PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 68(82) (2000), 108–116

BONNE POSITION AU SENS DE LEVITIN–POLYAK DANS LE CADRE DE LA MINIMISATION DES FONCTIONNELLES INTÉGRALES

D. Mentagui

Communicated by Gradimir Milovanović

ABSTRACT. We investigate the relationship between the Levitin–Polyak well-posedness of the problem of minimization of the integral functional

$$I : x \in L^1(T) \to \int_T f(t, x(t))\, dt$$

on the set $U = \{x : T \subset R^k \to R^m : x \in L^1(T);\ x(t) \in K(t) \text{ for a.e. } t \in T\}$ of integrable selections of a multifunction $K : t \in T \to K(t) \subset R^m$ and well-posedness of the minimization problem of $f(t, .)$ on $K(t)$. We show that well-posedness of problem $\inf(I, U)$ implies that of $\inf(f(t, .), K(t))$ for a.e. $t \in T$. The converse holds under another assumptions.

1. Introduction

La recherche du minimum d'une fonctionnelle intégrale de la forme

$$I : x \in L^1(T) \to \int_T f(t, x(t))\, dt, \quad x \in U$$

est un sujet très étudié dans de nombreuses branches de mathématiques pures ou appliquées.

Ce sujet a pris un bel essor depuis des années si bien que la bibliographie correspondante contient plusieurs ouvrages. On peut citer entre autres, les travaux de Castaing et Valadier [9], ceux d'Ekeland et Temam [12], puis ceux de Berliocchi et Lasry [4, 5, 6] et Dontchev et Zolezzi [10].

L'objet de cet article est d'étudier le lien entre la bonne position au sens de Levitin–Polyak du problème de minimisation de I sur l'ensemble

$$U = \{x : T \subset R^k \to R^m : x \in L^1(T);\ x(t) \in K(t),\ t \in T \text{ p.p.}\}$$

des sélections intégrables d'une multi-application $K : t \in T \to K(t) \subset R^m$ et celle du problème de minimisation de $f(t, .)$ sur $K(t)$. Notons que ce problème avait été

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 49K40; Secondary 41A50, 49J15, 90C31.

étudié par Zolezzi dans [19] avec la notion de bonne position sens de Tykhonov [18]. Or pour la résolution de nombreux problèmes d'extremum, il existe des méthodes numériques qui génèrent des suites non nécessairement dans l'ensemble des contraintes, mais qui convergent asymptotiquement vers la solution du problème en question. La méthode de pénalisation externe en est un exemple (voir aussi [14]). C'est pour cette raison que Levitin et Polyak (en abrév. L-P) ont introduit dans [15] une autre notion de suites minimisantes: Supposons que I soit définie dans un voisinage de U; une suite $(x_n)_n$ est dite suite minimisante généralisée au sens de Levitin–Polyak du problème de minimisation de I sur U (cette terminologie est prise de [10]), si $d(x_n, U) \to 0$ et $I(x_n) \to \inf(I, U)$. Le problème est dit bien posé au sens de Levitin–Polyak, s'il admet une solution unique et si toute suite minimisante généralisée au sens de L-P converge vers cette solution [10, 15]. Il est évident que si un problème de minimisation est bien posé au sens de L-P alors il est bien posé au sens de Tykhonov. La réciproque est en générale fausse, mais elle a lieu par exmple dans le cas convexe si d'autres hypothèses de qualification sont satisfaites [2, 3, 10].

Nous montrons sous des hypothèses naturelles, que si le problème $\inf(I, U)$ est bien posé au sens de L-P alors le problème $\inf(f(t, .), K(t))$ est bien posé dans le même sens pour presque tout $t \in T$. La réciproque a lieu sous d'autres hypothèses de croissance et d'équi-intégrabilité. Pour la preuve de ces résultats, nous utiliserons une démarche analogue a celle utilisée dans [19].

