THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES LINÉAIRES PAR RAPPORT AUX VARIABLES PARAMÉTRIQUES

Par

M. N. SALTYKOW

SOMMAIRE

Propriétés des solutions d'un système d'équations considérées. Intégration d'un système d'équations aux différentielles totales linéaires par rapport aux variables paramétriques à coefficients constants.

INTRODUCTION

Il s'agit dans les lignes qui vont suivre d'étudier la théorie des équations aux différentielles totales linéaires par rapport aux variables paramétriques. On appliquera la théorie en question à la démonstration de l'unicité de l'intégrale de Cauchy d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme la plus générale. D'autre part, on va exposer une nouvelle méthode d'intégration des équations en question à coefficients constants. Celle-ci généralise les procédés classiques d'intégration des équations différentielles ordinaires. Remarquons, enfin, que les équations aux différentielles totales linéaires par rapport aux variables paramétriques se présentent dans la théorie des équations aux différentielles totales de la forme générale. Leurs transformations infinitésimales et leurs facteurs intégrants sont définis par les dites équations (v. *N. Saltykow — Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles*, Journal Jordan 1897 p. 429 et *Etude sur les transformations infinitésimales*, Journal Jordan 1905, p. 53).

CHAPITRE I

THÉORIE GÉNÉRALE

1. Intégrales des équations aux différentielles totales linéaires par rapport aux variables paramétriques. — Les équations considérées homogènes admettent la forme suivante

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+r} = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-m+1} A_{ri}^{k} x_{m+i}\right) dx_k, \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m+1) \end{array}\right\} \quad (1)$$

les coefficients A_{ri}^k, à trois indices r, i et k, désignant les fonctions des variables principales.

Ces équations se présentent dans la théorie des fonctions hypergéométriques (1) ainsi que dans celle des solutions complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre [2].

Il est aisé de formuler la solution du problème de l'intégration des équations (1), engendrant un système d'équations aux différentielles totales, d'une manière analogue à celle des équations différentielles ordinaires linéaires homogènes. En effet, la théorie des équations étudiées peut être constituée par les propositions suivantes:

1⁰ — *Si l'ensemble de $n-m+1$ fonctions distinctes des variables principales*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-m+1}$$

représente une solution du système (1), les expressions

$$C_1 u_1, \quad C_1 u_2, \ldots, \quad C_1 u_{n-m+1},$$

C désignant une constante arbitraire, constituent de même une solution du système considéré.

La démonstration de ce théorème est évidente, car les équations (1) sont linéaires et homogènes par rapport aux fonctions inconnues.

2⁰ — *Si l'on avait plusieurs systèmes des solutions distinctes des* équations (1), à savoir:

$$u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{n-m+1,j},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \mu \leqslant n-m+1)$$

les expressions

$$\sum_{j=1}^{\mu} C_j\, u_{1j},\quad \sum_{j=1}^{\mu} C_j\, u_{2j},\ldots,\quad \sum_{j=1}^{\mu} C_j\, u_{n-m+1,\,j},$$

$C_1, C_2,\ldots, C_n$ *désignant des constantes arbitraires, représenteraient encore les solutions du système étudié (1).*

La démonstration de cette assertion se fait de la même maniére que celle du théorème précédent.

3⁰ — *L'intégrale générale du système (1) est donnée par les formules*

$$\left.\begin{aligned} &x_{m+r} = \sum_{j=1}^{n-m+1} C_j\, u_{rj},\\ &(r = 1, 2,\ldots, n-m+1), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$C_1, C_2,\ldots, C_{n-m+1}$ *désignant les constantes arbitraires et les* u_{rj} *étant les solutions fondamentales distinctes du système (1) vérifiant la condition*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,\,n-m+1}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,\,n-m+1}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ u_{n-m+1,\,1} & u_{n-m+1,\,2} & \cdots & u_{n-m+1,\,n-m+1} \end{vmatrix} \gtreqless 0. \tag{3}$$

Il est aisé de démontrer le théorème cité, en observant que la condition (3) est non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour que les formules (2) définissent l'intégrale générale du système considéré (1).

Différentions, en effet, l'une des formules (2), de sorte que l'on ait

$$dx_{m+r} = \sum_{j=1}^{n-m+1} C_j\, du_{rj}.$$

Le résultat de l'élimination de toutes les constantes C_j de cette dernière relation et de celles (2) devient

$$\begin{vmatrix} dx_{m+r} & du_{r1} & du_{r2} & \cdots & du_{r,\, n-m+1} \\ x_{m+1} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,\, n-m+1} \\ x_{m+2} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,\, n-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n+1} & u_{n-m+1,\,1} & u_{n-m+1,\,2} & \cdots & u_{n-m+1,\, n-m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

et cela pour chaque valeur de l'indice r, de 1 jusqu'à $n-m+1$.

On met aisément les relations obtenues sous la forme suivante, en développant les déterminants de leurs parties gauches, par rapport aux éléments de la première ligne

$$\Delta\, dx_{m+r} - \sum_{j=1}^{n-m+1} \Delta_j\, du_{rj} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-m+1) \tag{4}$$

où Δ_j signifie ce que devient le déterminant Δ, en y remplaçant les éléments de la j-ième colonne respectivement par x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_{n+1}$.

Il résulte des formules (4) que la condition (3) est nécessaire pour que l'intégrale (2) soit générale, car dans le cas contraire, les relations (4) seraient indépendantes des différentielles des variables paramétriques.

La condition est de plus suffisante. En effet, on démontre aisément que les relations obtenues (4) représentent les équations étudiées (1). Pour le démontrer observons que les fonctions u_{rj} étant les solutions du système (1), on a les identités

$$du_{rj} = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n-m+1} A_{ri}^{k}\, u_{ij} \Big) dx_k,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-m+1; \quad j = 1, 2, \ldots, n-m+1).$$

Par conséquent, les équations (4) deviennent

$$\Delta dx_{m+r} - \sum_{i=1}^{n-m+1} \sum_{k=1}^{m} \Big(A_{ri}^{k} \sum_{j=1}^{k-m+1} \Delta_j\, u_{ij} \Big) dx_k = 0,$$

En y substituant les expressions Δ_j, résultant des formules (2) qui donnent

$$C_j = \frac{\Delta_j}{\Delta};$$

on obtient les égalités

$$\Delta\left[dx_{m+r} - \sum_{i=1}^{n-m+1} \sum_{k=1}^{m} \left(A_{ri}^{k} \sum_{j=1}^{n-m+1} C_j u_{ij} \right) dx_k.\right] = 0.$$

Si nous y remplaçons les sommes

$$\sum_{j=1}^{n-m+1} C_j u_{ij}$$

par leurs valeurs x_{m+i}, résultant des formules (2), Δ étant distinct de zéro, les équations (4) prennent bien la forme du système primitif (1).

