SUR LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Par

R. BOJANIĆ

1. Soit $F(t)$ une fonction qui admet une dérivée déterminée pour toutes les valeurs de t de l'intervalle (a, b); pour chaque x et y de cet intervalle, il existe au moins un ξ entre x et y tel que la formule des accroissements finis

$$F(y) - F(x) = (y-x) F'(\xi) \tag{1}$$

soit valable.

En supposant que la dérivée $F'(t)$ soit monotone dans cet intervalle, (c. à. d. que la fonction $F(t)$ soit convexe), la fonction $\xi = \xi(x, y)$ est par la formule (1) univoquement déterminée. D'autre part, si l'on donne une fonction de deux variables x et y il n'en résulte pas nécessairement l'existence d'une fonction $F(t)$ satisfaisant la formule des accroissements finis avec la fonction donnée. Nous désignerons simplement par „fonction ξ" toute fonction de deux variables x et y à laquelle correspond une fonction $F(t)$ telle que la relation (1) soit satisfaite pour ce couple de fonctions.

R. Rothe[1] a examiné les conditions que doit satisfaire une fonction de deux variables pour qu'elle soit une „fonction ξ". Il a montré que toute „fonction ξ" doit être l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre

$$p \frac{\partial \zeta}{\partial y} - q \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \,,$$

où

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \qquad s = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

---

[1]) *R. Rothe*, Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung. Mat. Zeit. **9**, p. 315, (1921).

et

$$\zeta = \frac{s}{pq} + \frac{p - q}{(y - x)\, pq}.$$

Inversement, toute solution de cette équation aux dérivées partielles n'est pas nécessairement une „fonction ξ". Pour vérifier si une fonction de deux variables qui satisfait à l'équation (2) est une „fonction ξ", *Rothe* a donné le procédé suivant: Lorsqu'une fonction de deux variables $\xi = \xi(x, y)$ satisfait à l'équation (2), l'expression

$$\frac{s}{pq} + \frac{p - q}{(y - x)\, pq}$$

est une fonction déterminée de ξ seul, à savoir $\zeta = \zeta(\xi)$. L'équation

$$\frac{F'''(t)}{F''(t)} = -\zeta(t)$$

détermine alors l'unique fonction $F(t)$, à trois constantes près, qui, associée à la fonction donnée, peut satisfaire à la formule des accroissements finis. Dans le cas où la formule des accroissements finis n'est pas satisfaite pour ce couple de fonctions, la fonction donnée n'est pas une „fonction ξ".

Nous allons montrer ici que toute fonction donnée de deux variables x et y qui satisfait à l'équation (2) est une „fonction ξ" lorsqu'elle est symétrique en x et y et lorsqu'elle est une moyenne entre x et y. Plus précisément, le théorème que nous allons démontrer est le suivant:

Théorème: *Soit $\xi(x, y)$ defini dans la région*

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$a \leqslant y \leqslant b;$$

supposons que ses dérivées partielles

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = s,$$

existent, et que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

pour tout x et y de cette région.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction $F(t)$, telle que la formule des accroissements finis

$$F(y)-F(x)=(y-x)F'(\xi)$$

soit valable, sont:

1⁰ *que* $\xi(x,y)$ *soit symétrique en* x *et* y, *c. à d.*

$$\xi(x,y)=\xi(y,x);$$

2⁰ $$\xi(x,x)=x^{1)};$$

3⁰ *que l'expression*

$$\zeta=\frac{s}{pq}+\frac{p-q}{(y-x)pq}, \quad y\neq x,$$

soit une fonction de ξ *seul, à savoir que* $\zeta=\zeta(\xi)$.

Nous avons formulé la condition (2) de *Rothe* sous la forme 3⁰ pour plus de simplicité et dans le but de faciliter son application.

En appliquant ce théorème aux moyennes symétriques de la forme

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2},$$

nous montrerons au § 3. que la fonction $\xi=f(x,y)$ ainsi définie ne peut être une „fonction ξ" que dans le cas où

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{At^2+Bt+C}},$$

A, B, et C étant des constantes arbitraires.

2. Pour démontrer le théorème mentionné, remarquons d'abord que la nécessité des conditions 1⁰ et 2⁰ est une conséquence immédiate de la formule des accroissements finis.

1) Remarquons que des conditions

$$\xi(x,x)=x \quad \text{et} \quad \frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0$$

il résulte

$$x\leqslant\xi(x,y)\leqslant y.$$

Quant à la troisième condition, elle s'obtient en dérivant la formule (1) par rapport à x et y. On en déduit, en effet, que

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{(y-x)\,F'(\xi)\}=0,$$

c. à. d. que

$$\frac{s}{p\,q}+\frac{p-q}{(y-x)\,pq}=-\frac{F'''(\xi)}{F''(\xi)}.$$

Par conséquent, la condition 3° est nécessaire.

Pour montrer que ces conditions sont suffisantes, remarquons que la fonction $\xi=\xi(x,y)$ satisfaisant à la condition 3° est l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{s}{p\,q}+\frac{p-q}{(y-x)\,p\,q}=\zeta(\xi). \tag{3}$$

En écrivant la fonction $\zeta(\xi)$ sous la forme

$$\zeta(\xi)=-\frac{\psi'''(\xi)}{\psi''(\xi)}, \tag{4}$$

l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{(y-x)\,\psi'(\xi)\}=0.$$

L'on en déduit immédiatement que

$$\psi'(\xi)=\frac{\Phi(y)+\Psi(x)}{y-x},\quad y\neq x, \tag{5}$$

où $\Phi(y)$ et $\Psi(x)$ sont des fonctions arbitraires, la fonction $\psi'(t)$ étant, d'après (4), donné par

$$\psi'(t)=\int_{\alpha}^{t} e^{-\int_{\beta}^{v}\zeta(w)\,dw}\,dv, \tag{6}$$

α et β étant des constantes arbitraires situées entre a et b.

