LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS AUX LIAISONS DONNÉES

Par

R. KAŠANIN

Les coordonnées x_i, y_i, z_i, dans un système de référence $Oxyz$, de n points matériels, de masses m_i, soient des fonctions de ν paramètres q_j, de leurs dérivées, par rapport à t, jusqu'à un certain ordre, et du temps t, — ces paramètres, leurs dérivées jusqu'à un certain ordre et le temps t étant, à leur tour, reliés par ν' relations $\gamma_k = 0$. Les forces extérieures et intérieures étant données, quelles forces de liaisons faut-il introduire pour que ces dernières au cours du mouvement soient conservées?

1. — Si, dans les fonctions qui déterminent x_i, y_i, z_i, $\mu \geqq 1$ est l'ordre le plus élevé de la dérivée du paramètre q_1, nous poserons

$$\frac{dq_1}{dt} = r_1, \qquad \frac{d^2 q_1}{dt^2} = r_2, \ldots\ldots, \qquad \frac{d^\mu q_1}{dt^\mu} = r_\mu .$$

On aura ainsi μ nouveaux paramètres $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_\mu$, mais aussi μ nouvelles liaisons

$$\dot{q}_1 = r_1, \qquad \dot{r}_1 = r_2, \ldots\ldots, \qquad \dot{r}_{\mu-1} = r_\mu .$$

En procédant de cette manière avec tous les paramètres qui se présentent avec leurs dérivées, le nombre de paramètres augmentera, celui des liaisons aussi et dans la même mesure, mais les coordonnées x_i, y_i, z_i ne seront fonctions que du temps et des paramètres et non aussi de leurs dérivées.

Après cela, dans les liaisons $\gamma_k = 0$ figureront le temps, les paramètres, ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre par rapport au temps. Si les dérivées sont d'ordre supérieur au premier, nous procéderons comme précédemment. De cette façon le nombre de paramètres augmentera encore, le nombre de liaisons de même, mais les relations $\gamma_k = 0$ ne contiendront que le temps, les paramètres et leurs dérivées du premier ordre.

En posant, enfin, $t = q$, on aura introduit un nouveau paramètre q, mais aussi une nouvelle liaison $\dot{q} - 1 = 0$. De cette façon pas plus dans les coordonnées que dans les équations $\gamma_k = 0$ ne figurera explicitement le temps t.

Si une quelconque des liaisons $\gamma_k = 0$ ne contient aucune des dérivées $\dot{q}_j$, on différentiera cette équation par rapport à t, et l'on obtiendra la liaison contenant cette dérivée. Donc, nous ne faisons pas de différence entre les systèmes holonomes et non-holonomes.

Finalement, il nous sera toujours possible d'en arriver aux liaisons de la forme suivante: les coordonnées x_i, y_i, z_i sont fonctions de certains paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$,

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_\alpha), \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_\alpha) \quad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_\alpha), \tag{1}$$

ou, sous la forme vectorielle,

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i(q_1, \ldots, q_\alpha), \tag{2}$$

avec, entre les α paramètres q_j, β liaisons

$$\gamma_k(q_1, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_\alpha) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \beta), \tag{3}$$

$\left[\text{où } \dot{q}_j = \dfrac{dq_1}{dt}\right]$, chacune de celles-ci contenant au moins une dérivée, et telles que le système d'équations (3) définisse β de ces dérivées en fonctions des autres dérivées et des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$, par ex. (en choisissant convenablement le numérotage des paramètres)

$$\dot{q}_k = \vartheta_k(q_1, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_{\beta+1}, \ldots, \dot{q}_\alpha);$$

ceci parceque nous supposons les liaisons indépendantes et compatibles. Ce qui veut dire que l'on doit avoir

$$\frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\beta)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\beta)} \neq 0. \tag{4}$$

Pour que le problème ait un sens, nous devons supposer $0 < \alpha - \beta \leqq 3n$.