Cela démontre que l'intégrale (2), sous l'hypothèse (3), est générale.

4° — *Le système étudié* (1) *admet toujours une intégrale générale* (2) *vérifiant la condition* (3). Cela résulte de théorème de Cauchy pour le champ de régularité du système intégrable (1) (*v. E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2-e Ed. p. 105).* En effet, il existe un système des solutions distinctes réductibles, pour les valeurs initiales données des variables principales, aux valeurs initiales des variables paramétriques d'ailleurs arbitraires; il est toujours possible de leur attribuer de telles significations que les intégrales correspondantes représentent le système fondamental des solutions du système (1). Alors la valeur initiale de leur déterminant devient distincte de zéro. Donc, dans un certain domaine, le déterminant Δ diffère de zéro.

Ce résultat est analogue à celui de la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires [3].

Par conséquent, le problème de l'intégration des équations étudiées (1) revient à la recherche du système fondamental de leurs solutions particulières.

5° — *Considérons, à présent, un système linéaire mais non homogène par rapport aux variables paramétriques.*

L'intégrale générale du système s'obtient en ajoutant la solution particulière quelconque à l'intégrale générale du système correspondant homogène.

Prenons, à titre d'exemple, le système de *Stodokiewicz*

$$\left.\begin{aligned} du &= (u+x)\,dx + (v+y+1)\,dy + (w+z+1)\,dz, \\ dv &= (v+y+1)\,dx + (w+z)\,dy + (u+x+1)\,dz, \\ dw &= (w+z+1)\,dx + (u+x+1)\,dy + (v+y)\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ce dernier est linéaire, mais non homogène par rapport aux variables paramétriques u, v, w.

Or, on remarque immédiatement que le système donné admet une solution particulière:

$$u = -x-1, \quad v = -y-1, \quad w = -z-1. \quad (6)$$

Supprimant les termes qui rendent le système (5) hétérogène, on obtient un autre système d'équations homogènes qui a été de même considéré par *Stodokiewicz*, à savoir

$$\left.\begin{aligned} du &= u\,dx + v\,dy + w\,dz, \\ dv &= v\,dx + w\,dy + u\,dz, \\ dw &= w\,dx + u\,dy + v\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Par conséquent, l'intégrale générale du système (5) s'obtient en ajoutant respectivement aux seconds membres des formules de l'intégrale générale du système (7), donnant les valeurs des fonctions cherchées u, v et w, les solutions particulières (6) du premier système (5).

2. Unicité de l'intégrale de Cauchy pour un système quelconque d'équations aux différentielles totales. — Considérons le système des $n-m+1$ équations aux différentielles totales complètement intégrables de la forme la plus générale

$$\left.\begin{gathered} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} X_r^k\,dx_k, \\ (r=1,\,2,\,\ldots,\,n-m+1) \end{gathered}\right\} \quad (8)$$

de sorte que l'on ait

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_k} = X_r^k, \quad (r=1,2,\ldots,n-m+1) \\ (k=1,\,2,\ldots,\,m) \end{gathered}\right\} \quad (9)$$

les coefficients X_r^k n'étant plus linéaires par rapport aux variables paramétriques.

Le système (8) admet, dans un certain domaine de régularité, l'intégrale de Cauchy définissant les valeurs des inconnues

$$x_{m+1},\ x_{m+2},\dots,\ x_{n+1} \tag{10}$$

comme fonctions des variables principales $x_1,\ x_2,\dots,\ x_m$.

Supposons, pour démontrer que la solution (10) est unique, que le système (8) admette une seconde intégrale

$$x'_{m+1},\ x'_{m+2},\dots,\ x'_{n+1}, \tag{11}$$

vérifiant les mêmes conditions initiales que la solution (10). On a, de cette manière, outre les relations (9) qui sont identiquement satisfaites par les quantités (10), les nouvelles identités

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x'_{m+r}}{\partial x_k} = X'^k_r, \quad (r=1,2,\dots,n-m+1) \\ \qquad (k=1,2,\dots,m). \end{array}\right\} \tag{12}$$

X'^k_r désignant le résultat de la substitution de la solution (11) en les coefficients X_r^k.

Soustrayons les identités (12) respectivement de celles (9) de mêmes indices. On obtient, grâce au théorème sur les accroissements finis, les nouvelles identités suivantes

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m+1} A_{ri}^k u_i,$$

$$(k=1,2,\dots,m;\ r=1,2,\dots,n-m+1),$$

où l'on a posé

$$u_r \equiv x_{m+r} - x'_{m+r},$$

$$(r=1,2,\ \dots,\ n-m+1),$$

les coefficients A_{ri}^k représentant les fonctions des variables principales.

