SUR UNE INÉGALITÉ DE KUSMIN-LANDAU RELATIVE AUX SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES ET SON APPLICATION À LA SOMME DE GAUSS

Par

J. KARAMATA et M. TOMIĆ

§ 1. 1. Soit

$$\alpha_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

une suite de nombres positifs, qui satisfait à la condition qu'il existe un

$$0 < \vartheta < \frac{1}{2},$$

tel que

$$0 < \vartheta \leqslant \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \alpha_3 - \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n - \alpha_{n-1} \leqslant 1 - \vartheta \tag{1}$$

et soit

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi \alpha_\nu i}.$$

D'après Van der Corput il existe une constante A, indépendante de n, α_ν et ϑ, telle que

$$|S_n| \leqslant \frac{A}{\vartheta}.$$

Kusmin[1]) a montré, par des considérations géométriques élémentaires, que l'on peut réduire cette constante à 1, c. à d. que

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\vartheta};$$

---

[1]) Kusmin, R. O. — О некоторых тригонометрических неравенствах, Журн. Ленингр. Физ. Мат. О-ва Т. 1, стр. 233—239 (1927).

puis Landau[2]), en reproduisant analytiquement la démonstration de Kusmin, en déduit que

$$|S_n| \leqslant \operatorname{cotg} \frac{\vartheta\pi}{2}, \tag{2}$$

et montre que cette limite est la plus précise possible.

Nous allons montrer dans cette Note que l'on peut, d'une part, généraliser ce théorème, en remplaçant dans la condition (1) le nombre $1-\vartheta$ par une seconde constante $\theta < 1$, indépendante de ϑ.

D'autre part, nous allons préciser l'inégalité (2) en ce sens que nous donnerons un cercle plus petit que celui de Landau

$$|z| = \operatorname{cotg} \frac{\vartheta\pi}{2},$$

dans lequel sont situés les points d'affixes S_n, et dont le centre ne dépend que de α_1 et ϑ, et le rayon de ϑ et θ.

Quant à la méthode de démonstration, elle repose de même sur des considérations géométriques de nature élémentaire. Mais l'extension que nous obtenons nous a permis, en suivant la voie de Landau[3]), d'en tirer parti pour obtenir presque sans calcul, le signe de la somme de Gauss,

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi \frac{\nu^2 i}{n}}$$

§ **1. 2.** Le théorème mentionné, d'où l'on peut déduire diverses inégalités relatives à la somme S_n est le suivant:

Théorème 1. *Lorsque la suite de nombres positifs*

$$\alpha_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

satisfait à la condition

$$0 < \vartheta \leqslant \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \alpha_3 - \alpha_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant \alpha_n - \alpha_{n-1} \leqslant \theta < 1, \tag{3}$$

---

[2]) E. Landau, Über eine trigonometrische Summe. Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math. — Phys. Klasse (1928).

[3]) E. Landau, Über das Vorzeichen der Gausschen Summe. Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.—Phys. Klasse (1928).

alors le point d'affixe

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi\alpha_\nu i} \tag{4}$$

est situé dans le cercle $K(\vartheta, \theta)$ *de rayon*

$$r = \frac{1}{2}\{\cotg \vartheta\pi + \tg\frac{\theta}{2}\pi\}, \tag{5}$$

et dont l'affixe du centre est

$$\omega = \frac{i}{2\sin\vartheta\pi} e^{\pi(2\alpha_1 - \vartheta)i} = \frac{i\,e^{-\vartheta\pi i}}{2\sin\vartheta\pi} e^{2\pi\alpha_1 i}. \tag{6}$$

En exprimant que le cercle $K(\vartheta, \theta)$ est entièrement situé dans le cercle dont le centre est à l'origine et de rayon

$$R = \frac{1}{2}\left\{\cotg\frac{\vartheta\pi}{2} + \tg\frac{\theta\pi}{2}\right\}$$

l'on obtient la généralisation suivante du théorème de Kusmin-Landau, à savoir

Théorème 2. *Lorsque la suite* α_ν *satisfait aux conditions* (3), *alors*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi\alpha_\nu i}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\{\cotg\frac{\vartheta\pi}{2} + \tg\frac{\theta\pi}{2}\right\}. \tag{7}$$

Cette inégalité se réduit à l'inégalité (2) de Landau lorsque $\theta = 1 - \vartheta$.