2. — Notre tâche peut donc être ainsi formulée: étant données les forces extérieures et intérieures $\mathfrak{F}_l$ et $\mathfrak{F}'_l$, quelles forces de liaisons $\mathfrak{F}_l^*$ doit on introduire pour que au cours du mouvement les liaisons (2) et (3) soient conservées. En d'autres termes, notre problème revient: à résoudre $6n + \beta$ équations scalaires

$$(5) \qquad m_l \ddot{\mathfrak{r}}_l = \mathfrak{F}_l + \mathfrak{F}_l' + \mathfrak{F}_l^*, \qquad \mathfrak{r}_l = \mathfrak{r}_l(q_1, \ldots, q_\alpha), \qquad \gamma_k = 0$$
$$(l = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, \beta)$$

par rapport à α scalaires q_j, $3n$ scalaires x_l, y_l, z_l et $3n$ coordonnées du vecteur $\mathfrak{F}_l^*$. Des inconnues il y a donc $6n + \alpha$, c'est-à-dire $\alpha - \beta$ plus que d'équations.

Introduisons les forces généralisées:

$$(6) \qquad Q_j = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{F}_l \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_l}, \qquad Q_j' = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{F}_l' \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j}, \qquad Q_j^* = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{F}_l^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j}.$$

Alors de la première équation (5) il vient

$$(7) \qquad \sum_{l=1}^{n} m_l \ddot{\mathfrak{r}}_l \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = Q_j + Q_j' + Q_j^*.$$

Mais, comme l'on sait, le premier membre peut s'écrire sous différentes formes:

$$(8) \qquad \sum_{l=1}^{n} m_l \ddot{\mathfrak{r}}_l \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} =$$
$$= \sum_{l=1}^{\alpha} \left(\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} \right) \ddot{q}_l + \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \left(\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_l}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s,$$

T étant la force vive et S l'énergie d'accélération du système des points matériels.

En posant

$$\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = a_{jl},$$

on aura

$$2T = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \dot{q}_j \dot{q}_\iota ,$$

$$\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_l}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_j} \right) = \begin{bmatrix} s\ r \\ j \end{bmatrix},$$

et les équations (7) pourront s'écrire

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \ddot{q}_\iota + a_j = Q_j + Q'_j + Q^\circ_j , \tag{9}$$

où

$$a_j = \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \begin{bmatrix} s\ r \\ j \end{bmatrix} \dot{q}_r \dot{q}_s .$$

A ceci on doit en outre adjoindre les β liaisons $\gamma_k = 0$. En différentiant ces dernières par rapport à t on a

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota + \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota = 0.$$

Si l'on pose

$$- \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota = c_k ,$$

on aura

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota = c_k . \tag{10}$$

Notre problème se ramène donc aux équations (9) et (10).

Nous admettons que la forme quadratique $2T$ est définite, c'est-à-dire que le déterminant formé de ces coefficients n'est pas identiquement égal à zéro.

Si de α équations (9) on détermine α valeurs de $\ddot{q}_i$, puis on les porte dans (10), on aura β équations (linéaires) en Q_j^*, dont on déterminera Q_1^*, $Q_2^*, \ldots, Q_\beta^*$ en fonctions de $q_\iota, \dot{q}_\iota$, Q_ι, Q'_ι, $Q^*_{\beta+1}, \ldots, Q_\alpha^*$. Comme Q_ι et Q'_ι doivent être donnés comme fonctions de q_i et $\dot{q}_\iota$, on aura finalement

$$\ddot{q}_j = \varphi_j + Q_{\beta+1}^* \varphi_j^{(1)} + Q_{\beta+2}^* \varphi_j^{(2)} + \ldots + Q_\alpha^* \varphi^{(\alpha-\beta)},$$

où $\varphi_j, \varphi_j^{(1)}, \ldots \varphi_j^{(\alpha-\beta)}$ sont des fonctions connues de $q_1 \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_\alpha$. Les grandeurs $Q_{\beta+1}^*, \ldots, Q_\alpha^*$ restent de fonctions arbitraires de $q_1, \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_\alpha$.

Par conséquent, le système d'équations (9) et (10) a un nombre infini de solutions en $\ddot{q}_j$ et Q_j^*.