2. Hypothèses et notations

Soit T un ensemble ouvert ou fermé de R^k de mesure de Lebesgue $\lambda(T) \in]0, +\infty[$. $B(T)$ désignera la σ-algèbre des parties λ-mesurables de T et $B(R^m)$ la tribu borélienne de R^m. Soient une multi-application donnée $K : t \in T \to K(t) \subset R^m$, $U = \{x : T \subset R^k \to R^m : x \in L^1(T);\ x(t) \in K(t),\ t \in T \text{ p.p.}\}$ l'ensemble des sélections intégrables de K et $f : T \times R^m \to [-\infty, +\infty]$ une fonction. Soit $I : L^1(T) \to [-\infty, +\infty]$ la fonctionnelle intégrale définie par $I(x) = \int_T f(t, x(t))\, dt$. Ici l'intégrale est définie au sens de la référence [16].

Dans cet article on s'intéresse au lien entre la bonne position du problème de minimisation de I sur$U$ et celle du problème de minimisation de $f(t, .)$ sur $K(t)$. Ces problèmes seront notés respectivement par (I, U) et $(f(t, .), K(t))$. Dans la suite nous considérons les hypothèses suivantes (les terminologies et définitions sont prises des références [9, 16]):

$\mathbf{H}_1$. $f : T \times R^m \to [-\infty, +\infty]$ est une fonction de Carathéodory;

$\mathbf{H}_2$. $t \in T \to K(t) \subset R^m$ est une multi-application mesurable à images fermées non vides;

$\mathbf{H}_3$. $\exists \varepsilon_0 : \forall q \in L^1(T)$, toute sélection mesurable de la multi-application $t \to A_q(t)$ où $A_q(t) = \{v \in K(t) + B(0, \varepsilon_0) \mid f(t, v) \le q(t)\}$ est dans $L^1(T)$. Ici $B(0, \varepsilon_0)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon ε_0. Cette condition est par exemple remplie si $f(t, x) \ge a|x| + b$ avec $a > 0$ et $b \in L^1(T)$ ou s'il existe $p \in L^1(T)$ tel que $\sup\{|v| \mid v \in K(t) + B(0, \varepsilon_0)\} \le p(t)$. En particulier ceci aura lieu si $K(t) \equiv K$ est un compact fixé.

$\mathbf{H}_4$. La fonction $\Phi : t \to \inf\{f(t,x) \mid x \in K(t)\}$ est dans $L^1(T)$.

Une condition suffisante pour que $\mathbf{H}_4$ soit satisfaite se trouve dans la référence [19].

$\mathbf{H}_5$. I est semi-continue inférieurement (sci) en tout point de U.

Notons aussi, que dans la suite de cet article nous utiliserons fréquemment certains résultats classiques de la théorie des multi-applications notamment le théorème des sélections mesurables établi par plusieurs auteurs. A ce sujet le lecteur est invité à consulter par exemple les références [8, 9, 13, 16, 17].

Remarque 2.1. Comme $K(t) + B(0, \varepsilon_0)$ est un fermé, le corollaire 1.C de [16] (voir aussi [8, 9, 13] pour un cas plus général) et le théorème 2J de la même référence impliquent que la multi-application $t \to A_q(t)$ admet au moins une sélection mesurable pourvu que A_q soit à images fermées non vides.

Définition 2.2 (10). Soient (X, d) un espace métrique, U une partie non vide de X et $I : X \to \overline{R}$ une fonction. On dit que le problème de minimisation (I, U) est bien posé au sens de Levitin–Polyak, si ce problème admet une solution unique x_0 et si toute suite $(x_n)_n$ telle que $d(x_n, U) \to 0$ et $I(x_n) \to I(x_0)$ converge vers x_0.