D'après 1°, la fonction $\xi(x,y)$, est symétrique en x et y. Par suite, d'après (5), l'expression

$$\frac{\Phi(y)+\Psi(x)}{y-x}$$

doit être de même symétrique en x et y. Donc

$$\frac{\Phi(y)+\Psi(x)}{y-x}=\frac{\Phi(x)+\Psi(y)}{x-y},$$

c. à. d.

$$\Phi(y)+\Psi(y)=-\{\Phi(x)+\Psi(x)\}\cdot$$

Par conséquent

$$\Phi(t)+\Psi(t)=0.$$

Il s'ensuit que

$$\Psi(x)=-\Phi(x),$$

et la formule (5) devient

$$\psi'(\xi)=\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x}. \tag{7}$$

Enfin, en faisant $y\to x$, d'après 2°, $\xi\to x$ de même, et la formule (7) se réduit à

$$\psi'(x)=\Phi'(x).$$

Par conséquent, la formule (7) devient

$$\psi'(\xi)=\frac{\psi(y)-\psi(x)}{y-x},$$

ce qui démontre le théorème. — On en conclut, en outre, que les hypothèses de ce théorème étant remplies, la fonction $\xi(x,y)$ satisfera la formule des accroissements finis (1), pour toute fonction $F=\psi+\text{const.}$ définie par (6).

Remarque. Ajoutons encore une remarque due à *K. Orlow*, d'après laquelle on peut, dans certains cas, se passer de la condition 3°, c'est-à-dire de l'équation (2) aux dérivées partielles du troisième ordre de *Rothe*, en la remplaçant par la condition suivante. En dérivant la formule (1) par rapport à x, on en déduit

$$(x-y)\,\xi'_x(x,y)=\frac{F'(x)-F'(\xi)}{F''(\xi)}$$

Étant donné que le second membre est une expression de la forme

$$\frac{g(x)-g(\xi)}{g'(\xi)},$$

où ne figurent explicitement que x et ξ, la condition mentionnée peut être formulée comme suit. En résolvant $\xi(x, y)=\xi$ par rapport à y, c. à d. en exprimant y en fonction de x et ξ, puis en introduisant cette valeur de y dans

$$(x-y)\,\xi_x'(x, y)$$

il faut que l'expression ainsi obtenue, qui ne contient que x et ξ, prenne la forme mentionnée plus haut.

3. Pour faire l'application du théorème obtenu, proposons nous de trouver la forme la plus générale de la fonction monotone $\varphi(t)$, afin que la moyenne symétrique $\xi=f(x, y)$ définie par

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \tag{8}$$

soit une „fonction ξ", en supposant, en outre, que les deux premières dérivées de la fonction $\varphi(t)$ existent.

A cet effet dérivons la relation (8) par rapport à x et y. L'on en déduit

$$\varphi'(\xi)\,p=\frac{\varphi'(x)}{2}, \quad \varphi'(\xi)\,q=\frac{\varphi'(y)}{2},$$

$$\varphi'(\xi)\,s+\varphi''(\xi)\,pq=0,$$

et en introduisant ces valeurs dans l'expression

$$\frac{s}{pq}+\frac{p-q}{(y-x)pq},$$

l'on obtient

$$\frac{s}{pq}+\frac{p-q}{(y-x)\,pq}=-\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}+2\varphi'(\xi)\,\frac{\dfrac{1}{\varphi'(y)}-\dfrac{1}{\varphi'(x)}}{y-x}.$$

Vu que, d'après la condition 3°, cette expression doit être une fonction de ξ seul, pour que cela ait lieu il suffit que l'expression

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi'(y)}-\dfrac{1}{\varphi'(x)}}{y-x}$$

le soit. En y posant

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{\omega(t)}}, \tag{9}$$

cette expression devient

$$\eta(x,y)=\frac{\sqrt{\omega(y)}-\sqrt{\omega(x)}}{y-x},$$

et en annulant le jacobien

$$\frac{\partial(\eta,\xi)}{\partial(x,y)}$$

on obtient l'équation fonctionnelle pour $\omega(t)$

$$\frac{\omega(y)-\omega(x)}{y-x}=\frac{\omega'(x)+\omega'(y)}{2}.$$

La solution générale de cette équation étant

$$\omega(t)=At^2+Bt+C,$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires, on en déduit d'après (9) que

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{At^2+Bt+C}},$$

et puisque

$$F''(t)=\varphi'^3(t),$$

il s'ensuit que

$$F(t)=\frac{4C_1}{4AC-B^2}\sqrt{At^2+Bt+C}+C_2t+C_3,$$

$(4AC-B^2\neq 0)$, est la seule fonction dont la fonction $\xi=\xi(x,y)$ soit de la forme (8).

Remarquons que $y = F(x)$ est l'équation générale des sections coniques, d'où il résulte que les seules courbes dont les équations satisfassent le système fonctionnel simultané

$$F(y) - F(x) = (y - x) F'(\xi)$$
$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2},$$

sont les courbes du second degré.

L'interprétation géométrique de ce système fonctionnel simultané se trouve dans une note de *G. Aumann.*[1]

---

[1] *G. Aumann* — Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften, Journal für Mathematik, Bd. 176, Heft 1, 1936. S. 49. Voir de même *R. Bojanić* — Sur une propriété caractéristique des sections coniques, Bullettin de la Société des math. et phys. de la R. P. S., 1 (3–4), 1949.