Si il n'y a pas de liaisons $\gamma_k = 0$, tous les Q_j^* restent arbitraires. Bien entendu, ceci ne veut pas dire qu'aussi les $\mathfrak{F}_i^*$ sont arbitraires.

3. – Pour abréger les écritures et simplifier les expressions, nous introduirons dans l'espace à α dimensions les vecteurs en coordonnées orthogonales:

$$\mathfrak{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_\alpha; \qquad \mathfrak{q}\{q_1, q_2, \ldots, q_\alpha;$$

$$\mathfrak{Q}\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha; \qquad \mathfrak{Q}'\{Q_1', Q_2', \ldots, Q_\alpha'. \qquad \mathfrak{Q}^*\{Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_\alpha^*$$

et le tenseur

$$\mathfrak{A}\left\{\begin{array}{l} a_{11} \ldots . a_{1\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{\alpha 1} \ldots a_{\alpha\alpha}. \end{array}\right.$$

On prendra aussi $\dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_1}, \ldots, \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\alpha}$ comme coordonnées du vecteur dans le même espace; on peut désigner ce vecteur par $\nabla' \gamma_k$, le signe ∇' désignant l'opérateur de Hamilton dans l'espace à α dimensions relatif aux grandeurs $\dot{q}_i, \ldots, \dot{q}_\alpha$.

Dès lors les équations (9) et (10) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle

$$\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}^*, \tag{11}$$

$$\ddot{\mathfrak{q}} \cdot \nabla' \gamma_k = c_k, \ (k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Comme on vient de voir plus haut, les équations (11) possèdent un nombre infini de solutions en $\ddot{q}$ et $\mathfrak{Q}^*$.

Lorsqu'il n'y a pas de liaisons $\gamma_k=0$, le vecteur $\mathfrak{Q}^*$ peut être choisi arbitrairement. Donc nous supposerons que ces liaisons existent aussi.

En désignant par $\mathfrak{A}^{-1}$ le tenseur réciproque du tenseur $\mathfrak{A}$, on aura de (11)

$$\ddot{q}=\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})+\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*.$$

Il vient par conséquent

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*\cdot\nabla'\gamma_k=c_k-\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})\cdot\nabla'\gamma_k \quad (k=1,2,\ldots,\beta) \tag{12}$$

c'est-à-dire:

(A) *Les projections orthogonales algébriques du vecteur* $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*$ *sur le vecteur* $\nabla'\gamma_k$ *sont de fonctions bien définies de* $q_1,\ldots,q_\alpha$, $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\alpha$.

En (12) on a β équations scalaires en $\alpha>\beta$ coordonnées inconnues du vecteur $\mathfrak{Q}^*$. Soit $\mathfrak{Q}_*$ l'une des solutions de l'équation (12):

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Q}_*\cdot\nabla'\gamma_k=c_k-\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})\cdot\nabla'\gamma_k.$$

En posant $\mathfrak{Q}^*-\mathfrak{Q}_*=\mathfrak{A}$, on aura pour $\mathfrak{A}$ les équations

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\cdot\nabla'\gamma_k=0.$$

Si l'on désigne le vecteur $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}$ par $\vec{\mu}\{\mu_1,\ldots,\mu_\alpha$, on pourra dire:

(B) *Si le vecteur* $\mathfrak{Q}_*$ *établit les liaisons, tout autre vecteur* $\mathfrak{Q}^*$ *établissant les liaisons sera* $\mathfrak{Q}^*=\mathfrak{Q}_*+\mathfrak{A}\vec{\mu}$, *où* $\vec{\mu}$ *est le vecteur qui satisfait l'équation*

$$\vec{\mu}\cdot\nabla'\gamma_k=0,\ (k=1,2,\ldots,\beta). \tag{13}$$

On en conclut:

(C) *De quelle manière que l'on choisisse le vecteur* $\vec{\mu}$ *satisfaisant l'équation (13), le vecteur* $\mathfrak{A}\vec{\mu}$ *ne touche pas aux liaisons, il est compatible avec lui; de tels vecteurs on peut en ajouter à* *volonté, — les liaisons, une fois établies, seront conservées, seuls les mouvements seront autres.*