Lemme 2.3. *Soient (X, d) un espace métrique complet, U une partie fermée non vide de X et $I : X \to \overline{R}$ une fonction sci en tout point de U et minorée sur cet ensemble. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) (I, U) est bien posé au sens de L-P;

(ii) $\operatorname{diam} L(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ avec

$$L(\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, U) \le \varepsilon,\ |I(x) - \inf(I, U)| \le \varepsilon\}$$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$: Il est clair que si (I, U) est bien posé au sens de L-P avec x_0 comme solution alors le problème (G, X) est bien posé au sens de Tykhonov avec x_0 comme solution où

$$G(x) = |I(x) - \inf(I, U)| + d(x, U).$$

Donc d'après [10, Th. 11, p. 5]

$$\operatorname{diam} \varepsilon \cdot \arg\min(G, X) \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Ceci est encore équivalent à

$$\operatorname{diam} L(\varepsilon) \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

puisque

$$L(\varepsilon/2) \subset \varepsilon \cdot \arg\min(G, X) \subset L(\varepsilon).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $d(x_n, U) \to 0$ et $I(x_n) \to \inf(I, U)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\operatorname{diam} L(\delta) < \varepsilon$. Donc pour n assez grand $x_n \in L(\delta)$. Il en résulte que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers un élément $\bar{x}$. Comme U est fermé et I est sci en tout point de U alors $\bar{x} \in U$ et $I(\bar{x}) = \inf(I, U)$, i.e. $\bar{x}$ est une solution du problème (I, U). L'unicité du point minimum est une conséquence immédiate de (ii). □

LEMME 2.4 (19). *Sous les hypothèses (H_1–H_4), les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) x_0 minimise I sur U;

(ii) x_0 est mesurable et $x_0(t)$ minimise $f(t,.)$ sur $K(t)$ pour presque tout $t \in T$.

LEMME 2.5 (1). *Soient $g : (T, B(T)) \to (R^m, B(R^m))$ et $\rho : T \to R^+$ deux fonctions mesurables. Alors:*

1) $t \in T \to B(g(t), \rho(t))$ est une multi-application mesurable;

2) $t \in T \to d(g(t), K(t))$ est mesurable;

3) $t \in T \to \mathrm{proj}_{K(t)}\, g(t) = \{x \in K(t) \mid |x - g(t)| = d(g(t), K(t))\}$ est mesurable. De plus $\mathrm{proj}_{K(t)}\, g(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in T$. Il existe alors une sélection mesurable $r(t) \in K(t)$ telle que $|r(t) - g(t)| = d(g(t), K(t))$.

3. Bonne position des fonctionnelles intégrales

THÉORÈME 3.1. *Supposons que les hypothèses (H_1–H_4) soient satisfaites. Si (I, U) est bien posé au sens de L-P alors $(f(t,.), K(t))$ est bien posé au sens de L-P pour presque tout $t \in T$.*

PROOF. Considérons les ensembles:

$$M(\varepsilon) = \{x \in L^1(T) \mid d(x, U) \le \varepsilon,\ |I(x) - I(x_0)| \le \varepsilon\};$$

$$L(\varepsilon, t) = \{v \in R^m \mid d(v, K(t)) \le \varepsilon,\ |f(t, v) - f(t, x_0(t))| \le \varepsilon t\};$$

où x_0 désigne l'unique point réalisant le minimum de I sur U. D'après les lemmes 2.3 et 2.4 il suffit de montrer que $\mathrm{diam}\, L(\varepsilon, t) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$:

Etape 1. $L(\varepsilon, t)$ est un compact pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et pour presque tout $t \in T$: Si non, il existerait $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et une partie E mesurable de T tels que $\lambda(E) > 0$ et $L(\varepsilon, t)$ soit non borné pour tout $t \in E$. Soit $\alpha : t \in T \to \overline{R}$ une fonction mesurable vérifiant:

$$0 < \alpha(t) < +\infty \ \forall t \in E \ \mathit{et} \ \int_E \alpha(t)\, dt = +\infty.$$