Il est évident que l'on obtient une inégalité plus précise, en exprimant que le point d'affixe S_n est situé dans le cercle $K(\vartheta, \theta)$ à savoir,

$$|S_n - \omega| \leqslant \frac{1}{2}\{\cotg \vartheta\pi + \tg\frac{\theta}{2}\pi\}.$$

Or, d'après (4), (5) et (6)

$$|S_n - \omega| = \left| S_n - \frac{1}{2} e^{2\pi\alpha_\nu i} - \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \vartheta\pi \, e^{2\pi\alpha_1 i} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} e^{2\pi\alpha_1 i} + \sum_{\nu=2}^{n} e^{2\pi\alpha_\nu i} - \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \vartheta\pi \, e^{2\pi\alpha_1 i} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{1}{2} e^{2\pi\alpha_1 i} + \sum_{\nu=2}^{n} e^{2\pi\alpha_\nu i} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \vartheta\pi.$$

On en déduit le

Théorème 3. *Lorsque la suite α_ν satisfait aux conditions* (3) *on a l'inégalité*

$$\left| \frac{1}{2} e^{2\pi\alpha_1 i} + \sum_{\nu=2}^{n} e^{2\pi\alpha_\nu i} \right| \leqslant \operatorname{cotg} \vartheta\pi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\pi. \tag{8}$$

Ainsi, lorsqu'on remplace le premier terme de la somme S_n dans (7) par sa moitié, le second membre de cette inégalité peut être rendu plus petit, puisque

$$\operatorname{cotg} \vartheta\pi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta\pi}{2} < \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\vartheta\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta\pi}{2} \right\}.$$

Enfin, en posant, pour simplifier

$$\alpha_1 = 0$$

et en supposant θ fixe, les cercles $K(\vartheta, \theta)$, ϑ étant variable, restent tous audessus de la droite

$$y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \pi,$$

en la touchant au point $x = \frac{1}{2}$ (v. fig. 1).

Il s'ensuit, que la partie imaginaire $J\{S_n\}$ reste bornée inférieurement et l'on obtient le

Théorème 4. *Lorsque la suite α_ν satisfait aux conditions*

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \alpha_3 - \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n - \alpha_{n-1} \leqslant \theta < 1, \quad \textit{avec} \quad \alpha_1 = \theta,$$

alors

$$J\{S_n\} = \sum_{\nu=1}^{n} \sin 2\pi\alpha_\nu \geqslant -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\pi.$$

