n+1}\{G_\nu(1)-G_\nu(o)\}\,B_{n-\nu+1}(x)=$$
$$=\int_0^1 \{B_n(x)-b_n(x-t)\}\,H_o(t).dt.$$

En y posant

$$G_{n+1}(x) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad G_\nu(x) = \varphi^{(n-\nu+1)}(x), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

on en déduit l'identité (6).

L'identité (6) est une généralisation de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

En effet, en posant

$$\varphi'(x) = f(x)$$

l'identité (6) devient

$$f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{\nu=0}^{n-1} \{f^{(\nu)}(1) - f^{(\nu)}(o)\} B_{\nu+1}(x) - \int_0^1 b_n(x-t) f^{(n)}(t)\,dt.$$

En y remplaçant successivement $f(x)$ par $f(x+\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ et en ajoutant les égalités ainsi obtenues, l'on obtient

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} f(x+\mu) = \int_0^m f(x)\,dx + \sum_{\nu=0}^{n-1} \{f^{(\nu)}(m) - f^{(\nu)}(o)\} B_{\nu+1}(x) - \int_0^m b_n(x-t) f^{(n)}(t)\,dt$$

formule qui, pour $x=1$ (ou $x=0$), se réduit à la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

[1] Landau E. — Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen, Proc. of the London Math. Society. Ser. 2, Vol. 13, Part 1, p. 43—49 (1939).

[2] Aljančić S. — Sur une formule sommatoire généralisée, Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences 2, p. 263—269 (1948).

[3] Nörlund N. E. — Sur la „somme" d'une fonction, Mémorial des sciences math., l'Acad. des sciences de Paris, Fasc. XXIV, p. 6 (1927).