D'après le théorème 2J de [16], la multi-application $t \in T \to \{v \mid |v| \ge \alpha(t)\}$ est mesurable à images fermées. D'autre part, les fonctions $(t, v) \to |f(t, v) - f(t, x_0(t))|$, $(t, v) \to d(v, K(t))$ sont de Carathéodory [16, Prop. 1.A] (voir aussi [9]), donc $t \in T \to L(\varepsilon, t)$ est mesurable à images fermées non vides [16, Th. 2J]. Comme l'ensemble $L(\varepsilon, t) \cap \{v \mid |v| \ge \alpha(t)\}$ est non vide pour tout $t \in E$, il existe une sélection mesurable $\omega(t)$ definie sur E (voir [16, Corollaire 1.C] ou [8, 9, 13]) telle que

$$\omega(t) \in L(\varepsilon, t) \ \mathit{et} \ |\omega(t)| \ge \alpha(t),\ \forall t \in E.$$

Posons

$$u(t) = \begin{cases} \omega(t), & \text{si } t \in E \\ x_0(t), & \text{si } t \notin E \end{cases}$$

Il est clair que u est une sélection mesurable de $L(\varepsilon, t)$ vérifiant

(1) $$u(t) \in K(t) + B(0, \varepsilon_0), \quad f(t, u(t)) \le f(t, x_0(t)) + \varepsilon.$$

D'autre part, le lemme 2.4 et l'hypothèse H_4 impliquent $f(.,x_0(.)) \in L^1(T)$. On en déduit en utilisant H_3 et (1) que $u \in L^1(T)$, par conséquent

$$\begin{aligned} +\infty > \int_T |u(t)|\,dt &= \int_E |u(t)|\,dt + \int_{T-E} |u(t)|\,dt \\ &\geq \int_E \alpha(t)\,dt + \int_{T-E} |x_0(t)|\,dt = +\infty, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $L(\varepsilon,t)$ est compact pour presque tout $t \in T$ et tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$.

Etape 2. diam $L(\varepsilon,t) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ pour presque tout $t \in T$:

Nous avons

$$\operatorname{diam} L(\varepsilon,t) = \max\{|u-v| \mid (u,v) \in L(\varepsilon,t) \times L(\varepsilon,t)\}$$

Comme $t \in T \to L(\varepsilon,t)$ est une multi-application mesurable à images fermées non vides alors $L(\varepsilon,t) \times L(\varepsilon,t)$ l'est aussi [16, Prop. 1I]. Il en résulte que la multi-application

$$t \in T \to \arg\max\{|u-v| \mid (u,v) \in L(\varepsilon,t) \times L(\varepsilon,t)\}$$

est mesurable à images fermées non vides [16, Th. 2K] pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$. Il existe donc deux sélections mesurables $y(t)$, $z(t) \in L(\varepsilon,t)$ telles que

$$\operatorname{diam} L(\varepsilon,t) = |y(t) - z(t)|.$$

De plus nous avons $y, z \in L^1(T)$ d'après H_3 et H_4 et

$$\max(|I(y) - I(x_0)|, |I(z) - I(x_0)|) \leq \varepsilon\lambda(T) \tag{2}$$

D'autre part, par le lemme 2.5 il existe une sélection mesurable $r(t) \in K(t)$ telle que

$$d(y(t), K(t)) = |y(t) - r(t)| \leq \varepsilon \tag{3}$$

Par suite

$$|r(t)| \leq |y(t)| + \varepsilon$$

Ainsi, $r \in L^1(T)$ et donc $r \in U$. En utilisant (3) on obtient alors

$$d(y,U) \leq \|y - r\|_{L^1} \leq \varepsilon\lambda(T) \tag{4}$$

Un même raisonnement appliqué à z montre que

$$d(z,U) \leq \varepsilon\lambda(T) \tag{5}$$

En utilisant (2), (4), (5) on obtient $y, z \in M(\varepsilon\lambda(T))$, par suite

$$\int_T \operatorname{diam} L(\varepsilon,t)\,dt = \int_T |y(t) - z(t)|\,dt = \|y - z\|_{L^1} \leq \operatorname{diam} M(\varepsilon\lambda(T))$$

