PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 64 (78), 1998, 69–84

О СУЩЕСТВОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА (II)

Небойша Л. Лажетич

Communicated by Miroljub Jevtić

Резюме. В настоящей работе доказана единственость классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения с общими самосопряженными краевыми условиями, существование которого было установлено в работе [**7**]. Получены априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения по начальными условиями и по правой части, а также и расширение самой теоремы о существовании классического решения.

Введение

1. Постановка задачи. Пусть $G = (a,b)$ – конечный интервал вещественной оси $\mathbb{R}$, и пусть T – произвольное положительное число. Мы рассматриваем проблему существования вещественной функции $u = u(x,t)$, которая определена на замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega} = [a,b]\times[0,T]$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + q(x)\,u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \qquad x\in\overline{G}, \tag{2}$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \alpha_{10}\,u(a,t)+\alpha_{11}\,u'_x(a,t)+\beta_{10}\,u(b,t)+\beta_{11}\,u'_x(b,t) &= 0,\\ \alpha_{20}\,u(a,t)+\alpha_{21}\,u'_x(a,t)+\beta_{20}\,u(b,t)+\beta_{21}\,u'_x(b,t) &= 0, \qquad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{3}$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 35A05

Посвящается академику В.А. Ильину по поводу 70 лет жизни.

где $(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \beta_{i0}, \beta_{i1}) \in \mathbb{R}^4$ $(i = 1,2)$ – линейно независимые векторы, и q, φ, ψ, f – вещественные функции. Наше предположение об условиях (3) следующее: формальный оператор Шредингера

$$\mathcal{L}(v)(x) \;=\; -\,v''(x) + q(x)\,v(x), \qquad x \in G, \tag{4}$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \alpha_{10}\,v(a) + \alpha_{11}\,v'(a) + \beta_{10}\,v(b) + \beta_{11}\,v'(b) \;&=\; 0,\\ \alpha_{20}\,v(a) + \alpha_{21}\,v'(a) + \beta_{20}\,v(b) + \beta_{21}\,v'(b) \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{5}$$

определяют *произвольное неотрицательное самосопряженное расширение* этого оператора *с дискретным спектром.* (В самом деле, речь идет о самосопряженном расширении соответствующего симметрического оператора L_0, и мы предполагаем, что потенциал $q = q(x)$ допускает такое расширение (см. [**2**, §18].)

Под *классическим решением* смешанной задачи (1)–(3) понимаем вещественную функцию $u = u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1_u) $u(x,t) \in \mathcal{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$;

2_u) $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в Ω (в обычном классическом смысле);

3_u) $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2)–(3) в обычном классическом смысле.

В этой работе продолжено изучение проблемы классической разрешимости задачи (1)–(3), начтое нами в работе [**7**]. Там доказано существование классического решения, в предположении о том, что соответствующие производные функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют некоторым условиям монотонности, причем эти функции и их производные до соответствующего порядка принимают нулевые значения в концах интервала G. В настоящей работе мы устраним упомянутые "нулевые" условия, изменяя определенным образом некоторые из условий гладкости. Кроме того, мы доказываем единственость классического решения и исследуем проблему устойчивости этого решения.

2. Основные теоремы. Пусть $AC(\overline{G})$ будет класс абсолютно непрерывных на замкнутом интервале $\overline{G} = [a,b]$ функций, а $BV(\overline{G})$ – класс функций, имеющих ограниченную вариацию на этом интервале. Обозначим через $\mathring{W}_p^{(k)}(G)$ множество функций $h(x)$ из класса $W_p^{(k)}(G)$ $(1 \le p < +\infty,\ k \in \mathbb{N})$ таких, что

$$h^{(j)}(a) \;=\; 0 \;=\; h^{(j)}(b), \qquad 0 \le j \le k-1.$$

(Заметим, что $h(x) \in W_p^{(k)}(G)$, если функции $h(x), h'(x), \ldots, h^{(k-2)}(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, $h^{(k-1)}(x) \in AC(\overline{G})$ и $h^{(k)}(x) \in L_p(G)$.)

Будем говорить, что функция $h(x)$, которая определена на множестве $A \subseteq [a,b]$, принадлежит классу *кусочно монотонных функций*, если существует множество $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n(h,A)}\}$ такое, что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n(h,A)} = b$ и функция $h(x)$ является монотонной на множестве $A \cap [x_{i-1}, x_i]$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n(h,A)\}$. В класс кусочно монотонных функций мы включаем и класс монотонных (невозрастающих или неубывающих) на множестве A функций. Функцию $g(x,t)$, определенную на множестве $\mathcal{D}(g) \subseteq \overline{\Omega}$, где

$$\mathcal{D}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{t \in [0,T]} (A_t \times \{t\}),$$

называем *кусочно монотонной равномерно по* $t \in [0,T]$, если она кусочно монотонна на $A_t \subseteq \overline{G}$ для каждого $t \in [0,T]$ и множество $\{n(g, A_t) \in \mathbb{N} \,|\, t \in [0,T]\}$ ограничено сверху. Это свойство назовем свойством $(\mathcal{A})$.