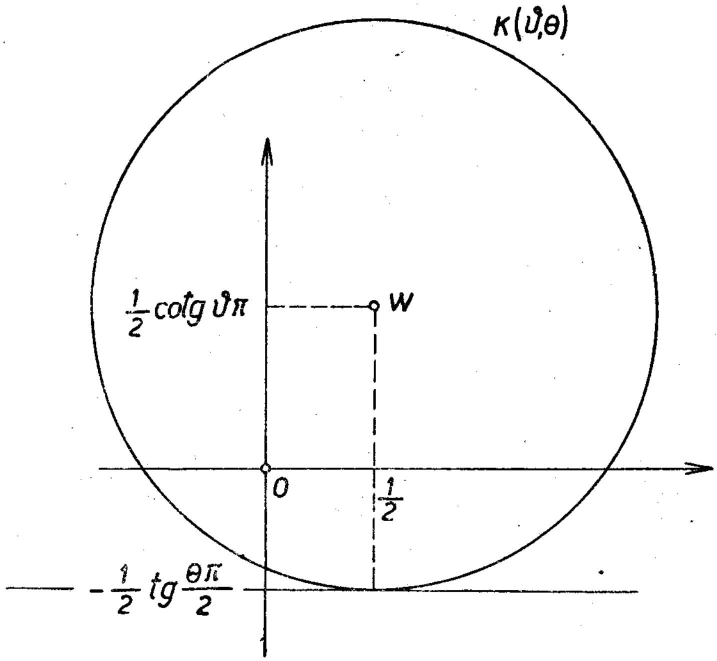

Fig. 1

§ 2. Avant de passer à la démonstration du théorème 1 montrons que, des théorèmes précédents, en particulier du théorème 4, résulte immédiatement que la somme de Gauss est affectée du signe $+$.

Afin de pouvoir appliquer le théorème 4, il suffit de réduire la somme de Gauss

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi\frac{\nu^2}{n}i}$$

au quart de ses termes.

Il est connu que l'on peut obtenir par des considérations élémentaires que

$s_n = 0$ lorsque $n \equiv 2$ (mod. 4),

$2(1 + i^n)\, s_n = s_{4n}$ lorsque n n'est pas divisible par 2, et que

$$s_n = \pm (1+i)\sqrt{n} \quad \text{lorsque} \quad {}^4|_n. \tag{9}$$

Donc, pour obtenir les valeurs de s_n pour n quelconque, il suffit de déterminer le signe dans la dernière des relations précédentes. Pour cela il suffit de montrer, comme l'a remarqué Landau, que

$$J\{s_n\} > -\sqrt{n} \quad \text{lorsque} \quad {}^4|_n,$$

c. à d. que

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin\left(2\pi \frac{\nu^2}{n}\right) > -\sqrt{n} \tag{10}$$

lorsque n est divisible par 4.

Or, en découpant la somme s_n en quatre et en posant $n = 4m$, on a

$$s_n = 2\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{2\pi \frac{\nu^2}{n} i} + 2\sum_{\nu=1}^{m} e^{2\pi \frac{\nu^2}{n} i} = 2s' + 2s''. \tag{11}$$

Donc,

$$J\{s_n\} = 2\sum_{\nu=0}^{m-1} \sin 2\pi \frac{\nu^2}{n} + 2\sum_{\nu=1}^{m} \sin 2\pi \frac{\nu^2}{n},$$

c. à d.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sin 2\pi \frac{\nu^2}{n} = 2\sum_{\nu=1}^{m} \sin 2\pi \frac{(\nu-1)^2}{n} + 2\sum_{\nu=1}^{m+1} \sin 2\pi \frac{(\nu-1)^2}{n},$$

pour $n = 4m$.

Par suite, en posant dans ces deux derniers termes

$$\alpha_\nu = \frac{(\nu-1)^2}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots m \text{ et } m+1,$$

les conditions (3) sont remplies avec $\theta = \frac{1}{2}$, puisque

$$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \frac{2\nu-3}{n} = \frac{2\nu-3}{4m} \quad \text{pour} \quad \nu = 2, 3, \ldots\ldots m \text{ et } m+1,$$

c. à d.

$$\alpha_m - \alpha_{m-1} < \alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{2m-1}{4m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m} < \frac{1}{2} = \theta.$$

Donc, d'après le théorème 4, α_1 étant $=0$,

$$J\{s_n\}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin 2\pi\frac{\nu^2}{n}\geqslant -2\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-2\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-2,$$

de sorte que l'inégalité (10) est bien satisfaite pour tout $n\geqslant 4$.

Ce fait résulte de même du théorème 1 par des considérations purement géométriques. En effet, puisque les exposants α_ν des deux sommes s' et s'' dans (11) satisfont aux conditions (3) avec $\theta=\frac{1}{2}$, les deux points d'affixes s' et $1+s''$ sont situés dans le cercle $K\left(\vartheta,\frac{1}{2}\right)$; il en ressort que la somme

$$2s'+2+2s''=s_n+2$$

doit être située dans le cercle $K'\left(\vartheta,\frac{1}{2}\right)$, qui est quatre fois plus grand que le cercle $K\left(\vartheta,\frac{1}{2}\right)$ (v. fig. 2).