Considérons le système correspondant d'équations aux différentielles totales, traitant les fonctionns u_r comme fonctions inconnues

$$\left.\begin{array}{l} du_r = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m+1} A_{ri}^{k} u_i \right) dx_k, \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m+1). \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Le système obtenu (13) est aux différentielles totales complètement intégrable linéaire et homogène, par rapport aux variables paramétriques $u_1, u_2, \ldots, u_{n-m+1}$. Par conséquent, l'intégrale générale de ce dernier système se présente sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} u_r = \sum_{j=1}^{n-m+1} C_j u_{rj}, \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m+1) \end{array}\right\} \qquad (14)$$

C_j étant des constantes arbitraires et les u_{rj} désignant les solutions particulières du système considéré vérifiant la condition (3). Pour en tirer l'intégrale de Cauchy s'annulant pour les valeurs initiales des variables principales, formons les conditions correspondantes

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n-m+1} C_j u_{rj}^{0} = 0, \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m+1) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

u_{rj}^0 désignant les valeurs initiales des solutions u_{rj} appartenant au domaine de régularité des équations (8). Par conséquent, la condition (3) doit de même avoir lieu pour les valeurs initiales des variables principales. On obtiendra, dans cette dernière hypothèse, le système (15) étant linéaire et homogène par rapport aux quantités des C_j, leurs valeurs

$$C_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-m+1).$$

Alors, les formules (14) deviennent

$$u_r = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-m+1).$$

On en conclut que, contrairement à l'hypothèse introduite, le système étudiée (8) ne peut pas avoir une seconde intégrale de Cauchy, pour les mêmes valeurs initiales des variables. L'intégrale de Cauchy est donc unique.

CHAPITRE II

INTÉGRATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES, LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS PAR RAPPORT AUX VARIABLES PARAMÉTRIQUES

3. Solutions particulières. — Certains cas particuliers des équations considérées ont été étudiés par *E. Goursat, P. Appell* et *N. Saltykow* signalés antérieurement. Leur théorie générale est exposée au chapitre précédent.

Il s'agit, dans les pages qui vont suivre, d'étendre la théorie classique des équations linéaires différentielles ordinaires à coefficients constants, aux équations aux différentielles totales

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} a_{ri}^{k}\, x_{m+i} \right) dx_k , \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

les coefficients a_{ri}^k, à trois indices, k, r et i, étant constants.

On va chercher les solutions particulières du système (1) sous la forme suivante

$$x_{m+r} = \alpha_r\, e^{\sum_{k=1}^{m} \theta_k x_k,} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m) \qquad (2)$$

les α_r et θ_k désignant des quantités constantes.

Identifiant le résultat de la substitution des expressions (2) dans (1), le facteur commun

$$e^{\sum_{k=1}^{m} \theta_k x_k},$$

étant distinct de zéro, on obtient les identités suivantes

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_r\, \theta_k - \sum_{i=1}^{n-m} a_{ri}^{k}\, \alpha_i \right) dx_k = 0,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-m)$$

Or, les variables principales x_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ étant indépendantes, il en résulte les nouvelles identités

$$\sum_{i=1}^{n-m} a_{ri}^k \alpha_i - \alpha_r \theta_k = 0, \quad (k=1, 2, \ldots, m),$$
$$(r=1, 2, \ldots, n-m)$$

Les relations obtenues servent à définir les valeurs des α_r et θ_k. On mettra ces dernières équations, tout d'abord, sous la forme suivante

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11}^k-\theta_k)\alpha_1 + a_{12}^k \alpha_2 + \ldots + a_{1,n-m}^k \alpha_{n-m} = 0, \\
a_{21}^k \alpha_1 + (a_{22}^k - \theta_k)\alpha_2 + \ldots + a_{2,n-m}^k \alpha_{n-m} = 0, \\
\quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \\
a_{n-m,1}^k \alpha_1 + a_{n-m,2}^k \alpha_2 + \ldots + (a_{n-m,n-m}^k - \theta_k)\alpha_{n-m} = 0, \\
\qquad (k=1, 2, \ldots, m)
\end{array}\right\} \quad (3)$$

On vient de former ainsi m systèmes, chacun contenant $n-m$ équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités inconnues

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-m} \qquad (4)$$

impliquant de plus l'inconnue θ_k.

Chaque système considéré contient, en réalité, $n-m$ inconnues représentant les quotients des $n-m-1$ des quantités (4) par rapport à l'une d'elles et en plus, l'inconnue θ_k.

On va les traiter de la manière suivante.

Considérons, tout d'abord, un système d'équations (3) correspondant, à une valeur quelconque de indice k, soit à la valeur de ce dernier égale à 1, sans diminuer par cette hypothèse la généralité des considérations, car il nous appartient de ranger les équations (3) dans l'ordre qui nous plait.

L'élimination des quantités inconnues (4) du système des $n-m$ équations, correspondant à la valeur 1 de l'indice k, produit, pour définir l'inconnue θ_1, l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1-\theta_1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1,n-m}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1-\theta_1 & \cdots & a_{2,n-m}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-m,1}^1 & a_{n-m,2}^1 & \cdots & a_{n-m,n-m}^1-\theta_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

On en tire $n-m$ racines que l'on va désigner par

$$\theta_{11}, \quad \theta_{12}, \cdots, \theta_{1,\, n-m}. \tag{6}$$

Supposons que toutes ces racines soient distinctes. Conformément à $n-m$ valeurs distinctes (6) que l'on désignera par θ_{ij}, il résulte, des équations (3) correspondant à l'indice $k=1$, le système suivant pour définir les valeurs des coefficients α_{1j}:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}^1-\theta_{1j})\,\alpha_{1j}+a_{12}^1\alpha_{2j}+\cdots+a_{1,\,n-m}^1\alpha_{n-m,\,j}=0, \\ a_{21}^1\,\alpha_{1j}+(a_{22}^1-\theta_{1j})\,\alpha_{2j}+\cdots+a_{2,\,n-m}^1\alpha_{n-m,\,j}=0, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{n-m,1}^1\,a_{1j}+a_{n-m,2}^1\,\alpha_{2j}+\cdots+(a_{n-m,\,n-m}^1-\theta_{1j})\,\alpha_{n-mj,}=0. \\ \quad\quad (j=1,\ 2,\ldots,\ n-m) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Grâce à l'identité que devient l'équation (5) en y remplaçant θ_1 par l'une des racines (6), θ_{1j}, l'une des équations (7) représente la conséquence des autres.

De cette manière il est aisé d'attribuer à l'un des coefficients α_{rj} une valeur quelconque bien déterminée; on posera, par exemple,

$$\alpha_{1j}=1, \quad (j=1,2,\ldots,n-m). \tag{8}$$

Tous les autres coefficients

$$\alpha_{rj}, \ (r=2,3,\ldots,n-m;\ j=1,2,\ldots,n-m)$$

obtiennent les valeurs bien déterminées.

