UNE PROPOSITION SUR LES SINGULARITÉS ESSENTIELLES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Par

M. RADOJČIĆ

1. — Lorsqu'on considère la division en „domaines fondamentaux" des domaines d'existence des fonctions analytiques uniformes appartenant à certaines classes bien connues (fonctions périodiques, fonctions linéairement automorphes) on est amené à constater le fait général que *toute suite infinie de domaines fondamentaux ayant un point limite converge vers ce point* (et jamais vers une ligne).

Ce point est évidemment un point essentiel. Quant à la notion du domaine fondamental, on peut la prendre aussi bien au sens employé dans les fonctions linéairement automorphes que selon notre définition (comme domaine d'univalence; v. [1], p. 85).

Rappelons qu'un point est dit *point limite* d'une suite infinie de domaines situés dans un plan, lorsqu'on peut choisir dans chacun de ces domaines un point de telle sorte, que ces points convergent vers le point considéré (v. [1], p. 100); une suite infinie de domaines situés dans un plan *converge* vers un point, lorsque ce choix peut se faire arbitrairement.

2. — Or, ce fait n'appartient pas seulement aux fonctions linéairement automorphes; certainement, il doit avoir lieu pour les fonctions analytiques d'une classe beaucoup plus large. D'autre part, il peut jouer un rôle décisif dans l'étude des singularités essentielles de ces fonctions. L'une de ses conséquences immédiates serait la circonstance que dans la proximité de chaque point essentiel la fonction se rapproche de toute valeur.

Par conséquent, il serait intéressant de rechercher sous quelles conditions, valables pour les fonctions analytiques les plus générales possibles, pourrait-on conclure que toute suite de domaines fondamentaux ayant un point limite, converge vers ce point. „L'automorphie" pouvant être considérée comme une propriété générale des fonctions analytiques (v. [1], p. 84), c'est bien aux fonctions analytiques générales que cette recherche s'appliquerait.

Considérons donc les fonctions analytiques que nous avons dénommées „fonctions absolument automorphes" (v. [1]).

Envisageons une singularité essentielle S d'une telle fonction ou bien seulement une partie d'une telle singularité, soit S, et supposons la fonction uniforme et méromorphe au voisinage de S. La singularité S pourrait être un continu linéaire quelconque. Lorsque c'est une ligne et non un seul point, nous pouvons, grâce à la transformation conforme, supposer toujours que c'est une circonférence ou un arc de circonférence. Soit D un voisinage quelconque de S, limité par S et par une courbe qui se termine en S ou qui ne se termine pas, de sorte que D soit simplement ou doublement connexe et que la fonction soit uniforme dans D (v. [2]). Le domaine D peut être partagé en domaines fondamentaux, (en y comprenant les domaines qui ne sont pas entièrement contenus dans D) ces domaines ne s'accumulent qu'à la proximité de S, et celà en chaque point de S. On peut toujours supposer que les frontières de ces domaines sont continues, excepté peut-être aux points de S (v. [1], n° 6 et les remarques finales). Or, pour plus de simplicité nous supposerons que la frontière de chaque domaine fondamental est continue partout.

Ceci étant, nous pouvons démontrer la proposition suivante:

Si la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse, qui correspond au voisinage D, a au plus un nombre limité de points de ramification algébriques, alors les sommets de chaque paire de faisceaux transcendants voisins se confondent.

Donc, chaque suite infinie de domaines fondamentaux, qui est situé entre une telle paire de faisceaux, converge vers un point.

3. — Démontrons cette proposition. Soit $\zeta = f(z)$ la fonction considérée et $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse; soient F et F' les deux faisceaux voisins mentionnés, $\zeta = \omega$ et $\zeta = \omega'$ leurs valeurs asymptotiques. Puisque F et F' sont deux faisceaux différents, il y a une infinité de domaines fondamentaux entre un angle quelconque A de F et un angle quelconque A' de F'. En effet, comme nous avons déjà montré ailleurs (v. [2]), si deux angles A et A' appartiennent aux deux faisceaux, les angles situés entre A et A' sont en nombre infini. Soient donc D_n ces domaines fondamentaux ($n = 1, 2, \ldots$).

Évidemment, chaque feuillet d'une surface de Riemann possède sur sa frontière au moins deux points de ramification. Donc, dans la partie de la surface de $\varphi(\zeta)$, qui correspond au voisinage D, d'après les conditions de notre proposition, tout feuillet, excepté un nombre fini, possède à sa frontière uniquement des points de ramification transcendants et en possède au moins deux.

Donc, chaque domaine fondamental situé dans D entre A et A', excepté peut-être un nombre fini de ces domaines, a seulement des sommets transcendants et en a au moins deux. Par conséquent ceci est valable pour les domaines D_n dès que n est assez grand; c. à d., chacun de ces domaines D_n n'a que des angles transcendants et il en a au moins deux. Comme ces angles se trouvent entre A et A' et comme F et F' sont des faisceaux voisins, A et A' appartiennent à F et F'. La seule question qui se pose encore, est de savoir comment ces angles sont-ils distribués parmi les faisceaux F et F'?

4. — Antérieurement nous avons démontré (v. [3], la seconde proposition du n° 3) un lemme, valable dans le cas où D est de „première espèce", c. à d. où chaque domaine fondamental situé dans D, excepté au plus un nombre fini, a au moins un sommet transcendant. Or, cette circonstance a lieu dans notre proposition et nous pouvons la formuler en disant:

Lorsque deux angles transcendants d'un domaine fondamental appartiennent au même faisceau transcendant, ce domaine entoure au moins un domaine fondamental qui n'a qu'un seul angle transcendant.