Comme (I,U) est bien posé au sens de L-P, alors diam $M(\varepsilon\lambda(T)) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ d'après le lemme 2.3. Donc $\|\operatorname{diam} L(\varepsilon,t)\|_{L^1(T)} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Il existe donc une sous-suite $(\varepsilon_k)_k$ telle que diam $L(\varepsilon_k,t) \to 0$ quand $k \to +\infty$ pour presque tout $t \in T$. Comme la suite diam $L(\varepsilon,t)$ décroît avec ε alors diam $L(\varepsilon,t) \to 0$ quand

$\varepsilon \to 0$. Donc le problème $(f(t,.), K(t))$ est bien posé au sens de L-P d'après le lemme 2.3. $\square$

Dans le théorème suivant nous étudions la réciproque du théorème précédent.

THÉORÈME 3.2. *Supposons que les hypothèses (H_1–H_5) soient satisfaites. Alors sous l'une des hypothèses suivantes:*

(A_1): $f(t,x)$ est uniformément Lipschitzienne par rapport à t i.e.:

$$\exists M > 0\ \forall t \in T\ \forall x, y : |f(t,x) - f(t,y)| \leq M|x-y|.$$

ou (A_2): i) $\exists \varepsilon_0 > 0$ et une fonction positive $\alpha(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ tels que: $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\ \forall y \in M(\varepsilon) f(t, x_0(t)) \leq f(t, y(t)) + \alpha(\varepsilon),\ t \in T$ p.p.

ii) $M(\varepsilon_0)$ est équi-intégrable; le problème (I,U) est bien posé au sens de L-P avec x_0 comme solution si $(f(t,.), K(t))$ est bien posé avec $x_0(t)$ comme solution pour presque tout $t \in T$ et x_0 est une fonction mesurable.

PREUVE. D'après le lemme 2.4, x_0 est une solution unique du problème (I,U). Supposons que l'hypothèse (A_1) soit satisfaite et soit $(x_n)_n$ une suite telle que $d(x_n, U) \to 0$ et $I(x_n) \to I(x_0)$. Il existe alors une suite $(u_n)_n$ dans U telle que $\|x_n - u_n\|_{L^1} \to 0$. Par suite

$$|I(x_n) - I(u_n)| \leq \int_T |f(t, x_n(t)) - f(t, u_n(t))|\, dt \leq M \|x_n - u_n\|_{L^1}.$$

Il en résulte que $I(u_n) \to I(x_0)$. Comme (I,U) est bien posé au sens de Tykhonov [19] alors $\|u_n - x_0\|_{L^1} \to 0$ et donc $\|x_n - x_0\|_{L^1} \to 0$.

Maintenant supposons que l'hypothèse (A_2) est satisfaite. Nous allons exploiter la relation existant entre le diamètre de $M(\varepsilon)$ et $L(\varepsilon, t)$. On peut supposer sans nuire à la généralité que $\varepsilon \leq \alpha(\varepsilon) \leq 1$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Soient $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $y \in M(\varepsilon)$. Définissons les ensembles:

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon, y) &= \left\{ t \mid f(t, y(t)) > f(t, x_0(t)) + \sqrt{\alpha(\varepsilon)} \right\} \\
B(\varepsilon, y) &= \left\{ t \mid f(t, y(t)) < f(t, x_0(t)) - \sqrt{\alpha(\varepsilon)} \right\} \\
C(\varepsilon, y) &= \left\{ t \mid d(y(t), K(t)) > \sqrt{\alpha(\varepsilon)} \right\}
\end{aligned}$$