Cela étant, considérons les autres équations des systèmes (3) correspodant aux valeurs 2, 3,..., m de l'indice k.

Tous les coefficients α_{rj} étant connus, une des équations, correspondant à la valeur 2, 3,....,m de k, va donner les valeurs correspondantes de θ_{2j}, $\theta_{3j}, \ldots, \theta_{mj}$ et cela pour chaque valeur du second indice j.

Quant aux autres équations qui restent, elles deviennent les conséquences algébriques des équations antérieurement résolues, grâce aux conditions de l'intégrabilité complète des équations étudiées (1), comme on va le voir.

4. Compatibilité des équations caractéristiques. — Considérons, pour fixer les idées, le système des deux équations complètement intégrables de la forme générale

$$\left.\begin{aligned} dy_1 &= (a^1_{11} y_1 + a^1_{12} y_2)\, dx_1 + (a^2_{11} y_1 + a^2_{22} y_2)\, dx_2, \\ dy_2 &= (a^1_{21} y_1 + a^1_{22} y_2)\, dx_1 + (a^2_{21} y_1 + a^2_{22} y_2)\, dx_2, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

tous les coefficients a étant distincts de zéro.

En écrivant les conditions de compatibilité de ce dernier système, on n'obtient que deux identités suivantes qui sont distinctes

$$a^2_{21}\, a^1_{12} - a^1_{21}\, a^2_{12} = 0, \qquad (10)$$

$$a^2_{12}\, (a^1_{22} - a^1_{11}) + a^1_{12}\, (a^2_{11} - a^2_{22}) = 0. \qquad (11)$$

Cela étant, formons les deux systèmes correspondants, dans le cas considéré, aux équations (3)

$$\left.\begin{aligned} (a^1_{11} - \theta_1)\, \alpha_1 + a^1_{12}\, \alpha_2 &= 0, \\ a^1_{21}\, \alpha_1 + (a^1_{22} - \theta_1)\, \alpha_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} (a^2_{11} - \theta_2)\, \alpha_1 + a^2_{12}\, \alpha_2 &= 0, \\ a_{21}\, \alpha_1 + (a^2_{22} - \theta_2)\, \alpha_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Il suit du système (12) l'équation quadratique pour définir θ_1 sous la forme

$$\theta^2_1 - (a^1_{11} + a^1_{22})\, \theta_1 + a^1_{11}\, a^1_{22} - a^1_{21}\, a^1_{12} = 0,$$

$$\theta_{1j} = \frac{1}{2}\left(a^1_{11} + a^1_{22} \pm R\right), \quad R \equiv \sqrt{(a^1_{11} - a^1_{22})^2 + 4 a^1_{21} a^1_{12}}, \quad (j = 1, 2)$$

où le signe supériur correspond à $j = 1$, et le signe inférieur à $j = 2$.

En posant, d'autre part, $\alpha_{1j}=1$, $(j=1, 2)$, on obtient du système (12) l'équation que vérifie α_{2j} sous la forme suivante

$$a^1_{12}\alpha^2_{2j}+\left(a^1_{11}-a^1_{22}\right)a_{2j}-\alpha^1_{21}=0, \quad (j=1, 2). \tag{14}$$

D'autre part, la première équation (13) donne, respectivement

$$\theta_{2j}=a^2_{11}+a^2_{12}\alpha_{2j}.$$

Cependant, le système (13) produit la relation suivante que vérifie la valeur du coefficient antérieurment trouvé α_{2j}

$$a^2_{12}\alpha^2_{2j}+\left(a^2_{11}-a^2_{22}\right)\alpha_{2j}+a^2_{21}=0, \quad (j=1, 2). \tag{15}$$

Or, il résulte de l'identité (11) la relation

$$a^2_{11}-a^2_{12}=\left(a^1_{11}-a^1_{22}\right)\frac{a^2_{12}}{a^1_{12}},$$

de sorte que l'équation (15) devient

$$\alpha^2_{12}a^1_{12}\alpha^2_{2j}+\left(a^1_{11}-a^1_{22}\right)a^2_{12}a_{2j}-a^2_{21}a^1_{12}=0.$$

En divisant les membres de cette dernière équation par $a^2{}_2$, elle prend, grâce à l'identité (10), la forme suivante

$$a^1_{12}\alpha^2_{2j}+\left(a^1_{11}-a^1_{22}\right)\alpha_{2j}-a^1_{21}=0, \quad (j=1, 2)$$

identique à celle (14). Il en résulte que les équations (12) et (13) sont compatibles.

La démonstration exposée s'étend aux autres systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales linéaires par rapport aux variables paramétriques à coefficients constants.

5. Intégrale générale. — Le système (3) définit, d'après ce que l'on vient de voir, $(n-m)^2$ solutions particulières du système (1)

$$x_{m+r,j}=\alpha_{rj}\,e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\theta_{kj}\,x_k},$$

$$(r=1, 2,\ldots, n-m; \quad j=1, 2,\ldots, n-m).$$

Pour que ces solutions engendrent le système fondamental des solutions, la condition suivante doit avoir lieu

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,n-m} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3,n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n-m,1} & \alpha_{n-m,2} & \cdots & \alpha_{n-m,n-m} \end{vmatrix} \gtrless 0. \qquad (16)$$

Alors l'intégrale générale du système (1) devient

$$\left.\begin{array}{c} x_{m+r} = \sum\limits_{j=1}^{n-m} C_j \alpha_{rj} e^{\sum\limits_{k=1}^{m} \theta_{kj} x_k}, \\ (r = 1, 2, \ldots, n-m) \end{array}\right\} \qquad (17)$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$ désignant $n-m$ constantes arbitraires, les conditions (8) y étant comprises.

Nous sommes partis de l'hypothèse que toutes les racines de l'équation (5) étaient distinctes, en supposant qu'on parvienne à obtenir, en définitif, le nombre nécessaire des intégrales particulières distinctes, formant le système fondamental. S'il arrivait que les racines de l'équation (5) ne fussent pas distinctes, cela ne signifierait point que l'on ne serait pas en état de former le système fondamental des solutions en profitant d'autres différents systèmes d'équations (3).