Ayant ainsi introduit les vecteurs $\vec{\mu}$, nous démontrerons:

(D) *Parmi les vecteurs* $\mathfrak{Q}^*$, *servant à établir les liaisons, il en existe un et un seul vecteur* $\mathfrak{Q}''$ *perpendiculaire à tous les vecteurs* $\vec{\mu}$ *satisfaisant l'équation* (13), $\vec{\mu}.\ \mathfrak{Q}''=0$. Or, le vecteur $\mathfrak{Q}''$ devant être perpendiculaire à tous les vecteurs $\vec{\mu}$, ceux-ci étant tous perpendiculaires à tous les vecteurs $\nabla'\gamma_k$, on doit avoir

$$\mathfrak{Q}''=\lambda_1\nabla'\gamma_1+\lambda_2\nabla'\gamma_2+\ldots+\lambda_\beta\nabla'\gamma_\beta, \tag{14}$$

où λ_r sont de scalaires. En portant cette valeur dans (12), on aura β équations

$$\sum_{r=1}^{\beta}\lambda_r\mathfrak{A}^{-1}\nabla'\gamma_r\cdot\nabla'\gamma_k=c_k-\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a}), \tag{15}$$

$$(k=1,2,\ldots,\beta),$$

dont on déterminera β scalaires λ_r en fonctions de $q_1,\ldots,q_\alpha$, $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\alpha$.

Il s'ensuit:

(E) *Le vecteur* $\mathfrak{Q}''$ *est complètement déterminé par les liaisons et les forces extérieures et intérieures.*

De (B) il résulte:

(F) *Tout vecteur* $\mathfrak{Q}^*$ *établissant les liaisons est de la forme* $\mathfrak{Q}^*=\mathfrak{Q}''+\mathfrak{A}\vec{\mu}$, *où* $\mathfrak{Q}''$ *est le vecteur mentionné dans (D) et* $\vec{\mu}$ *le vecteur satisfaisant les équations* (13).

En vertu de ce qui précède, les équations (11) peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{q}}+\mathfrak{a}=\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'+\sum_{r=1}^{\beta}\lambda_r\nabla'\gamma_r+\mathfrak{A}\vec{\mu}\\&\ddot{\mathfrak{q}}\cdot\nabla'\gamma_k=c_k,\qquad \vec{\mu}\cdot\nabla'\gamma_k=0;\\&\qquad(k=1,2,\ldots,\beta).\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Sous forme scalaire elles deviennent

$$(17)\quad \begin{cases} \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\ddot{q}_\iota + a_j = Q_j + Q'_j + \sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \dfrac{\partial \gamma_r}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{r=1}^{\beta} a_{j\iota}\mu_\iota; \\ \sum_{\iota=1}^{\alpha} \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\ddot{q}_\iota = c_k, \qquad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\mu_\iota = 0; \\ (j=1,2,\ldots,\alpha; \qquad k=1,2,\ldots,\beta). \end{cases}$$

En tirant $\ddot{q}_\iota$ du premier groupe des α équations en (17), qui sont linéaires en $\ddot{q}_i$, puis les portant dans le second groupe, on aura β équations linéaires en λ_r, qui donneront λ_r indépendemment de μ_ι. Si on les porte dans les solutions obtenues de $\ddot{q}_\iota$, on aura $\ddot{q}_\iota - \mu_\iota$ en fonctions des q_j et $\dot{q}_j$, lorsque les forces généralisées Q_j et Q'_j sont données en fonctions des paramètres et de leurs dérivées; c'est-à-dire on aura

$$\ddot{q}_\iota = \psi_\iota(q_1,\ldots,q_\alpha;\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\alpha) + \mu_\iota .$$