Or, d'après (9), la somme s_n+2 doit être située en même temps sur la droite

$$y=x-2.$$

Cette droite n'ayant en commun, avec le cercle $K'\left(\vartheta,\frac{1}{2}\right)$, que la partie dont les points ne possèdent que des abscisses positives, il en résulte que la somme de Gauss s_n doit être, à partir de $n=4$, affectée du signe $+$.

§ 3. La proposition géométrique qui est à la base de la démonstration du théoréme 1 est la suivante.

Soient $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ deux segments de longueur 1,

$$\overline{AB}=1,\quad \overline{BC}=1,$$

et de direction positive BB' et CC'. Supposons que BC tourne autour du point B, de la position $\overline{BC}$ à la position $\overline{BC_1}$ de telle sorte que

$$\sphericalangle B'BC = \gamma \quad \text{et} \quad B'BC_1 = \Gamma$$

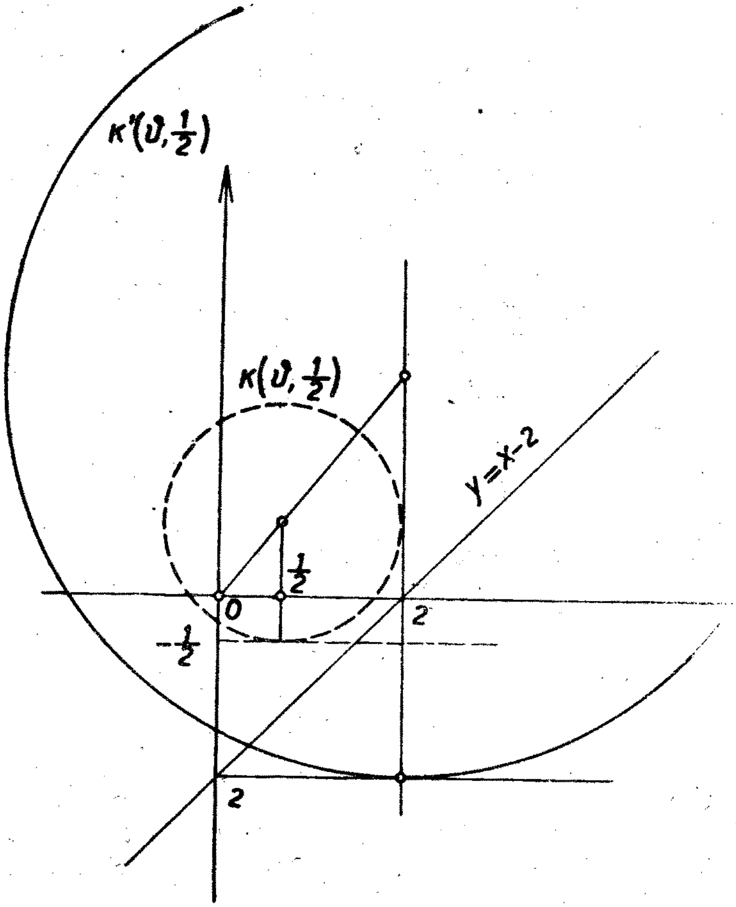

Fig. 2

où

$$0 < \gamma < \Gamma < 2\pi.$$

(v. fig. 3 et 3').