Or, si par ce procédé on n'aboutissait pas au résultat voulu, il resterait à appliquer le procédé classique de D'Alembert de différentiation par rapport aux paramètres d'une manière analogue à celle dont on se sert dans la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires.

6. Applications. 1° — Considérons, tout d'abord, le système de *Valyi* que l'on avait traité jusqu'à présent comme non complètement intégrable [5]:

$$\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= q\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + p\,dy, \\ ds &= p\,dx + q\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

On en connait deux intégrales [4]:

$$z - s = C_1, \quad (p+q+s)\, e^{-x-y} = C_2,$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

Par conséquent, le système (18) est réductible à l'ensemble des deux équations

$$\left.\begin{aligned} dp &= q\,dx - (p+q-C_2\, e^{x+y})\,dy, \\ dq &= -(p+q-C_2\, e^{x+y})\,dx + p\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Ce système admettant la solution particulière

$$p = -\frac{1}{3} C_2\, e^{x+y}, \quad q = -\frac{1}{3} C_2\, e^{x+y},$$

son intégration, grâce au № 1, 5°, se réduit à celle d'un système d'équations homogènes linéaires par rapport aux variables paramétriques

$$\left.\begin{aligned} dp &= q\,dx - (p+q)\,dy, \\ dq &= -(p+q)\,dx + p\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Les deux systèmes (3) deviennent, dans le cas actuel, respectivement

$$\left.\begin{aligned} -\theta_1 \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 - (1+\theta_1)\,\alpha_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} -(1+\theta_2)\,\alpha_1 - \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 - \theta_2 \alpha_2 &= 0. \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Les équations (21) produisent l'équation en θ_1:

$$\theta_1^2 + \theta_1 + 1 = 0, \tag{23}$$

d'où il résulte

$$\theta_{1j} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (j = 1, 2) \tag{24}$$

le signe supérieur correspondant à $j=1$ et l'inférieur à $j=2$, de sorte que l'on tire des équations (21)

$$\alpha_{1j} = 1, \quad \alpha_{2j} = \theta_{1j}, \quad (j = 1, 2). \tag{25}$$

Substituant ces valeurs en la seconde équation (22) on a pour définir les valeurs correspondantes des θ_2, les relations suivantes

$$\theta_{2j} = \frac{1}{\theta_{1j}}, \qquad (j = 1, 2). \tag{26}$$

Quant à la première relation (22), elle devient, en vertu de (24),

$$\theta_{1j}^2 + \theta_{1j} + 1 = 0, \quad (j = 1, 2)$$

qui est identiquement vérifiée, grâce à l'identité que l'on obtient en substituant dans l'équation (23) les expressions de ses racines, comme il résulte aussi de la démonstration du № 4.

On obtient ainsi le système de solutions particulières

$$p_1 = e^{\theta_{11}x + \theta_{21}y}, \qquad p_2 = e^{\theta_{12}x + \theta_{22}y},$$
$$q_1 = \theta_{11} e^{\theta_{11}x + \theta_{21}y}, \qquad q_2 = \theta_{12} e^{\theta_{12}x + \theta_{22}y}.$$

C'est un système fondamental, car le déterminant correspondant (16) devient actuellement, grâce aux formules (25) et (24),

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \theta_{11} & \theta_{12} \end{vmatrix} = \theta_{12} - \theta_{11} = -i\sqrt{3} \lesseqgtr 0.$$

Par conséquent, l'intégrale générale du système étudié (20) devient

$$p = C_1 e^{\theta_{11}x + \theta_{21}y} + C_2 e^{\theta_{12}x + \theta_{22}y},$$
$$q = C_1 \theta_{11} e^{\theta_{11}x + \theta_{21}y} + C_2 \theta_{12} e^{\theta_{12}x + \theta_{22}y},$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires, les autres constantes étant définies par les formules (24), (25), et (26).

Pour avoir l'intégrale générale du système (19) il n'y a qu'à ajouter, d'après le № 1, 5°, à l'intégrale générale obtenue la solution particulière du système (19), citée plus haut.

Revenons à présent au système (18) qu'il est de même aisé d'intégrer immédiatement sans introduire les intégrales connues, dont nous avons profité antérieurement.

Composons, d'abord, le tableau suivant des valeurs des coefficients du système (18), conformément aux notations générales

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}^1=0, & a_{12}^1=1, & a_{13}^1=0, & a_{14}^1=0,\\
a_{21}^1=0, & a_{22}^1=0, & a_{23}^1=1, & a_{24}^1=0,\\
a_{31}^1=0, & a_{32}^1=0, & a_{33}^1=0, & a_{34}^1=1,\\
a_{41}^1=0, & a_{42}^1=1, & a_{43}^1=0, & a_{44}^1=0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}^2=0, & a_{12}^2=0, & a_{13}^2=1, & a_{14}^2=0,\\
a_{21}^2=0, & a_{22}^2=0, & a_{23}^2=0, & a_{24}^2=1,\\
a_{31}^2=0, & a_{32}^2=1, & a_{33}^2=0, & a_{34}^2=0,\\
a_{41}^2=0, & a_{42}^2=0, & a_{43}^2=1, & a_{44}^2=0.
\end{array}
$$

Les deux systèmes (3) corespondant au système étudié (18) deviennent actuellement

$$
\left.\begin{array}{r}
-\theta_1\alpha_1+\alpha_2=0,\\
-\theta_1\alpha_2+\alpha_3=0,\\
-\theta_1\alpha_3+\alpha_4=0,\\
\alpha_2-\theta_1\alpha_4=0;
\end{array}\right\}\qquad(27)
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
-\theta_2\alpha_1+\alpha_3=0,\\
-\theta_2\alpha_2+\alpha_4=0,\\
\alpha_2-\theta_2\alpha_3=0,\\
\alpha_2-\theta_2\alpha_4=0.
\end{array}\right\}\qquad(28)
$$

Il résulte du système (27) l'équation caractéristique pour définir θ_1,

$$\theta_1(\theta_1^3-1)=0. \qquad (29)$$

Les racines de cette équation admettent les valeurs, conformément aux notations introduites antérieurement,

$$\theta_{11}=0,\quad \theta_{12}=1,\quad \theta_{13}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad \theta_{14}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent, les trois premières équations (27) produisent les valeurs correspondantes des coefficients