Du troisième groupe de β équations dans (17) on peut, par suite de (4), déterminer $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_\beta$ linéairement à l'aide des $\mu_{\beta+1},\ldots,\mu_\alpha$. Donc, finalement, on peut obtenir

$$\ddot{q}_\iota = \psi_\iota + \psi_\iota^{(1)}\mu_{\beta+1} + \ldots + \psi_\iota^{(\alpha-\beta)}\mu_\alpha ,$$

où les ψ_ι, $\psi_\iota^{(1)},\ldots,\psi_\iota^{(\alpha-\beta)}$ sont aussi de fonctions déterminées de $q_1,\ldots,q_\alpha$, $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\alpha$. Pour $\mu_{\beta+1},\ldots,\mu_\alpha$ on peut choisir des fonctions arbitraires de $q_1,\ldots,q_\alpha$, $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_\alpha$. Dans un cas concret procédera-t-on exactement de cette manière, c'est une autre question: le premier membre de la première équation dans (17) peut s'écrire sous différentes formes données dans (8).

Au lieu du second groupe des équations (17) on peut écrire les équations $\gamma_k = 0$ dont on les a obtenues en différentiant. Ainsi, au lieu de (17), on aura

$$(18)\quad \begin{cases} \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\ddot{q}_\iota + a_j = Q_j + Q'_j + \sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \dfrac{\partial \gamma_r}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\mu_\iota; \\ \gamma_k = 0, \qquad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\mu_\iota = 0; \\ (j=1,2,\ldots,\alpha; \qquad k=1,2,\ldots,\beta). \end{cases}$$

Avec (18) on a les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données.

On a en tout $\alpha+2\beta$ équations, et des inconnues $\ddot{q}_\iota$, λ_r, μ_ι, en tout $2\alpha+\beta$. Il en reste $\alpha-\beta$ d'inconnues libres, par ex. $\mu_{\beta+1},\ldots,\mu_\alpha$. Le nombre $\alpha-\beta$ est le degré de liberté.

Le vecteur $\mathfrak{Q}^*$, établissant les liaisons, est ainsi décomposé en deux composantes:

$$(19)\qquad \mathfrak{Q}''=\sum_{r=1}^{\beta}\lambda_r\,\nabla'\gamma_r,\quad \overline{\mathfrak{Q}}=\mathfrak{A}\vec{\mu};\quad \mathfrak{Q}^*=\mathfrak{Q}''+\overline{\mathfrak{Q}};$$

c'est-à-dire la force généralisée des liaisons Q_j^* est décomposée en deux:

$$(19)\qquad Q_j''=\sum_{r=1}^{\beta}\lambda_r\frac{\partial\gamma_r}{\partial q_j},\quad \overline{Q}=\sum_{\iota=1}^{\alpha}a_{j\iota}\,\mu_\iota;\quad Q^*_j=Q_j''+\overline{Q}_j.$$

S'il n'y a pas de liaisons $\gamma_k=0$, alors $\mathfrak{Q}''=0$, c'est-à-dire $Q''_j=0$ pour tout j, et $\vec{\mu}$, c'est-à-dire $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\alpha$, peuvent être choisis arbitrairement.

4. — Les forces de liaisons $\mathfrak{F}_l^*$ sont déterminées, d'après (5), par

$$(21)\qquad \mathfrak{F}_l^*=m_l\ddot{\mathfrak{r}}_l-\mathfrak{F}_l-\mathfrak{F}_l',$$

où, de (2), l'on a pour $\ddot{\mathfrak{r}}_l$

$$(22)\qquad \ddot{\mathfrak{r}}_l=\sum_{\iota=1}^{\alpha}\frac{\partial\mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota}\ddot{q}_\iota+\sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\frac{\partial^2\mathfrak{r}_l}{\partial q_r\partial q_s}\dot{q}_r\dot{q}_s.$$

Décomposons cette force en deux composantes, $\overline{\mathfrak{F}}_l$ et $\mathfrak{F}_l''$:

$$(23)\qquad \overline{\mathfrak{F}}=m_l\sum_{\iota=1}^{\alpha}\frac{\partial\mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota}\mu_\iota,\qquad \mathfrak{F}_l''=\mathfrak{F}_l^*-\overline{\mathfrak{F}}_l.$$