Faisons correspondre au segment AB le cercle $K(\gamma, \Gamma)$ de centre W et de rayon R, le point W étant le centre du cercle circonscrit au ΔABC, c. à d. se trouvant à l'intersection des perpendiculaires menées par les milieux des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$; le rayon R est choisi de manière que le cercle $K(\gamma, \Gamma)$ touche et contient le cercle circonscrit au ΔABC, donc

$$R = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{coses}\frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Gamma}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}.$$

cas où $0 < \gamma < \pi$

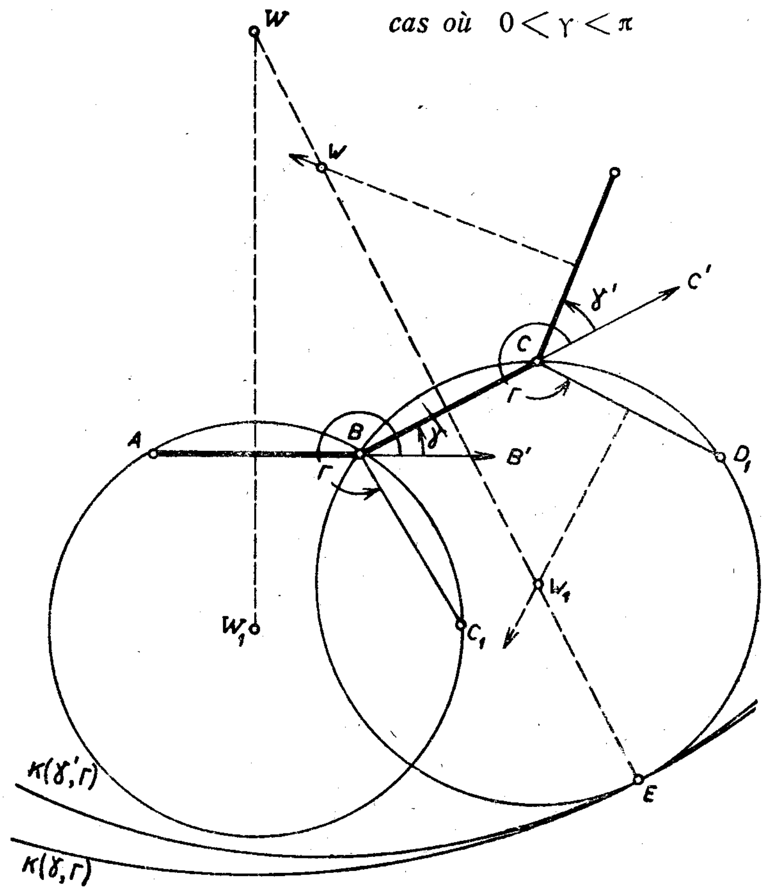

Fig. 3

Soit à présent $\overline{CD}$ un troisième segment de même longueur que les précédents, c. à d.

$$\overline{CD} = 1,$$

et tel que

$$\sphericalangle C'CD = \gamma' \geqslant \gamma,$$

alors le cercle $K(\gamma', \Gamma)$ correspondant à la ligne BCD aura pour centre le point w et pour rayon

$$r = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma'}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\}.$$