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_{11}=1, & \alpha_{21}=0, & \alpha_{31}=0, & \alpha_{41}=0, \\ \alpha_{12}=1, & \alpha_{22}=1, & \alpha_{32}=1, & \alpha_{42}=1, \\ \alpha_{13}=1; & \alpha_{23}=\theta_{13}, & \alpha_{33}=\theta_{13}^{2}, & \alpha_{43}=\theta_{13}^{3}, \\ \alpha_{14}=1, & \alpha_{24}=\theta_{14}, & \alpha_{34}=\theta_{14}^{2}, & \alpha_{44}=\theta_{14}^{3}. \end{array}\right\} \quad (30)$$

Cela étant, la première équation (28) nous donne les valeurs correspondantes de l'exposant θ_2

$$\theta_{21}=0, \quad \theta_{22}=1, \quad \theta_{23}=\theta_{13}^{2}, \quad \theta_{24}=\theta_{14}^{2}. \qquad (31)$$

Quant aux dernières équations (28), il résulte, conformément à la théorie générale, grâce aux expressions trouvées (30) et (31), les conclusions suivantes:

1° lesdites équations sont identiquement vérifiées pour la première valeur (31) de $\theta_{21}=0$;

2° les équations correspondantes, pour $\theta_{22}=1$, deviennent des identités

$$-\alpha_{22}+\alpha_{42}=0, \quad \alpha_{22}-\alpha_{32}=0, \quad \alpha_{32}-\alpha_{42}=0;$$

3° pour $\theta_{23}=\theta_{13}^{2}$, les équations en question se présentent sous la forme suivante

$$-\theta_{13}^{2}\alpha_{23}+\alpha_{43}=0, \quad \alpha_{23}-\theta_{23}\alpha_{33}=0, \quad \alpha_{34}-\theta_{23}\alpha_{43}=0;$$

la première relation est identiquement vérifiée, les deux dernières s'annulant identiquement, vu les valeurs des racines de l'équation caractéristique (29);

4° en posant $\theta_{24}=\theta_{14}^{2}$, les trois dernières équations (28) deviennent

$$-\theta_{24}\theta_{14}+\alpha_{41}=0, \quad \theta_{14}-\theta_{24}\alpha_{34}=0, \quad \alpha_{24}-\theta_{24}\alpha_{44}=0;$$

la première de ces dernières relations est une identité et les deux dernières sont vérifiées identiquement, grâce aux valeurs des racines de l'équation caractéristique (29).

Cela posé, on obtient respectivement les solutions particulières suivantes:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{x+y}, \quad z_3 = e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y}, \qquad z_4 = e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y},$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = e^{x+y}, \quad p_3 = \theta_{13}\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y}, \quad p_4 = \theta_{14}\, e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y},$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = e^{x+y}, \quad q_3 = \theta_{14}\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y}, \quad q_4 = \theta_{13}\, e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y},$$

$$s_1 = 0, \quad s_2 = e^{x+y}, \quad s_3 = e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y}, \qquad s_4 = e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y}.$$

Les solutions citées engendrent le système fondamental, car on a pour la valeur correspondante du déterminant (16)

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \theta_{13} & \theta_{14} \\ 0 & 1 & \theta_{14} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\theta_{13} + \theta_{13} - 2)(\theta_{13} - \theta_{14}) = -3i\sqrt{3} \lesseqgtr 0.$$

Par conséquent, l'intégrale générale du système (18) se présente sous la forme suivante

$$\begin{aligned} z &= C_1 + C_2\, e^{x+y} + C_3\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y} + C_4 e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y}, \\ p &= \phantom{C_1 +{}} C_2\, e^{x+y} + C_3\, \theta_{13}\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y} + C_4\, \theta_{14}\, e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y}, \\ q &= \phantom{C_1 +{}} C_2\, e^{x+y} + C_3\, \theta_{14}\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y} + C_4\, \theta_{13}\, e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y}, \\ s &= \phantom{C_1 +{}} C_2\, e^{x+y} + C_3\, e^{\theta_{13}x+\theta_{14}y} + C_4\, e^{\theta_{14}x+\theta_{13}y}, \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 désignant quatre constantes arbitraires.

On trouvera la solution du même système (18) sous une autre forme au *Bul. de la Société mathématique de France* [4].

2° — Considérons, comme second application, l'équation de *Moutard*

$$s + mz = 0,$$

m désignant le coefficient constant.

Le problème de la recherche de l'intégrale complète de cette dernière équation revient à l'intégration du système des quatre équations aux différentielles totales complètement intégrables linéaires par rapport aux variables paramétriques [2], à savoir

$$\left.\begin{aligned}
&dz = p\,dx + q\,dy\,,\\
&dp = -(C_1 z + t)\,dx - mz\,dy\,,\\
&dq = -mz\,dx + t\,dy\,,\\
&dt = -mq\,dx + (mp - C_1 q)\,dy\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

Les coefficients de formules générales admettent pour les équations étudiées (32), les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{llll}
a^1_{11} = 0, & a^1_{12} = 1, & a^1_{13} = 0, & a^1_{14} = 0,\\
a^1_{21} = -C_1, & a^1_{22} = 0, & a^1_{23} = 0, & a^1_{24} = -1,\\
a^1_{31} = -m, & a^1_{32} = 0, & a^1_{33} = 0, & a^1_{34} = 0,\\
a^1_{41} = 0, & a^1_{42} = 0, & a^1_{43} = -m, & a^1_{44} = -0;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
a^2_{11} = 0, & a^2_{12} = 0, & a^2_{13} = 1, & a^2_{14} = 0,\\
a^2_{21} = -m, & a^2_{22} = 0, & a^2_{23} = 0, & a^2_{24} = 0,\\
a^2_{31} = 0, & a^2_{32} = 0, & a^2_{33} = 0, & a^2_{34} = 1,\\
a^2_{41} = 0, & a^2_{42} = m, & a^2_{43} = -C_1, & a^2_{44} = 0.
\end{array}$$