Наконец, будем говорить, что функция $g(x,t)$, определенная на множестве $\overline{\Omega}$, принадлежит классу $BV(\overline{G})$ *равномерно относительно* $t \in [0,T]$, если $g(x,t) \in BV(\overline{G})$ для любого $t \in [0,T]$ и множество $\{V_a^b(g(\cdot,t)) \mid t \in [0,T]\}$ ограничено сверху. Это свойство назовем свойством $(\mathcal{B})$.

Перейдем к точной формулировке основных результатов.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $q(x) \in AC(\overline{G})$.

2) $\varphi(x)$ *принадлежит классу* $W_1^{(3)}(G)$ *и удовлетворяет краевым условиям* (5); $\mathcal{L}(\varphi)(a) = 0 = \mathcal{L}(\varphi)(b)$ *и функция* $\mathcal{L}(\varphi)'(x)$ *либо кусочно монотонна и ограничена на своей области определения, либо принадлежит классу* $BV(\overline{G})$.

3) $\psi(x)$ *принадлежит классу* $W_2^{(2)}(G)$ *и удовлетворяет краевым условиям* (5).

4) $f(x,t),\ f'_t(x,t),\ f''_{t^2}(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$; $f(x,t)$ *принадлежит классу* $\mathring{W}_1^{(1)}(G)$ *для любого* $t \in [0,T]$ *и функция* $f'_x(x,t)$ *либо обладает свойством* $(\mathcal{A})$ *и ограничена на* $\mathcal{D}(f'_x)$, *либо обладает свойством* $(\mathcal{B})$.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) *в виде абсолютно и равномерно сходящегося в* $\overline{\Omega}$ *ряда. Этот ряд можно почленно дифференцировать два раза по переменным* x *и* t (*в любом порядке*). *Так полученные ряды для производных решения сходятся абсолютно и равномерно в прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия из теоремы* 1. *Тогда для классического решения* $u = u(x,t)$ *смешанной задачи* (1)–(3) *справедлива следующая оценка*

$$\max_{x \in \overline{G}} |u(x,t)| \le D\big(\|\varphi\|_{L_1(G)} + \|\varphi''\|_{L_1(G)} + \\ + \|\psi\|_{L_2(G)} + \|\,\|f(\cdot,\tau)\|_{L_p(G)}\,\|_{L_r(0,t)}\big), \qquad t \in [0,T],$$

где $p \in (1,2]$ – *произвольное число и* $1/p+1/r=1$, *а постоянная* D *не зависит от функций* φ, ψ, f .

Замечание 1. Условия 4) можно заменить следующими условиями: 4*) $f(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$; функция $f(x,t) \in W_2^{(2)}(G)$ для любого $t \in [0,T]$ и удовлетворяет краевым условиям (3); функция $J(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_a^b |\, f''_{x^2}(x,t)\,|^2\,dx$ является ограниченной на отрезке $[0,T]$. $\diamondsuit$

Замечание 2. Условия 4) можно заменить и следующими условиями: 4**) $f(x,t)$, $f'_t(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $f(x,0)=0$ для любого $x \in \overline{G}$; $f'_t(x,t)$ принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$ для любого $t \in [0,T]$ и функция $f''_{xt}(x,t)$ либо обладает свойством $(\mathcal{A})$ и ограничена на $\mathcal{D}(f''_{xt})$, либо обладает свойством $(\mathcal{B})$. $\diamondsuit$

Замечание 3. Если $\alpha_{11}\,\beta_{21} - \alpha_{21}\,\beta_{11} \neq 0$, то в 2) можно опустить условие $\mathcal{L}(\varphi)(a) = 0 = \mathcal{L}(\varphi)(b)$, а условия $f(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$ в 4) и $f'_t(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$ в 4**) можно заменить условиями $f(x,t) \in W_1^{(1)}(G)$ и $f'_t(x,t) \in W_1^{(1)}(G)$ соответственно. $\diamondsuit$

Замечание 4. В формулировке условий 4) основной теоремы из работы [**7**] опечаткой опущено условие ограниченности на $\mathcal{D}(f'_x)$ функции $f'_x(x,t)$ (в сочетании со свойством $(\mathcal{A})$), а в замечании 2 там же опущено условие ограниченности на $\mathcal{D}(f''_{xt})$ функции $f''_{xt}(x,t)$ (в сочетании со свойством $(\mathcal{A})$. $\diamondsuit$

Напомним, что в последующей работе мы рассмотрим соответствующую смешанную задачу для одномерного параболического уравнения второго порядка.

3. Вспомогательные утверждения. Доказательства наших теорем базируются на некоторых результатах, полученных разными авторами, которые мы приводим ниже.

