ÉQUATIONS FONDAMENTALES D'ÉLASTICITÉ PAR LA MÉTHODE DE PFAFF

Par

T. ANGELITCH

La forme de Pfaff

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i \tag{1}$$

où X_i sont des fonctions des variables indépendantes x_i, peut être mise [1] sous forme du produit scalaire

$$\Phi = \mathfrak{X} \cdot d\mathfrak{x}, \tag{2}$$

si on considère les fonctions X_i comme les coordonnées d'un vecteur $\mathfrak{X}$ dans l'espace à n dimensions, et x_i comme les coordonnées du rayon vecteur $\mathfrak{x}$ dans ce même espace. D'autre part, $3k$ de ces n fonctions X_i peuvent être interprétées aussi comme les coordonnées de certains k vecteurs $\mathfrak{R}_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots k)$ dans l'espace euclidien à trois dimensions, et les k_1 autres comme les fonctions scalaires Q_μ $(\mu = 1, 2, \dots k_1)$, avec $n = 3k + k_1$. Dans ce cas la forme de Pfaff peut s'exprimer sous la forme

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{R}_\lambda \cdot d\mathfrak{r}_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k_1} Q_\mu \, dq_\mu , \tag{3}$$

les $3k$ variables indépendantes étant comprises dans les rayons vecteurs $\mathfrak{r}_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, k)$ et les k_1 autres étant des variables scalaires q_μ $(\mu = 1, 2, \dots, k_1)$.

Alors, pour tout vecteur $\mathfrak{R}_\lambda$ on peut écrire l'équation de Pfaff correspondante sous la forme

$$d\mathfrak{R}_\lambda = \nabla_\lambda \Phi, \tag{4}$$

où ∇_λ désigne l'opération du gradient partiel par rapport au vecteur $\mathfrak{r}_\lambda$. Pour toute grandeur scalaire Q_μ on aura l'équation de Pfaff de la forme

$$d Q_\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Phi. \tag{5}$$

Le but de ce travail, de même que celui des mes travaux précédents, est de montrer l'applicabilité générale de la méthode de Pfaff tant dans la dynamique des corps solides que dans celle des milieux déformables, et, en même temps, de faire ressortir toute l'utilisabilité en dynamique de la théorie des systèmes de Pfaff.

L' application de la méthode de Pfaff, comme on vient de l'exposer [1], exige que, dans le problème dynamique donné, l'élément d'action au sens d'Hamilton, c'est-à-dire

$$(T+U)\, dt = (2\,T - H)\, dt, \tag{6}$$

où $H = T - U$, soit exprimé par une forme de Pfaff appropriée. Ici T représente, comme d'habitude, la force vive du système dynamique considéré et U le travail des forces appliquées à ce système à partir d'une position initiale jusqu'à une certaine position finale.

Toutes ces quantités seront exprimées, comme c'est l'usage en Mécanique des corps déformables, par rapport à l'unité de masse.

Considérons, donc, un élément δV d'un milieu continu déformable. Soit $\mathfrak{v}$ la vitesse d'une particule de cet élément. Comme on ne considère que les déformations infinitésimales, en désignant le vecteur d'un déplacement infinitésimal par $\mathfrak{s} = \{u_1, u_2, u_3\}$, on aura

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}. \tag{7}$$

On aura aussi

$$d\mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} dt. \tag{8}$$

Ceci étant, la force vive de l'élément du continu, de volume δV, est donnée par l'intégrale

$$\int_{\delta V} \rho \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \right) dV, \tag{9}$$

ρ étant la densité. Si on la calcule pour l'unité de masse, en évaluant la dérivée de l'intégrale (9) par rapport au volume et divisant par ρ, la force vive peut être exprimée sous la forme

$$2\,T = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}. \tag{10}$$

Soit maintenant $\mathfrak{F}$ la résultante des forces extérieures agissant sur l'élément du continu considéré, prise pour l'unité de masse. Désignons par $\mathfrak{N}$ la tension en un point de la surface σ enveloppant l'élément considéré δV. Or, la tension étant une fonction vectorielle linéaire de direction, elle peut s'écrire

$$\mathfrak{N} = \mathcal{N} \cdot \mathfrak{n}, \tag{11}$$

$\mathfrak{n}$ étant le vecteur unité de la normale à la surface σ au point choisi, orienté vers l'extérieur, et $\mathcal{N}$ le tenseur de tension

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{matrix} \right\}. \tag{12}$$

La tension élémentaire par rapport à l'élément de surface df sera

$$\mathcal{N} \cdot \mathfrak{n}\, df = \mathcal{N} \cdot d\mathfrak{f}, \tag{13}$$

où $d\mathfrak{f}$ est l'élément de surface orienté. Pour la tension sur toute la surface σ on aura

$$\int_{\sigma} \mathcal{N} \cdot d\mathfrak{f}$$

ce qui, après la transformation de Gauss en une intégrale de volume, donne

$$\int_{\sigma} \mathcal{N} \cdot d\mathfrak{f} = \int_{\delta V} (\nabla \cdot \mathcal{N})\, dV. \tag{14}$$

On en déduit pour l'unité de volume $\nabla \cdot \mathcal{N}$ et, enfin, pour l'unité de masse, la tension

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{N}. \tag{15}$$

Par conséquent, le travail total de toutes les forces extérieures et tensions pour un déplacement élémentaire de $\mathfrak{s}_0$ a $\mathfrak{s}$, sera

$$U = U_1 + U_2 \tag{16}$$

où

$$U_1 = \int_{\mathfrak{s}_0}^{\mathfrak{s}} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{s}, \qquad U_2 = \int_{\mathfrak{s}_0}^{\mathfrak{s}} \mathfrak{T} \cdot d\,\mathfrak{s}. \tag{17}$$

On a ainsi

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}\right) - U$$

de sorte que, finalement, l'expression cherchée de l'élément d'action peut être donnée par le pfaffian sous la forme vectorielle

$$\Phi = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \cdot d\mathfrak{s} - H\,dt, \tag{18}$$

ou, sous la forme scalaire,

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial t}\, du_i - H\,dt. \tag{19}$$

Si, pour la forme de Pfaff (18), on forme maintenant les équations vectorielles de Pfaff, on aura immédiatement, en vertu de (4), pour le vecteur de vitesse $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$

$$d\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}\right) = \nabla_{\mathfrak{s}} \Phi = -\nabla_{\mathfrak{s}} H\,dt,$$

d'où l'on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathfrak{s}} U_1 + \nabla_{\mathfrak{s}} U_2.$$

Or, comme on a de (17)

$$\nabla_{\mathfrak{s}} U_1 = \mathfrak{F}, \quad \nabla_{\mathfrak{s}} U_2 = \mathfrak{T} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{N}, \tag{20}$$

on peut écrire finalement

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \mathfrak{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{N}, \tag{21}$$

c'est-à-dire l'équation fondamentale de la dynamique du milieu continu déformable, d'où l'on peut déduire, par les procédés déjà connus, toutes les autres équations de la théorie de l'élasticité.

Ainsi donc, on vient de montrer que les équations fondamentales d'élasticité aussi peuvent être considérées comme les équations de Pfaff déduites de l'élément d'action au sens hamiltonien donné sous la forme d'un pfaffian.

RÉFÉRENCES

[1] A. Bilimović — Pfafov opšti princip mehanike. Glas Srpske akademije nauka CLXXXIX — 1946 (A. Bilimovitch — Le principe général de mécanique de Pfaff. Bull. de l'Acad. Serbe des Sciences).

[2] T. Angelitch — Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides. Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. Serbe des Sciences II, p. 211.