Il en résulte deux systèmes d'équations des caractéristiques (3) de la forme:

$$\left.\begin{aligned}
&-\theta_1\alpha_1 + \alpha_2 \quad 0,\\
&-C_1\alpha_1 - \theta_1\alpha_2 - \alpha_4 = 0,\\
&-m\alpha_1 - \theta_1\alpha_3 = 0,\\
&\qquad -m\alpha_3 - \theta_1\alpha_4 = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\theta_2\alpha_1 + \alpha_3 = 0,\\
&-m\alpha_1 - \theta_2\alpha_2 = 0,\\
&\qquad -\theta_2\alpha_3 + \alpha_4 = 0,\\
&\qquad -m\alpha_2 - C_1\alpha_3 - \theta_2\alpha_4 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Éliminant les α des équations (33), on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} -\theta_1 & 1 & 0 & 0 \\ -C_1 & -\theta_1 & 0 & -1 \\ -m & 0 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m & -\theta_1 \end{vmatrix} = 0$$

qui prend la forme suivante

$$\theta_1^4 + C_1\theta_1^2 + m^2 = 0 \tag{35}$$

dont les racines seront désignées par θ_{1j}.

La première, troisième et la quatrième équation (33) deviennent alors

$$\theta_{1j}\,\alpha_{1j} - \alpha_{2j} = 0, \quad m\,\alpha_{1j} + \theta_{1j}\,\alpha_{3j} = 0, \quad m\,\alpha_{3j} + \theta_{1j}\,\alpha_{4j} = 0.$$

Il en résulte, en posant $\alpha_{1j} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{2j} = \theta_{1j}, \quad \alpha_{3j} = -\dfrac{m}{\theta_{1j}}, \quad \alpha_{4j} = \dfrac{m^2}{\theta_{1j}^2}, \\ (j = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right\} \tag{36}$$

Les équations (34) deviennent, par conséquent,

$$\left.\begin{array}{l} \theta_{2j} = \alpha_{3j}, \quad m + \alpha_{2j}\,\theta_{2j} = 0, \\ \theta_{2j}\,\alpha_{3j} - \alpha_{4j} = 0, \quad m\,\alpha_{2j} - C_1\,\alpha_{3j} - \theta_{2j}\,\alpha_{4j} = 0, \\ (j = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right\} \tag{37}$$

La première de ces équations donne la valeur, vu les secondes formules (36),

$$\theta_{2j} = -\frac{m}{\theta_{1j}} \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{38}$$

Par conséquent, les secondes et troisièmes relations (37) deviennent identiquement vérifiées.

Quant aux quatrièmes relations (37), elles deviennent

$$m\,\theta_{1j} + C_1\frac{m}{\theta_{1j}} + \frac{m^3}{\theta_{1j}^3} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Or, ces égalités, conformément à la théorie générale, deviennent identiquement satisfaites, si l'on y substitue les expressions des racines θ_{1j} de l'équation (35).

Cela étant, on obtient les solutions particulières suivantes du système considéré (32):

$$\left.\begin{aligned} z_j &= e^{\theta_{1j}x+\theta_{2j}y}, \\ p_j &= \alpha_{2j}\, e^{\theta_{1j}x+\theta_{2j}y}, \\ q_j &= \alpha_{3j}\, e^{\theta_{1j}x+\theta_{2j}y}, \\ t_j &= \alpha_{4j}\, e^{\theta_{1j}x+\theta_{2j}y}, \\ & (j=1,2,3,4). \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Pour démontrer que les solutions obtenues engendrent le système fondamental, calculons le déterminant

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

qui se réduit aisément à la forme suivante

$$D \equiv \frac{m^3}{\theta_{11}^2\,\theta_{12}^2\,\theta_{13}^2\,\theta_{14}^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{11}^2 & \theta_{12}^2 & \theta_{13}^2 & \theta_{14}^2 \\ \theta_{11}^3 & \theta_{12}^3 & \theta_{13}^3 & \theta_{14}^3 \end{vmatrix}.$$

Les racines de l'équation (35) étant toutes distinctes entre elles, le déterminant figurant dans la dernière formule, appartenant à la forme de ceux de *Vandermonde*, est distinct de zéro. La valeur de D étant, de plus, finie et bien déterminée, les solutions (39) engendrent le système fondamental.

Par conséquent, l'intégrale générale du système étudié (32) devient

$$z = C_2 e^{\theta_{11}x+\theta_{21}y} + C_3 e^{\theta_{12}x+\theta_{22}y} + C_4 e^{\theta_{13}x+\theta_{23}y} + C_5 e^{\theta_{14}x+\theta_{24}y},$$

$$\begin{aligned} p = {} & C_2\alpha_{21} e^{\theta_{11}x+\theta_{21}y} + C_3\alpha_{22} e^{\theta_{12}x+\theta_{22}y} + C_4\alpha_{23} e^{\theta_{13}x+\theta_{23}y} + \\ & + C_5\alpha_{24} e^{\theta_{14}x+\theta_{24}y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q = {} & C_2\alpha_{31} e^{\theta_{11}x+\theta_{21}y} + C_3\alpha_{32} e^{\theta_{12}x+\theta_{22}y} + C_4\alpha_{33} e^{\theta_{13}x+\theta_{23}y} + \\ & + C_5\alpha_{34} e^{\theta_{14}x+\theta_{24}y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = {} & C_2\alpha_{44} e^{\theta_{11}x+\theta_{21}y} + C_3\alpha_{42} e^{\theta_{12}x+\theta_{22}y} + C_4\alpha_{43} e^{\theta_{13}x+\theta_{23}y} + \\ & + C_5\alpha_{44} e^{\theta_{14}x+\theta_{24}y}, \end{aligned}$$

C_2, C_3, C_4, et C_5 désignant quatre constantes arbitraires, les θ_{1j} étant les racines de l'équation (35); les α_{rj} admettant les valeurs (36) et les θ_{2j} représentant les expressions (38).

La première formule représente l'intégrale complète de l'équation *de Moutard* considérée, la 5-ième constante arbitraire étant C_1 figurant dans les exposants θ_{rj}.