Рассмотрим неотрицательное самосопряженное расширение оператора (4) с потенциалом $q(x) \in L_1(G)$, определенное (самосопряженными) краевыми условиями (5); его спектр является дискретным. Обозначим через $\{v_n(x)\}_1^\infty$ ортонормированную и полную в $L_2(G)$ систему собственных функций этого расширения, а через $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – соответствующую систему неотрицательных собственных значений, занумерованных в порядке неубывания. (По определению, $v_n(x)$ и $v'_n(x)$ абсолютно непрерывные на замкнутом интервале $\overline{G}$ функции, $\mathcal{L}(v_n)(x) \in L_2(G)$, функция $v_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\,v''_n(x) \;+\; q(x)\,v_n(x) \;=\; \lambda_n\,v_n(x) \tag{6}$$

почти всюду в G, и эта функция удовлетворяет соответствующим краевым условиям (5).) Тогда имеют место следующие утверждения.

Предложение 1 (В.А. Ильин, И. Йо [**3**]). *Если* $q(x) \in L_1(G)$, *то существует независящая от* $n \in \mathbb{N}$ *постоянная* $C_0 > 0$ *такая, что*

$$\max_{x \in \overline{G}} |\, v_n(x) \,| \ \le \ C_0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Предложение 2 (В.А. Ильин, И. Йо [**3**]). *Если* $q(x) \in L_p(G)$ $(p > 1)$, *то существует постоянная* $A > 0$ *такая, что*

$$\sum_{t \le \sqrt{\lambda_n} \le t+1} 1 \ \le \ A \tag{8}$$

для любого $t \ge 0$, *причем* A *не зависит от* t.

Предложение 3 (Н. Лажетич [**5**]). *Предположим, что* $q(x) \in \mathcal{C}(\overline{G})$. *Тогда собственные функции* $v_n(x)$ *обладают непрерывной второй производной, удовлетворяют уравнению* (6) *всюду в* G, *и существуют постоянные* $C_j > 0$ $(j = 1, 2)$, *независимые от* $n \in \mathbb{N}$ *и такие, что*

$$\max_{x \in \overline{G}} |\, v_n^{(j)}(x) \,| \ \le \ \begin{cases} C_j\, \lambda_n^{j/2}, & \text{если} \quad \lambda_n > 1, \\ C_j, & \text{если} \quad 0 \le \lambda_n \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Кроме приведенных выше оценок, важную роль в доказательствах играют оценки коэффициентов Фурье функций из рассматриваемых нами классов. Эти оценки позволяют получить информацию о равномерной сходимости спектральных разложений (для этих функций) и их производных на всем замкнутом интервале $\overline{G}$, что имеет самостоятельный интерес. Поэтому мы сформулируем здесь соответствующее утверждение, представляющее расширение предложения 4 из работы [**7**].

Предложение 4. (*a*) *Пусть* $q(x) \in L_p(G)$ $(1 < p \le 2)$ *и* $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$. *Если* $h'(x)$ *является ограниченной и кусочно монотонной на своей области определения функцией, или* $h'(x) \in BV(\overline{G})$, *то справедливо разложение*

$$h(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} h_n\, v_n(x), \qquad \text{где} \quad h_n \overset{\text{def}}{=} \int_a^b h(x)\, v_n(x)\, dx,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно в $\overline{G}$.

(*b*) *Пусть* $q(x) \in L_2(G)$. *Если* $h(x) \in W_2^{(2)}(G)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяет краевым условиям* (5), *то имеют место разложения*

$$h^{(j)}(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} h_n\, v_n^{(j)}(x), \qquad j = 0,\, 1,$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{G}$.

(*c*) *Пусть* $q(x) \in AC(\overline{G})$, $h(x) \in W_1^{(3)}(G)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяет краевым условиям* (5). *Если* $\mathcal{L}(h)(a) = 0 = \mathcal{L}(h)(b)$ *и* $\mathcal{L}(h)'(x)$ *является ограниченной и кусочно монотонной на своей области определения функцией, или* $\mathcal{L}(h)'(x)$ *принадлежит классу* $BV(\overline{G})$, *то равномерно относительно* $x \in \overline{G}$ *справедливы равенства*

$$h^{(j)}(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} h_n\, v_n^{(j)}(x), \qquad j = 0,\, 1,\, 2,$$

и указанные ряды сходятся абсолютно в $\overline{G}$.

Замечание 5. Предположим, что $\alpha_{11}\,\beta_{21} - \alpha_{21}\,\beta_{11} \neq 0$. Тогда в утверждении (a) условие $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$ можно заменить на $h(x) \in W_1^{(1)}(G)$. Кроме того, в утверждении (c) можно опустить условие $\mathcal{L}(h)(a) = 0 = \mathcal{L}(h)(b)$. $\Diamond$

Мы будем пользоваться и известным неравенством Рисса. Пусть $\{w_n(x)\}_1^{\infty}$ – ортонормированная на G система (комплекснозначных) функций, равномерно ограниченных на конечном интервале $G = (a, b)$: существует постоянная $M > 0$, независящая от $n \in \mathbb{N}$ и такая, что $\sup_{x\in G} |w_n(x)| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $g(x) \in L_p(G)$ $(1 < p \leq 2)$, то коэффициенты Фурье $g_n = \int_a^b g(x)\,\overline{w_n(x)}\,dx$ удовлетворяют неравенству

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\, g_n\,|^r\right)^{1/r} \ \leq \ M^{(2/p-1)}\, \|\, g\,\|_{L_p(G)}, \tag{10}$$

где $1/p + 1/r = 1$ (см. [**1**, с. 154]).

