# SUR LE THÉORÈME TAUBERIEN DE N. WIENER

Par

J. KARAMATA

Le but de cet exposé est d'indiquer la voie, jusqu'à présent la plus directe, pour établir le théorème de Wiener énoncé sous la forme ci-dessous, tout en le débarassant autant que possible des hypothèses secondaires:

*Soit $k(t)$ intégrable-L et $s(t)$ intégrable et borné dans tout intervalle fini, et tel que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|\, dt < \infty \tag{1}$$

*et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} K(t)\, dt \neq 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ réel.} \tag{2}$$

*De*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-x)\, s(t)\, dt \to s \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, dt, \quad x \to \infty, \tag{3}$$

*il résulte*

$$s(x) \to s, \quad x \to \infty, \tag{4}$$

*lorsque:*

*a) ou bien*

$$\limsup_{|x|=\infty} \operatorname*{Max}_{|x|\leqslant|x'|\leqslant|x+h|} |s(x')-s(x)| \leqslant w(h)\to 0, \quad h\to 0,$$

*avec*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tKt|\,dt < \infty;$$

*b) ou bien*

$$\limsup_{x=\infty} \operatorname*{Max}_{x\leqslant x'\leqslant x+h} |s(x')-s(x)| \leqslant w(h)\to 0, \ h\to 0,$$

*avec*

$$s(x)=O(1), \quad x\to-\infty,$$

*et*

$$\int_{o}^{\infty} t\,|K(t)|\,dt < \infty, \quad c>0;$$

*c) ou bien*

$$\liminf_{|x|=\infty} \operatorname*{Min}_{|x|\leqslant|x'|\leqslant|x+h|} \{s(x')-s(x)\} \geqslant -w(h)\to 0, \quad h\to 0,$$

*avec*

$$K(t)\geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad t,$$

*et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|\,K(t)\,dt < \infty;$$

*d) ou, enfin, lorsque*

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x\leqslant x'\leqslant x+h} \{s(x')-s(x)\} \geqslant -w(h)\to 0, \quad h\to 0,$$

*avec*

$$s(x)=O(1), \quad x\to-\infty,$$

$$K(t)\geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad t,$$

*et*

$$\int_c^\infty tK(t)\,dt < \infty, \quad c > 0.$$

Les étapes principales de la démonstration de ce théorème sont les suivantes:

I. (L'inversion $-O$). De (1), (3) et l'un des groupes de conditions a), b), c) ou d), il résulte

$$|s(x)| \leqslant M \quad \text{pour tout } x. \tag{5}$$

II. (Théorème central de Pitt-Wiener. Voir H. R. Pitt, General tauberian theorems. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **44**, p. 254, Th. 6 (1938)). De (1), (2), (3) et (5) il résulte

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda t}{\lambda t}\right)^4 s(t+x)\,dt \to \frac{2\pi}{3} s, \quad x \to \infty, \tag{6}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Remarquons qu'on peut de même obtenir une relation semblable, mais où l'exposant 4 du noyau est remplacé par 3.

III. De (6) et l'une des conditions a), b), c) ou d) relative à $s(t)$ seul, il résulte l'affirmation (4) et, par suite, la démonstration du théorème énoncé.

Quant à la démonstration des trois étapes I—III mentionnées, nous ne ferons que les esquisser brièvement, étant donné que différentes parties de ces démonstrations se trouvent en partie dans les travaux cités.

La première étape, c. à d. l'inversion$-O$ s'obtient d'une manière extrêmement simple, lorsque l'hypothèse a) est remplie. En effet, de la première des conditions mentionnées sous a) il résulte l'existence d'une constante $C_h$, ne dépendant que de $h$, telle que l'on a

$$|s(y) - s(x)| \leqslant C_h(y - x + h), \quad \text{pour tout } y \geqslant x.$$

En tenant compte de cette inégalité, l'on obtient

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x)\, s(t)\, dt - s(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \{ s(x+t) - s(x) \}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|\, |s(x+t) - s(x)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_h \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|\, (|t| + h)\, dt.$$

Il en résulte, d'après l'hypothèse (3) et la seconde des hypothèses mentionnées sous a) que

$$s(x) = O(1), \qquad |x| \to \infty .$$

D'une manière semblable, en supposant remplies les hypothèses sous c), de (3) il résulte que

$$s(x) < O(1), \qquad |x| \to \infty .$$

En se servant ensuite d'un artifice analogue à celui de ma Note „Über einen Satz von Vijayaraghavan“, Math. Zeit. **34**, p. 737 – 746 (1932), l'on en déduit l'affirmation (5).

Enfin, en supposant que les conditions sous b) ou d) sont satisfaites, on déduit l'inversion - $O$ du procédé général que j'ai donné dans ma Note „Über allgemeine $O$ - Umkehrsätze. Bull. int. de l'Acad. Yougoslave, **32**, p. 1—39 (1939). (Voir de même ma brochure „Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité“, Actualités scientifiques et industrielles, **450**, Hermann et Comp. Paris 1937).

La seconde étape repose sur le théorème central de Pitt, dont la démonstration, particulièrement brève et élégante, se trouve dans la Note citée plus haut. En changeant quelque peu le noyau dont se sert Pitt, on peut l'esquisser comme suit:

Soit

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} K(t)\, dt \neq 0, \qquad \text{pour tout } x \text{ réel},$$

et soit $H(t)$ intégrable-L dans $(-\infty, +\infty)$, et tel que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} H(t)\, dt = 0, \qquad \text{pour } |x| \geqslant 4\lambda,$$

alors on peut poser

$$\frac{h(x)}{k(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F(t)\, dt, \tag{7}$$

où $F(t)$ est intégrable-L dans $(-\infty, +\infty)$.

Nous pouvons prendre pour $h(t)$ la fonction suivante

$$h(t) = g\left(\frac{|t|}{4}\right),$$

où l'on a posé

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - 4t^2 + 4t^3, & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4}{3}(1-t)^3, & \text{pour} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

c. à d. pour $H(t)$ la fonction

$$H(t) = \frac{3\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin \lambda t}{\lambda t}\right)^4,$$

puisqu'on a, pour cette fonction $h(x)$

$$h(x) = \frac{3\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\left(\frac{\sin \lambda t}{\lambda t}\right)^4.$$

Par suite, en multipliant l'intégrale

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x)\, s(t)\, dt,$$

par $F(x-y)$ et en intégrant la relation ainsi obtenue de $-\infty$ à $+\infty$, il en résulte, après avoir changé l'ordre des intégrales et en tenant compte de (7), d'après le „Faltungssatz" l'affirmation (6).

En ce qui concerne la troisième étape, la démonstration se trouve à la page 33 de ma Note „Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale", Crelle J. **178** (1937).

Beograd, Mai 1939.