3. — Comme dernier exemple prenons le système (7) cité au chapitre précédant,

$$\left.\begin{aligned} du &= u\,dx + v\,dy + w\,dz,\\ dv &= v\,dx + w\,dy + u\,dz,\\ dw &= w\,dx + u\,dy + v\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Les coefficients des équations de la forme étudiée (1) admettent, dans le cas considéré, les valeurs particulières suivantes:

$$\begin{array}{lll} a^1_{11} = 1, & a^1_{12} = 0, & a^1_{13} = 0,\\ a^1_{21} = 0, & a^1_{22} = 1, & a^1_{23} = 0,\\ a^1_{31} = 0, & a^1_{32} = 0, & a^1_{33} = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a^2_{11} = 0, & a^2_{12} = 1, & a^2_{13} = 0,\\ a^2_{21} = 0, & a^2_{22} = 0, & a^2_{23} = 1,\\ a^2_{31} = 1, & a^2_{32} = 0, & a^2_{33} = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a^3_{11} = 0, & a^3_{12} = 0, & a^3_{13} = 1,\\ a^3_{21} = 1, & a^3_{22} = 0, & a^3_{23} = 0,\\ a^3_{31} = 0, & a^3_{32} = 1, & a^3_{33} = 0. \end{array}$$

Cela étant, les systèmes (3) se présentent actuellement au nombres des trois systèmes suivants:

$$\left.\begin{aligned} (1-\theta_1)\,\alpha_1 &= 0,\\ (1-\theta_1)\,\alpha_2 &= 0,\\ (1-\theta_1)\,\alpha_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

$$\left.\begin{aligned} -\theta_2\,\alpha_1 + \alpha_2 &= 0,\\ -\theta_2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0,\\ -\theta_2\,\alpha_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} -\theta_3\alpha_1+\alpha_3=0, \\ \alpha_1-\theta_3\alpha_2=0, \\ \alpha_2-\theta_3\alpha_3=0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Le système (41) définit la même valeur pour toutes les trois racines

$$\theta_{11}=\theta_{12}=\theta_{13}=1\,. \tag{44}$$

Quant au système (42), il produit, d'après les conditions (8), les valeurs distinctes:

$$\theta_{21}=1,\quad \theta_{22}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \theta_{23}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11}=1, && \alpha_{21}=1, && \alpha_{31}=1, \\ &\alpha_{12}=1, && \alpha_{22}=\theta_{22}, && \alpha_{32}=\theta_{22}^2=\theta_{23}, \\ &\alpha_{13}=1, && \alpha_{23}=\theta_{23}, && \alpha_{33}=\theta_{23}^2=\theta_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

La première équation du dernier système (43) donne respectivement

$$\theta_{31}=1,\quad \theta_{32}=\theta_{22}^2=\theta_{23},\quad \theta_{33}=\theta_{23}^2=\theta_{22}\,. \tag{47}$$

Quant aux deux dernières équations du système (43), elles sont, conformément à la théorie générale, identiquement vérifiées, grâce aux formules précédentes (44), (45), (46) et (47).

Cela posé, on obtient le système des solutions particulières

$$\begin{aligned} &u_1=e^{x+x+z}, && u_2=e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z}, && u_3=e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z}, \\ &v_1=e^{x+y+z}, && v_2=\theta_{22}\,e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z}, && v_3=\theta_{23}\,e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z}, \\ &w_1=e^{x+y+z}, && w_2=\theta_{23}\,e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z}, && w_3=\theta_{22}\,e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z}, \end{aligned}$$

Le déterminant (16) étant actuellement,

$$D\equiv\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta_{22} & \theta_{23} \\ 1 & \theta_{23} & \theta_{22} \end{vmatrix}=(\theta_{22}+\theta_{23}-2)(\theta_{22}-\theta_{23})=-3\,i\sqrt{3},$$

distinct de zéro, les solutions trouvées engendrent le système fondamental.

Par conséquent, l'intégrale générale du système (40) se présente sous la forme

$$
\begin{aligned}
u &= C_1 e^{x+y+z} + C_2 e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z} + C_3 e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z}, \\
v &= C_1 e^{x+y+z} + C_2 \theta_{22} e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z} + C_3 \theta_{23} e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z}, \\
w &= C_1 e^{x+y+z} + C_2 \theta_{23} e^{x+\theta_{22}y+\theta_{23}z} + C_3 \theta_{22} e^{x+\theta_{23}y+\theta_{22}z},
\end{aligned}
$$

C_1, C_2 et C_3 désignant trois constantes arbitraires.

APPENDICE

Ce mémoire se trouvait sous presse, lorsque parut l'important travail de M. *E. Vessiot* [6] ayant trait à ma méthode exposée dans le présent travail, que j'avais publiée dans une Note des Comptes rendus [7].

M. *E. Vessiot* traite le problème posé d'intégration d'une manière très élégante, en démontrant la compatibilité des équations des caractéristiques que j'avais introduites. Leur nombre étant supérieur à celui des coefficients cherchés, il est aisé, grâce à leur compatibilité, de les grouper de différentes manières afin d'en tirer le système fondamental des solutions requises, de la manière la plus avantageuse qui nous plairait, en nous guidant par l'intuition, comme j'avais montré dans ma Note aux Comptes rendus [7] citée.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] P. Appell. – Séries hypergéométriques de plusieurs variables. Paris, Gauthier-Villars.

[2] N. Saltykow. — Sur l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles du second ordre (Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 12 Septembre 1932).

N. Saltykow. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (Bul. de l'Académie de Belgique, 5-e série, t. XVIII, 1932).

[3] V. Stekloff. — Traité d'intégration des équations différentielles ordinaires, 1927, p. 299 № 11 (en russe).

[4] N. Saltykow. — Systèmes d'équations aux différentielles totales complètement et non complètement intégrables (Bull. de la Société Mathématique de France, t. LXXV, p. 27).

[5] E. Goursat. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2-éd. Paris, 1921, p. 133, 5°.

[6] E. Vessiot. — Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 26 Janvier 1948, Paris.

[7] N. Saltykow. — Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences 22 décembre 1947, Paris.