§**1. Доказательство предложения 4**

1. Утверждение (a). Это утверждение является, по существу, утверждением (a) предложения 4 из работы [**7**]. Там доказано, что для функции $h(x)$, обладающей указанными свойствами, справедлива оценка

$$|\, h_n\,| \ \leq \ K(G, h', q) \cdot \frac{1}{\lambda_n}\,, \qquad \lambda_n \neq 0, \tag{11}$$

причем постоянная $K(G, h', q)$ принимает одно из трех значений, определенных равенствами (14)–(16) в [**7**]. При помощи этой оценки доказывается утверждение (a) (см. ниже).

Поэтому нам осталось рассмотреть только случай, когда выполнено условие

$$\alpha_{11}\,\beta_{21} - \alpha_{21}\,\beta_{11} \neq 0,$$

упомянутое в замечании 5. Пусть $\lambda_n \neq 0$. Тогда, используя дифференциальное уравнение (6) и интегрирование по частям, получим равенства

$$
\begin{aligned}
h_n &= \int_a^b h(x)\, v_n(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \Big(- \int_a^b h(x)\, v_n''(x)\, dx \ + \ \int_a^b h(x)\, q(x)\, v_n(x)\, dx \Big) \qquad (12) \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \Big(- \, h(x)\, v_n'(x) \ \Big|_a^b \ + \ \int_a^b h'(x)\, v_n'(x)\, dx \ + \ \int_a^b h(x)\, q(x)\, v_n(x)\, dx \Big).
\end{aligned}
$$

В силу указанного условия, уравнения (5) однозначно разрешими относительно $v_n'(a)$ и $v_n'(b)$:

$$
\begin{aligned}
v_n'(a) &= R_{1a}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})\, v_n(a) + R_{1b}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})\, v_n(b), \\
v_n'(b) &= R_{2a}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})\, v_n(a) + R_{2b}(\alpha_{ij}, \beta_{ij})\, v_n(b),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

причем постоянные R не зависят от n. Воспользуемся теперь оценками (7). Из предыдущих равенств получим, что

$$
\big|\, h(b)\, v_n'(b) - h(a)\, v_n'(a) \,\big| \ \leq \ 2\, C_0\, R_0 \,\big(\, |\, h(a)\,| + |\, h(b)\,|\,\big),
$$

причем $R_0 \overset{\text{def}}{=} \max \{\, |\, R_{ka}(\cdot)\,|, \, |\, R_{kb}(\cdot)\,| \ | \ k = 1, 2 \,\}$

В дальнейшем доказательство проводится как в пункте 1 §1 [**7**]. Таким образом получается оценка типа (11), в которой фигурирует положительная постоянная $K(G, h, h', q)$, имеющая следующее значение:

$$
K(G, h, h', q) \ \overset{\text{def}}{=} \ 2\, C_0\, R_0 \,\big(\, |\, h(a)\,| + |\, h(b)\,|\,\big) + K(G, h', q).
$$

При помощи полученной оценки доказывается, как в случае $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(G)$ (см. (17) в работе [**7**], или пункт 3 ниже), что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n\, v_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно в отрезке $\overline{G}$. В силу полноты ортонормированной системы $\{v_n(x)\}_1^{\infty}$ и непрерывности функции $h(x)$, суммой этого ряда будет функция $h(x)$.

2. Утверждение (b). Предположим, что функция $h(x)$ принадлежит классу $W_2^{(2)}(G)$ и удовлетворяет краевым условиям (5). Выполняя интегрирование по частям, из (12) получим равенства

$$
\begin{aligned}
h_n &= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_a^b h(x)\, \mathcal{L}(v_n)(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \Big(- \, h(x)\, v_n'(x) \Big|_a^b \ + \ h'(x)\, v_n(x) \Big|_a^b \ + \ \int_a^b \mathcal{L}(h)(x)\, v_n(x)\, dx \Big),
\end{aligned}
$$

причем $\lambda_n \neq 0$. Так так функция $v_n(x)$ тоже удовлетворяет краевым условиям (5), а эти условия являются самосопряженными, то двойные подстановки исчезают. Таким образом, из предыдущих равенств вытекает, что

$$h_n \;=\; \frac{1}{\lambda_n}\cdot\int\limits_a^b \mathcal{L}(h)(x)\,v_n(x)\,dx. \tag{14}$$

Абсолютная и равномерная в отрезке $\overline{G}$ сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n v_n^{(j)}(x)$ (для $j=0,1$) вытекает из следующей формальной цепочки равенств и неравенств