Remarquons que la démonstration de ce lemme fut indépendante de l'hypothèse que les domaines fondamentaux tendent vers des points, hypothèse non admise dans les considérations présentes.

5. — Revenons à la démonstration de notre proposition. Comme pour n assez grand tout domaine D_n n'a que des angles transcendants et en a au moins deux, on a d'après le lemme précédent que:

1° tout domaine fondamental D_n, excepté peut-être un nombre fini, a au moins un angle dans chacun des deux faisceaux F et F'; car dans le cas contraire il y aurait une infinité de domaines D_n chacun ayant au moins deux angles dans l'un de ces faisceaux; mais alors, d'après le dit lemme, chacun de ces domaines entourerait au moins un domaine à un seul angle transcendant, contrairement à ce que nous disions;

2° tout domaine D_n, excepté peut-être un nombre fini, n'a que deux angles, donc un seul dans chaque faisceau, puisque dans le cas contraire il y aurait une infinité de domaines D_n à deux angles au moins dans l'un des deux faisceaux.

Par conséquent pour n assez grand, chaque domaine D_n a juste deux angles, l'un dans F, l'autre dans F'. Soit D_m l'un de ces domaines. Il s'étend du sommet de F au sommet de F'. Or, ces deux sommets pourraient se confondre ou non. S'ils se

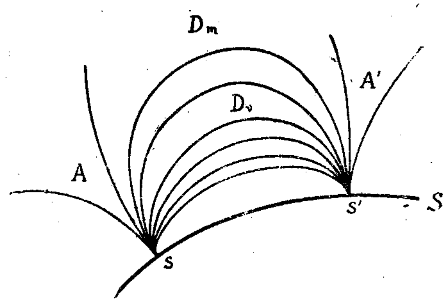

Fig. 1

confondent, D_m entoure et délimite un certain domaine qui fait partie de D. Si ces sommets sont différents, D_m entoure et délimite à l'aide d'un arc de S (puisque S est alors une ligne) un domaine pareil. Quoiqu'il en soit, désignons par P le domaine entouré. Il se trouve entre A et A' (v. fig. 1).

Les domaines D_n dont se compose P forment une suite infinie, soit D_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), telle que D_ν et $D_{\nu+1}$ ont une frontière commune, qui est d'après les considérations précédentes une courbe continue, soit C_ν, reliant le sommet s de F au sommet s' de F' et passant par ces deux faisceaux. Les courbes C_ν convergent vers l'arc (ou le point) ss' et ce qu'il faut démontrer, c'est que cet arc se réduit toujours à un point.

Soit C_0 la courbe faisant la frontière commune entre D_m et P, de sorte que P est limité par C_0 et, peut-être, par un arc de S.

6. — Comme chaque domaine D_ν a deux sommets et transcendants, les feuillets correspondants de la surface de Riemann de la fonction inverse ont sur leur frontières deux points de ramification transcendants, et, comme dans cette partie de la surface le nombre des points de ramification algébriques est au plus fini, nous pouvons supposer que ces deux points transcendants sont les points de ramification uniques situés sur la frontière de chaque feuillet. Il en résulte directement que les coordonnées de ces points, $\zeta = \omega$ et $\zeta = \omega'$ sont différentes, c. à d. $\omega \neq \omega'$.

Soit Π le domaine de la surface de Riemann, qui correspond au domaine P, soient Δ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) les feuillets mentionnés, correspondant aux domaines D_ν et soient Γ_ν les lignes qui correspondent aux courbes C_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Chaque Γ_ν est un arc simple qui relie dans le plan de ζ les points ω et ω'; ce sont bien les seuls points de ramification situés sur Γ_ν. Le domaine Π est limité uniquement par l'arc Γ_0 et il ne contient à son intérieur aucun point de ramification (puisque ce seraient des points algébriques). Donc ω et ω' sont les seuls points de ramification situés sur la frontière de Π.

7. — Il est facile à faire la transformation biunivoque et conforme de Π en un domaine plan. Une telle transformation est accomplie par la fonction

$$u = \log \frac{\zeta - \omega'}{\zeta - \omega}.$$

Les points ω et ω' sont transformés en $u = \infty$, l'arc Γ_0 en une courbe simple „fermée" qui passe par $u = \infty$. Ainsi, à Π correspond un domaine ouvert et simplement connexe, soit U, Il en résulte que la fonction $u[f(z)]$ transmet l'image biunivoque et conforme du domaine P sur le domaine U, et qu'un seul point $u=\infty$ de la frontière de U correspond à l'arc ss' de la frontière de P. Comme ces deux frontières sont continues, la transformation est continue même sur ces frontières. Donc, l'arc ss' se réduit nécessairement à un seul point.

Ainsi la première partie de notre proposition est démontrée. Quant à la seconde, elle est une conséquence immédiate de la première. En effet, il suffit de remarquer que les courbes C_ν doivent converger vers le point $s\equiv s'$ de S. Car il ne peut y avoir un second point dans P ou sur sa frontière, au voisinage duquel pourraient atteindre des points appartenant à une infinité des C_ν (puisque se serait alors un point essentiel et que $s\equiv s'$ est le seul point essentiel dans P ou sur sa frontière).

RÉFÉRENCES

[1] M. Radojčić — Sur une classe de fonctions analytiques (Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, 1, 1932).

[2] M. Radojčić — Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle (Publ. math., Belgrade 4, 1935).

[3] M. Radojčić — Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles (Bulletin de la Soc. math. de France, 64, 1936)