Il est clair que ces ensembles sont mesurables et que $B(\varepsilon, y)$ est un négligeable. D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha(\varepsilon)}\lambda(A) + \int_A f(t, x_0(t))\, dt &\leq \int_A f(t, y(t))\, dt \\
&= \int_T f(t, y(t))\, dt - \int_{T-A} f(t, y(t))\, dt \\
&\leq \int_A f(t, x_0(t))\, dt + \int_{T-A} f(t, x_0(t)) - f(t, y(t))\, dt + \varepsilon
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\sqrt{\alpha(\varepsilon)}\lambda(A) \leq \alpha(\varepsilon) + \alpha(\varepsilon)\lambda(T - A)$ et

$$\lambda(A) \leq \frac{\alpha(\varepsilon)(1 + \lambda(T))}{\sqrt{\alpha(\varepsilon)} + \alpha(\varepsilon)} \leq k\sqrt{\alpha(\varepsilon)} \tag{6}$$

avec $k = 1 + \lambda(T)$. En utilisant l'expression de C on obtient aussi

$$\sqrt{\alpha(\varepsilon)}\lambda(C) \leq \int_T d(y(t), K(t))\, dt$$

Comme $y \in M(\varepsilon)$, il existe $z \in U$ tel que $\|y - z\|_{L^1} \leq 2\varepsilon$. Par conséquent

$$\sqrt{\alpha(\varepsilon)}\lambda(C) \leq \|y - z\|_{L^1} \leq 2\alpha(\varepsilon).$$

Ainsi

$$\lambda(C) \leq 2\sqrt{\alpha(\varepsilon)}. \tag{7}$$

Notons

$$D(y, \varepsilon) = A \cup B \cup C.$$

Si $t \notin D$ alors $y(t) \in L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t)$ de plus compte tenu de (6), (7) nous avons

$$\lambda(D) \leq 2\sqrt{\alpha(\varepsilon)}(1 + k) = \beta(\varepsilon).$$

Il en résulte que si $y, z \in M(\varepsilon)$ il existe un ensemble mesurable E tel que $\lambda(E) \leq 2\beta(\varepsilon)$ et $\forall t \notin E$, $y(t), z(t) \in L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|y - z\|_{L^1} &= \int_T |y(t) - z(t)|\, dt = \int_{T-E} |y(t) - z(t)|\, dt + \int_E |y(t) - z(t)|\, dt \\ &\leq \int_T \operatorname{diam} L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t)\, dt + \int_E |y(t)|\, dt + \int_E |z(t)|\, dt \end{aligned} \tag{8}$$

Mais d'après la preuve du Théorème 3.1 (étape 2) il existe $\eta > 0$ tel que $\operatorname{diam} L(\eta, .) \in L^1(T)$. Donc pour ε assez petit

$$\operatorname{diam} L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t) \leq \operatorname{diam} L(\eta, t);$$

et par le théorème de Lebesgue nous avons

$$\int_T \operatorname{diam} L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t)\, dt \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Maintenant puisque $M(\varepsilon_0)$ est équi-intégrable alors

$$\forall \alpha > 0\ \exists \delta > 0 : \lambda(F) \leq \delta \Rightarrow \sup \left\{ \int_F |a|\, dt \mid a \in M(\varepsilon_0) \right\} < \alpha.$$

Donc pour ε assez petit nous avons $\lambda(E) \leq \delta$, et par (8) on obtient

$$\begin{aligned} \|y - z\|_{L^1} &\leq \int_T \operatorname{diam} L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t)\, dt + 2 \sup \left\{ \int_E |a|\, dt : a \in M(\varepsilon) \right\} \\ &\leq \int_T \operatorname{diam} L(\sqrt{\alpha(\varepsilon)}, t) dt + 2\alpha \end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \operatorname{diam} M(\varepsilon) \leq 2\alpha$$

Par suite diam $M(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. On conclut alors avec le lemme 2.3. □