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\,h_n\,v_n^{(j)}(x)\,| \;&=\; \sum_{0\le\sqrt{\lambda_n}\le 1}(\cdot) \;+\; \sum_{\sqrt{\lambda_n}>1}(\cdot)\\
&\le\; (b-a)\,A\,C_0\,C_j\,\|h\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} \;+\; C_j\cdot\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1}\frac{|\,\mathcal{L}(h)_n\,|}{\lambda_n^{(2-j)/2}} \;\le\\
&\le\; D_1 \;+\; C_j\cdot\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}|\,\mathcal{L}(h)_n\,|^2\Bigg)^{1/2}\cdot\Bigg(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1}\frac{1}{\lambda_n^{2-j}}\Bigg)^{1/2}\\
&\le\; D_1 \;+\; C_j\cdot\|\mathcal{L}(h)\|_{L_2(G)}\cdot\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{k<\sqrt{\lambda_n}\le k+1}\frac{1}{\lambda_n^{2-j}}\Bigg)\Bigg]^{1/2}\\
&\le\; D_1 \;+\; D_2\,A^{1/2}\cdot\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\,(2-j)}}\Bigg]^{1/2},
\end{aligned}$$

где постоянные D_1, D_2 имеют очевидные значения и $\|h\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|\,h(x)\,|$. При этом мы пользовались равенством (14), оценками (7)–(9) и тем фактом, что $\mathcal{L}(h)(x)\in L_2(G)$.

Равенства, фигурирующие в формулировке утверждения (b), доказываются теперь следующим образом: первое $(j=0)$ как в утверждении (a), а второе $(j=1)$ при помощи классической теоремы о дифференцировании функционального ряда.

3. Утверждение (c). Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет краевым условиям (5) и принадлежит классу $W_1^{(3)}(G)$, и пусть $\lambda_n \neq 0$. Тогда справедливо равенство (14), которое, в силу дифференциального уравнения (6), может быть переписано в виде

$$h_n \;=\; \frac{1}{\lambda_n^2}\cdot\Bigg(-\int\limits_a^b \mathcal{L}(h)(x)\,v_n''(x)\,dx \;+\; \int\limits_a^b \mathcal{L}(h)(x)\,q(x)\,v_n(x)\,dx\Bigg). \tag{15}$$

Если $\mathcal{L}(h)(a) = \mathcal{L}(h)(b) = 0$, то применяя интегрирование по частьям к первом интеграле в правой части (15), получим равенство

$$h_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \left(\int_a^b \mathcal{L}(h)'(x)\, v_n'(x)\, dx + \int_a^b \mathcal{L}(h)(x)\, q(x)\, v_n(x)\, dx \right). \tag{16}$$

При помощи этого равенства в пункте 3 §1 [**7**] получена оценка

$$|\, h_n \,| \le K(G, \mathcal{L}(h)', q) \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}, \qquad \lambda_n \ne 0, \tag{17}$$

причем значение постоянной $K(G, \mathcal{L}(h)', q)$ получается, если в постоянной $K(G, h', q)$ заменить все величины, связанные с функцией $h'(x)$, на соответствующие величины, связанные с функцией $\mathcal{L}(h)'(x)$.

Оценку типа (17) можно получить и если функция $\mathcal{L}(h)(x)$ не имеет нулевое значение в концах отрезка $\overline{G}$, причем предполагается, что выполненно условие из замечания $5 : \alpha_{11}\, \beta_{21} - \alpha_{21}\, \beta_{11} \ne 0$. Тогда вместо равенства (16) справедливо равенство

$$h_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \Bigg(- \mathcal{L}(h)(x)\, v_n'(x)\, \Big|_a^b + \\ + \int_a^b \mathcal{L}(h)'(x)\, v_n'(x)\, dx + \int_a^b \mathcal{L}(h)(x)\, q(x)\, v_n(x)\, dx \Bigg).$$

Используя это равенство и равенства (13), мы убеждаемся, что оценка типа (17) справедлива и в этом случае, с постоянной $K(G, \mathcal{L}(h), \mathcal{L}(h)', q)$, имеющей следующее значение:

$$K(G, \mathcal{L}(h), \mathcal{L}(h)', q) = 2\, C_0\, R_0 \left(|\, \mathcal{L}(h)(a)\, | + |\, \mathcal{L}(h)(b)\, | \right) + K(G, \mathcal{L}(h)', q).$$

Наконец, в силу оценок типа (17) и оценок (7)–(9), имеет место следующая цепочка равенств и неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, h_n\, v_n^{(j)}(x)\, | = \sum_{0 \le \sqrt{\lambda_n} \le 1} (\cdot) + \sum_{\sqrt{\lambda_n} > 1} (\cdot)$$
$$\le (b-a)\, A\, C_0\, C_j\, \|h\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} + K(\cdot)\, C_j \cdot \sum_{\sqrt{\lambda_n} > 1} \frac{1}{\lambda_n^{(4-j)/2}}$$
$$\le D_3 + D_4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k < \sqrt{\lambda_n} \le k+1} \frac{1}{\lambda_n^{(4-j)/2}} \right) \le D_3 + D_4\, A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4-j}},$$

из которой вытекает, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n\, v_n^{(j)}(x)$ $(j = 0,1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно во всем отрезке $\overline{G}$. Потом доказывается, что функции $h^{(j)}(x)$ являются суммами этих рядов соответственно.