CAS OÙ $\pi < \gamma < 2\pi$

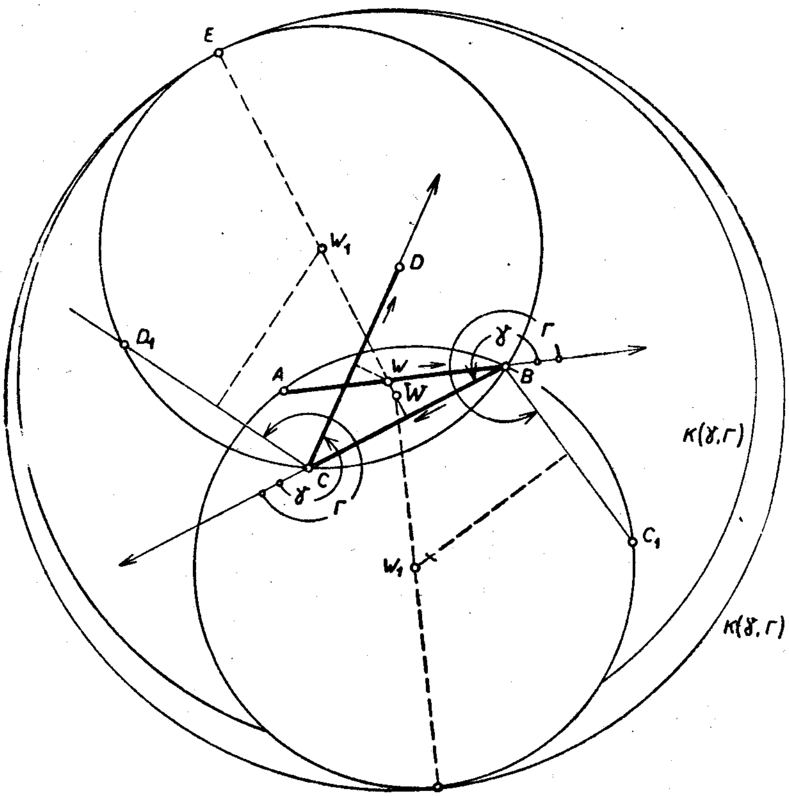

Fig. 3′

Puisque le point w se trouve à l'intersection des perpendiculaires menées par les milieux des segments $\overline{BC}$ et $\overline{CD}$, lorsque γ' varie de γ à Γ, ce point w se déplace de w à w_1, qui est le centre du cercle circonscrit au $\Delta\, BCD_1$.

Par suite, dans tous ces cas, le cercle $K(\gamma', \Gamma)$ touche le cercle précédent $K(\gamma, \Gamma)$ au point E situé sur la perpendiculaire W, w, w_1 au segment $\overline{BC}$ qui passe par son milieu, et l'on a, en outre, $R \geqslant r$.

Il en résulte la proposition suivante:

Lorsque

$$0 < \gamma \leqslant \gamma' \leqslant \Gamma < 2\pi$$

le cercle $K(\gamma', \Gamma)$ correspondant au segment $\overline{BC}$ est entièrement situé dans le cercle $K(\gamma, \Gamma)$, correspondant au segment $\overline{BB}$, ou se confond avec lui.

§ 3. 2. Démonstration du théorème 1. Considérons la somme

$$S'_n = \sum_{\nu=1}^{n} e^{\beta_\nu i}$$

et dans le plan de la variable complexe, les points d'affixes

$$S'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n;$$

l'angle des directions positives des deux segments consécutifs $\overline{S_{\nu-2} S_{\nu-1}}$ et $\overline{S_{\nu-1} S_\nu}$ sera alors égal à

$$\gamma_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu-1}, \quad \nu = 2, 3, \ldots n.$$

Lorsque

$$0 < \gamma_\nu \leqslant \gamma_{\nu+1} \leqslant \Gamma < 2\pi$$

d'après la proposition précédente, le cercle $K(\gamma_{\nu+1}, \Gamma)$ correspondant au segment $\overline{S'_{\nu-2} S'_\nu}$ est entièrement contenu dans le cercle $K(\gamma_\nu, \Gamma)$ correspondant au segment $\overline{S'_{\nu-2} S'_{\nu-1}}$.

Donc, lorsque

$$0 < \gamma \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{n-1} \leqslant \gamma_n \leqslant \Gamma < 2\pi,$$

le cercle $K(\gamma_n, \Gamma)$ sera entièrement situé dans le cercle $K(\gamma_1, \Gamma)$, correspondant au segment $\overline{OS_1}$ et, à fortiori, dans le cercle $K(\gamma, \Gamma)$ correspondant à ce même segment, c. à d. à $Oe^{\beta_1 i}$.

Il en résulte que le point d'affixe S'_n est situé à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle $K(\gamma, \Gamma)$ correspondant au segment $Oe^{\beta_1 i}$, dont le rayon est égal à

$$\frac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Gamma}{4}\right\},$$

et dont l'affixe du centre est

$$\omega = \left\{\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}\right\} e^{\beta_1 i}.$$

En y posant

$$\beta_\nu = 2\pi\alpha_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

$$\gamma = 2\pi\vartheta \quad \text{et} \quad \Gamma = 2\pi\theta.$$

la somme S_n' se transforme en S_n et l'on obtient le théorème 1.