COROLLARY 3.3. *Supposons que $(f(t,.), K(t))$ soit bien posé au sens de L-P pour presque tout $t \in T$ avec $x_0(t)$ comme solution et x_0 est une fonction mesurable. Supposons en outre que les hypothèses (H_1–H_5) soient satisfaites et*

i) $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $c(\varepsilon_0) > 0$ avec

$$c(\varepsilon) = \inf\left\{ \frac{|I(y) - I(x_0)|}{\rho(y)} : y \in M(\varepsilon) \text{ et } \rho(y) \neq 0 \right\}$$

et

$$\rho(y) = \sup\{|f(t, y(t)) - f(t, x_0(t))| : t \in T;$$

ii) $M(\varepsilon_0)$ est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Alors (I, U) est bien posé au sens de L-P avec x_0 comme solution.

PREUVE. Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Il est clair que la suite $c(\varepsilon)$ croît quand $\varepsilon \downarrow 0$ et $0 < c(\varepsilon) \leq \lambda(T) < +\infty$. Donc $c(\varepsilon) \to l \neq 0$ quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part nous avons

$$c(\varepsilon)\rho(y) \leq |I(y) - I(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in M(\varepsilon)$$

Donc

$$\rho(y) \leq \varepsilon / c(\varepsilon), \quad \forall y \in M(\varepsilon)$$

et $\varepsilon / c(\varepsilon) \to 0$ avec ε. Ainsi, l'hypothèse i-A_2 du théorème précédent est vérifiée. Comme de plus $M(\varepsilon_0)$ est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ alors $M(\varepsilon_0)$ est équi-intégrable [7, 11]. L'hypothèse (A_2) du théorème 3.2 est donc satisfaite, par conséquent (I, U) est bien posé au sens de L-P avec x_0 comme solution. □

References

[1] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] G. Beer and R. Lucchetti, *Solvability for constrained problems*, Quaderno 3/1991. Univ. Degli Studi Milano.

[3] G. Beer and R. Lucchetti, *The epi-distance topology, Continuity and stability results with applications to convex optimization problems*, Math. Oper. Res. 17 (1992), 715-726.

[4] H. Berliocchi et J.M. Lasry, *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par les équations aux dérivées partielles*, C.R. Acad. Sci. Paris Série A 273 (1971), 1222–1225.

[5] H. Berliocchi et J.M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, C.R. Acad. Sci. Paris Série A 1972, 839–842.

[6] H. Berliocchi et J.M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 129–184.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[8] C. Castaing, *Sur les multi-applications mesurables*, Thèse, Caën, 1967.

[9] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics 580, Springer-Verlag, 1977.

[10] A. Dontchev and T. Zolezzi, *Well-posed optimization problems*, Lecture Notes in Mathematics 1543, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[11] R. Edwards, *Functional Analysis*, Holt-Rinehart-Winston, 1965.

[12] I. Ekeland and R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod et Gauthier-Villars, 1974.

[13] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Polish Acad. Sci. 13 (1965), 397–411.

[14] E.S. Levitin and B.T. Polyak, *Constrained minimization methods*, USSR computational Math. and Math. Phys. 6 (1966), 1–50.

[15] E.S. Levitin and B.T. Polyak, *Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems*, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 764–767.

[16] R.T. Rockafellar, *Integral functionals, normal integrands and measurable selections, nonlinear operators and the calculs of variations*, Edited by L. Waelbroeck, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[17] V.A. Rokhlin, *Selected topics from the metric theory of dynamical systems*, Uspekhi Mat. Nauk 4 (1949), 57–128.

[18] R.T. Tykhonov, *On the stability of the functional optimization problem*, USSR Comp. Math. Phys. 6 (1966), 4, 28–33.

[19] T. Zolezzi, *Well-posed optimization problems for integral functionals*, J. Optim. Theory Appl. 31 (1980), 417–430.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Kénitra, B.P. 133
Maroc

(Received 02 07 1998)
(Revised 14 06 2000)