Доказательство предложения 4 и замечания 5 закончено.

§2. Доказательство теоремы 1

1. Существование решения. Пусть $\{v_n(x)\}_1^{\infty}$ – полная ортонормированная система собственных функций неотрицательного самосопряженного расширения оператора (4), определенного краевыми условиями (5), и пусть $\{\lambda_n \geq 0\}_1^{\infty}$ – соответствующая система собственных значений. Если введем обозначения

$$\varphi_n \;=\; \int\limits_a^b \varphi(x)\, v_n(x)\, dx, \quad \psi_n \;=\; \int\limits_a^b \psi(x)\, v_n(x)\, dx, \quad f_n(t) \;=\; \int\limits_a^b f(x,t)\, v_n(x)\, dx,$$

то из предложения 4 вытекает, что на замкнутом интервале $\overline{G}$ справедливы разложения

$$\begin{gathered} \varphi(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, v_n(x), \qquad \psi(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\, v_n(x), \\ (\forall t \in [0,T]) \qquad f(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, v_n(x), \end{gathered} \tag{18}$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно в этом интервале.

Мы будем искать решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\, w_n(t),$$

где $w_n = w_n(t)$ – функции, подлежащие определению. Применяя к этой задаче формальную схему метода Фурье, и используя разложения (18), получим, как известно, следующее представление решения:

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \Bigg[\varphi_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t \;+\; \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t \;+ \\ +\; \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^t f_n(\tau)\, \sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\, d\tau \Bigg]. \end{aligned} \tag{19}$$

Сумма этого ряда формально удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), начальным условиям (2) и краевым условиям (3). (Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что $\lambda_1 > 0$. Напомним, что если $\lambda_1 = 0$ является собственным значением, то соответствующий член ряда (19) должен имеет вид

$$v_1(x)\left[\,\varphi_1 \;+\; \psi_1\, t \;+\; \int\limits_0^t f_1(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau\right].$$

Этот вид формально вкладывается в общий член ряда (19), если считать, что $\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}\,\rho}{\sqrt{\lambda_1}}\,|_{\lambda_1=0} = \rho$. В работе [**7**] мы (молчаливо) так и сделали.)

Формально определенная функция (19) является *классическим решением* задачи (1)–(3). Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству основной теоремы из работы [**7**] (см. там §2: всюду, где нужно, надо писать $p = 2$ и использовать неравенство Бесселя вместо неравенства Рисса), и основывается только на оценках (7)–(9), на предложении 4, на оценках типа (11) и (17), и на равенстве (14). Кроме того, анализ доказательства покажет, что справедливо первое утверждение замечания 3.

2. О замечаниях 1–3. Если функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям 4*), то в этом случае тоже справедливы равенство (38) и оценка (39) из работы [**7**]; теперь надо писать $\tilde{p} = 2$. В силу этой оценки, доказательство замечания 1 вполне аналогично доказательству соответствующего замечания 1 из этой работы (см. там §3: вместо неравенства Рисса используется неравенство Бесселя).

Замечание 2 и замечание 2 в [**7**] идентичны.

Роль специального условия, накладываемого в замечании 3 на краевые условия (3), выяснена в доказательстве предложения 4. Поэтому мы опускаем соответствующие детали доказательств второго и третьего утверждений из замечания 3.

3. Единственность решения. Единственность классического решения задачи (1)–(3) мы докажем приемом, использованным в работе [**4**].

Предположим, что задача (1)–(3) имеет два классических решений: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда функция

$$u(x,t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

является классическим решением следующей смешанной задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \;-\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;+\; q(x)\,u(x,t) \;=\; 0, \qquad (x,t)\in\Omega,\\ u(x,0) \;=\; 0, \qquad u'_t(x,0) \;=\; 0, \qquad a \le x \le b,\\ \text{краевые условия (3).}\end{gathered} \tag{20}$$

Кроме того, для любого $t \in [0,T]$ функция $u_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t)$ удовлетворяет условиям предложения 4 (b). Поэтому для любой точки $(x,t) \in \overline{\Omega}$ справедливо равенство

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, v_n(x),$$

причем имеют место равенства

$$c_n(t) \;=\; \int_a^b u(x,t)\, v_n(x)\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $u(x,t) \in \mathcal{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$, то $c_n(t) \in \mathcal{C}^{(2)}[0,T]$, причем на $[0,T]$ справедливо

$$c_n^{(j)}(t) \;=\; \int_a^b \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,t)\, v_n(x)\, dx, \qquad j = 1,2.$$

Покажем, что функция $c_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$c_n''(t) \;+\; \lambda_n\, c_n(t) \;=\; 0$$

