DOMAINES CONTENANT LE ZÉRO DU PLUS PETIT MODULE DES POLYNOMES

Par

D. MARKOVIĆ

Soit donné le polynome

$$P(z)=1-z^p+a_{q+1}z^{q+1}+\cdots+a_n z^n, \text{ avec } p\geqslant 1,\ q\geqslant p. \qquad (1)$$

Les théorèmes qui affirment l'existence d'un certain nombre de zéros du polynome (1) dans un domaine donné ne se rapportent pas, en général, au zéro du plus petit module, à moins que ce domaine ne soit un cercle dont le centre se trouve à l'origine. Nous allons montrer que l'on peut obtenir des domaines qui diffèrent des cercles mentionnés, et qui contiennent précisément le zéro qui est le plus proche de l'origine.

Théorème. *Le zéro de module minimum du polynome* (1) *se trouve dans chacun des domaines*

$$\left|z^k-\frac{1}{p}\right|\leqslant\frac{n-1}{p} \quad \textit{pour tout } k\leqslant q \textit{ divisible par } p, \qquad (2)$$

ainsi que dans le cercle

$$|z|\leqslant\sqrt[q]{n-1} \quad \textit{lorsque } q \textit{ n'est pas divisible par } p. \qquad (3)$$

Au cas où q est divisible par p, on peut remplacer le cercle (3) par

$$|z|\leqslant\sqrt[q-1]{n-1}, \qquad (4)$$

mais ce cercle contient entièrement le domaine (1) avec $k=q$. Car, ce domaine

$$\left| z^q - \frac{1}{p} \right| \leqslant \frac{n-1}{p}$$

est contenu dans le cercle

$$|z| \leqslant \sqrt[q]{\frac{n}{p}},$$

puisque

$$\left| z^q - \frac{1}{p} \right| \geqslant |z|^q - \frac{1}{p},$$

et le rayon de ce cercle est au plus égal à celui du cercle (4).

Pour démontrer le théorème énoncé, désignons par s_k les fonctions symétriques

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_\nu^k}$$

des racines z_ν du polynome

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

et partons des relations connues

$$s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + a_{k-1} s_1 + k a_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Puisque, pour le polynome (1),

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0, \quad a_p = -1$$

et

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_q = 0,$$

on en déduit les valeurs suivantes pour les fonctions symétriques s_k, avec $k \leqslant q$,

$$s_k = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } k \text{ n'est pas un multiple de } p, \\ p \text{ lorsque } k \text{ est un multiple de } p. \end{cases}$$

Donc, en désignant par z_1 la racine dont le module est le plus petit, et par ε_k l'un des deux nombres

$$\frac{1}{p} \text{ ou bien } 0,$$

selon que k est divisible par p ou non, on en déduit que

$$\begin{aligned}|z_1^k - \varepsilon_k| = \frac{|z_1|^k}{p}\left|\frac{1}{z_2^k} + \frac{1}{z_3^k} + \cdots + \frac{1}{z_n^k}\right| &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{p}\sum_{\nu=2}^{n}\left|\frac{z_1}{z_\nu}\right|^k &\leqslant \\ \leqslant \frac{n-1}{p},\end{aligned}$$

d'où il résulte l'affirmation du théorème énoncé.

Lorsque $p=1$, $(q \geqslant 1)$, les domaines (2) sont donnés par les inégalités

$$|z^k - 1| \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Au cas où $k=1$, on obtient le cercle

$$|z-1| \leqslant n-1.$$

Ce cercle est plus petit, et est entièrement contenu dans le $|z| \leqslant n$, qui résulte des théorèmes de *Fejér*, *Montel* et *Van Vleck* et autres (voir *Vleck* [1]). Au cas où $k=q$, l'on obtient le domaine

$$|z^q - 1| \leqslant n-1,$$

qui est, du fait que $|z^q - 1| \geqslant |z|^q - 1$, contenu dans le cercle

$$|z| < \sqrt[q]{n},$$

qui était donné par *Carmichael* et *Mason* [2].

Lorsque $q=p \geqslant 1$, le plus petit des domaines (2) et (3) est donné par

$$\left|z^p - \frac{1}{p}\right| \leqslant \frac{n-1}{p}.$$

Puisque

$$\left|z^p - \frac{1}{p}\right| \geqslant |z|^p - \frac{1}{p},$$

ce domaine est contenu dans le cercle

$$|z| \leqslant \sqrt[p]{\frac{n}{p}},$$

qui a été obtenu par *Ballieu* [3].

Je remarquerai, enfin, que j'avais d'abord obtenu ces cas spéciaux, et que c'est *Karamata* qui m'a attiré l'attention que l'on peut obtenir, par la même méthode, le théorème énoncé au début.

REFÉRENCES

[1] Vleck, E. V. — On limits to the absolute values of the roots of a polynomial. Bull. Soc. Math. de France, 35, (1929).

[2] Carmichael, R. D. and Mason, T. E. — Note on the roots of algebraic equations. (Read before Amer. Math Soc. at Chicago), April 10, 1914.

[3] Ballieu, R. — Limitations en modules et localisations des zèros des polynomes. Bruxelles 1936, pp. 65–66.