всюду в интервале $(0,T)$. Это вытекает из следующих преобразований:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\, v_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b \Big[\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;-\; q(x)\, u(x,t) \Big] v_n(x)\, dx$$
$$=\; \int_a^b u(x,t) \left(v_n''(x) - q(x)\, v_n(x) \right) dx \;=\; -\;\lambda_n \cdot \int_a^b u(x,t)\, v_n(x)\, dx.$$

(Первое равенство имеет место в силу дифференциального уравнения (20), второе – в силу того, что функции $u(x,\cdot)$, $v_n(x)$ удовлетворяют самосопряженным краевым условиям (5) и $\mathcal{L}(u(\cdot,t))(x) \in L_2(G)$, а третье равенство вытекает из дифференциального уравнения (6).) Таким образом, имеем

$$c_n(t) \;=\; B_{1n} \cos\sqrt{\lambda_n}\, t \;+\; B_{2n} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t,$$
$$c_n'(t) \;=\; -\, B_{1n}\sqrt{\lambda_n} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t \;+\; B_{2n}\sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n}\, t, \qquad t \in (0,T),$$

где B_{1n}, B_{2n} – произвольные постоянные.

Перейдем теперь к пределу $\lim\limits_{t\to 0}$ в предыдущих равенствах. В силу начальных условий (20) и непрерывности функций $c_n(t)$, $c_n'(t)$ в точке $t = 0$, получаем равенства

$$B_{1n} \;=\; \lim_{t\to 0} c_n(t) \;=\; \int\limits_a^b u(x,0)\, v_n(x)\, dx \;=\; 0,$$

$$B_{2n}\sqrt{\lambda_n} \;=\; \lim_{t\to 0} c_n'(t) \;=\; \int\limits_a^b u_t'(x,0)\, v_n(x)\, dx \;=\; 0.$$

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}, t \in [0,T]$ справедливо равенство $c_n(t) = 0$. Но это означает, что $u(x,t) = 0$ на всем замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Единственность классического решения доказана.

§3. Доказательство теоремы 2

1. Оценка функции $u_1(x,t)$. Представим функцию (19) в виде

$$u(x,t) \;=\; u_1(x,t) \;+\; u_2(x,t) \;+\; u_3(x,t), \qquad \text{где}$$

$$u_1(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\,\varphi_n\,\cos\sqrt{\lambda_n}\,t, \quad u_2(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\,\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}\,\sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

$$u_3(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \int\limits_0^t f_n(\tau)\,\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,d\tau.$$

Это можно сделать , так так указанные ряды сходятся (абсолютно и равномерно) на прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Оценим сначала функцию $u_1(x,t)$ “через” функцию $\varphi(x)$. Для функции $\varphi(x)$ справедливо равенство (14). Используя это равенство и оценки (7)–(8), мы получим, что для любой точки $(x,t) \in \overline{\Omega}$ имеет место

$$|\,u_1(x,t)\,| \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} |\,v_n(x)\,\varphi_n\,\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\,| \;=\; \sum_{0<\sqrt{\lambda_n}\le 1}(\cdot) \;+\; \sum_{\sqrt{\lambda_n}>1}(\cdot)$$

$$\le\; A\,C_0^2 \cdot \int\limits_a^b |\,\varphi(x)\,|\,dx \;+\; C_0 \cdot \sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} \frac{|\,\mathcal{L}(\varphi)_n\,|}{\lambda_n}$$

$$\le\; A\,C_0^2 \cdot \|\varphi\|_{L_1(G)} \;+\; A\,C_0^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) \cdot \Big(\|\varphi''\|_{L_1(G)} + \|q\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} \cdot \|\varphi\|_{L_1(G)}\Big),$$

откуда вытекает оценка

$$\max_{x\in\overline{G}} |\,u_1(x,t)\,| \;\le\; D_1\,\left(\,\|\varphi\|_{L_1(G)} \;+\; \|\varphi''\|_{L_1(G)}\,\right), \qquad t \in [0,T], \tag{21}$$

где положено

$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ A\, C_0^2 + A\, C_0^2\, \|q\|_{\mathcal{C}(\overline{G})}\, \pi^2/6,\ A\, C_0^2\, \pi^2/6 \right\}.$$

2. Оценка функции $u_2(x,t)$. Рассмотрим потом функцию $u_2(x,t)$. В этом случае, при помощи оценок (7)–(8) и неравенств Коши–Буняковского и Бесселя, можно получить

$$\begin{aligned} |\, u_2(x,t)\,| \ &\le\ \sum_{n=1}^{\infty} \left|\, v_n(x)\, \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}\, \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \,\right| \ =\ \sum_{0<\sqrt{\lambda_n}\le 1} (\cdot) \ +\ \sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} (\cdot) \\ &\le\ A\, C_0^2\, T \cdot \int_a^b |\, \psi(x)\,|\, dx \ +\ C_0 \cdot \left(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} \frac{1}{\lambda_n} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, \psi_k\,|^2 \right)^{1/2} \\ &\le\ (b-a)^{1/2}\, A\, C_0^2\, T \cdot \|\psi\|_{L_2(G)} \ +\ A^{1/2}\, C_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \cdot \|\psi\|_{L_2(G)}, \end{aligned}$$

где $(x,t) \in \overline{\Omega}$ – произвольная точка. Поэтому справедлива оценка

$$\max_{x\in\overline{G}} |\, u_2(x,t)\,| \ \le\ D_2 \cdot \|\psi\|_{L_2(G)}, \qquad t \in [0,T], \tag{22}$$

причем постоянная D_2 имеет очевидное значение.

3. Оценка функции $u_3(x,t)$. В случае функции $u_3(x,t)$ для любой точки $(x,t) \in \overline{\Omega}$ справедлива следующая цепочка равенств и неравенств :

$$|\, u_3(x,t)\,| \ \le\ \sum_{n=1}^{\infty} \left|\, \frac{v_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \int_0^t f_n(\tau)\, \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\, d\tau \,\right|$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{0<\sqrt{\lambda_n}\le 1} (\cdot) \ +\ \sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} (\cdot) \ \le\ A\, C_0^2\, T \cdot \int_0^t \left(\int_a^b |\, f(x,\tau)\,|\, dx \right) d\tau \ + \\ &+\ C_0\, T^{1/p} \cdot \left(\sum_{\sqrt{\lambda_n}>1} \frac{1}{\lambda_n^{p/2}} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |\, f_k(\tau)\,|^r\, d\tau \right)^{1/r}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $p \in (1,2]$ – произвольное число, и $1/p + 1/r = 1$. Зафиксируем точку $t \in (0,T]$ и рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |\, f_k(\tau)\,|^r\, d\tau.$$

В силу неравенства Рисса получим, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in [0,t]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\, f_k(\tau)\,|^r \ \le\ C_0^{(2/p-1)\,r} \cdot \left(\int_a^b |\, f(x,\tau)\,|^p \, dx \right)^{r/p},$$

откуда вытекает оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t |\, f_k(\tau)\,|^r \, d\tau \ \le\ C_0^{(2/p-1)\,r} \cdot \int_0^t \left(\int_a^b |\, f(x,\tau)\,|^p \, dx \right)^{r/p} d\tau.$$

Таким образом, рассматриваемй ряд сходится и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |\, f_k(\tau)\,|^r \, d\tau \ \le\ C_0^{(2/p-1)\,r} \cdot \int_0^t \left(\int_a^b |\, f(x,\tau)\,|^p \, dx \right)^{r/p} d\tau.$$

Итак, из (23) и предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\max_{x\in\overline{G}} |\, u_3(x,t)\,| \ \le\ D_3 \left[\int_0^t \left(\int_a^b |\, f(x,\tau)\,|^p \, dx \right)^{r/p} d\tau \right]^{1/r}, \qquad t \in [0,T], \tag{24}$$

где постоянная D_3 имеет следующее значение :

$$D_3 \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \max\left\{ \,(b-a)^{1/r}\, A\, C_0^2\, T^{(p+1)/p},\ A^{1/p}\, C_0^{2/p}\, T^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \right)^{1/p} \right\}.$$

4. Априорная оценка. Из оценок (21)–(22) и (24) окончательно получаем следующую оценку для классического решения задачи (1)–(3) :

$$\max_{x\in\overline{G}} |\, u(x,t)\,| \ \le\ D \cdot \big(\, \|\varphi\|_{L_1(G)} \ +\ \|\varphi''\|_{L_1(G)} \ +$$
$$+\ \|\psi\|_{L_2(G)} \ +\ \|\, \|f(\cdot,\tau)\|_{L_p(G)}\, \|_{L_r(0,t)} \,\big), \quad t \in [0,T],$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\, D_1,\, D_2,\, D_3 \,\}$.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Эта работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и технологии Республики Сербии (проект 04M01).

Литература

[1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. II, Мир, Москва, 1965.

[2] М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва, 1969.

[3] В.А. Ильин, И. Йо, *Равномерная оценка собственных функций и оценка сверху числа собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом из класса* L^p, Дифф. уравнения **15** (1979), 1165–1174.

[4] Н.И. Йонкин, Е.И. Мойсеев, *О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями*, Дифф. уравнения **15** (1979), 1284–1295.

[5] Н. Лажетич, *Равномерные оценки для производных собственных функций самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля*, Дифф. уравнения **17** (1981), 1978–1983.

[6] N.L. Lažetić, *On uniform convergence of spectral expansions and their derivatives corresponding to self-adjoint extensions of Schrödinger operator*, Mat. Vesnik **47** (1995), 85–92.

[7] Н.Л. Лажетич, *О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка*, Дифф. уравнения **34** (1998).

Математички факултет
Студентски трг 16
11001 Београд, п.п. 550
Југославија
lazetic@matf.bg.ac.yu

(Поступила 23 04 1998)