Les forces généralisées résultant des forces $\overline{\mathfrak{F}}_l$ sont

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{\mathfrak{F}}_l \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{n} \left(m_l \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota} \mu_\iota \right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota} \right) \mu_\iota =$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\, \mu_\iota = \overline{Q}_j.$$

Comme de $\mathfrak{F}_l^*$ résultent les forces généralisées Q_j^*, alors des forces $\mathfrak{F}_l''$ proviennent les forces généralisées Q_j''. Dans les expressions des composantes $\overline{\mathfrak{F}}_l$, de même que pour les forces généralisées $\overline{Q}_j$, ne figurent que les liaisons, tandisque dans celles des $\mathfrak{F}_l''$ et Q_j'' figurent les liaisons et les forces extérieures et intérieures.

En vertu de ce qui a été dit de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$, il résulte que: *les composantes $\overline{\mathfrak{F}}_l$ sont des forces que l'on peut, après avoir déjà assuré la conservation des liaisons, toujours ajouter, sans que pour cela cette dernière en souffre; on aura seulement d'autres mouvements avec les mêmes liaisons.* Donc, les composantes $\mathfrak{F}_l''$ renferment, pour ainsi dire, le noyau des forces des liaisons que l'on doit ajouter; le reste on le peut, mais rien ne nous y oblige. D'autres forces de liaisons contiennent toujours quelque chose de superflu. Toute autre force de liaison $\mathfrak{F}_l^*$ peut être décomposée en une somme de $\mathfrak{F}''$ et $\overline{\mathfrak{F}}_l$ de telle manière que $\overline{\mathfrak{F}}_l$ soit compatible avec les liaisons données. Toutes les composantes $\overline{\mathfrak{F}}_l$ peuvent être prises égales à zéro ($\mu_\iota = 0$); les composantes $\mathfrak{F}_l''$ on ne le peut pas. Si ces dernières sont aussi nulles, c'est qu'alors les forces extérieures et intérieures par elles-mêmes conservent les liaisons.

En introduisant les forces des liaisons $\mathfrak{F}_l^*$ dans le produit scalaire $\vec{\mu} \cdot \mathfrak{Q}^*$, l'on aura

$$\vec{\mu} \cdot \mathfrak{Q}^* = \sum_{\iota=1}^{\alpha} Q_\iota^* \mu_\iota = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{l=1}^{n} \mathfrak{F}_l^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota} \right) \mu_\iota = \sum_{l=1}^{n} \left(\mathfrak{F}_l^* \cdot \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_\iota} \mu_\iota \right).$$

Nous désignerons le vecteur par lequel est multiplié scalairement $\mathfrak{F}_i^*$ par $\mathfrak{V}_i$:

$$\vec{\mu} \cdot \mathfrak{Q}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i^* \cdot \mathfrak{V}_i.$$

D'après (D) on peut dire:

(I) *De toutes les forces de liaisons $\mathfrak{F}_i^*$ les forces $\mathfrak{F}_i''$ sont les seules pour lesquelles on aura*

$$(24)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i^* \cdot \mathfrak{V}_i = 0, \\ \textit{si l'on a} \\ \displaystyle\mathfrak{V}_i = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \mu_\iota, \qquad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \mu_\iota = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, \beta). \end{array}\right.$$

Les équations $\gamma_k = 0$ définissent, en vertu de (4), $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_\beta$ en fonction de $q_1, \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_{(\beta+1)}, \ldots, \dot{q}_\alpha$. En les portant dans l'expression

$$\chi_s = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_s}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{q}_\iota,$$

on aura χ_s en fonction de $q_1, \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_{(\beta+1)}, \ldots, \dot{q}_\alpha$. Si, après cela, on trouve que χ_s est identiquement égal à zéro, on dira que la liaison $\gamma_s = 0$ est scléronome; dans le cas contraire elle est rhéonome. *) Si toutes les liaisons $\gamma_k = 0$ sont scléronomes, on dira que le système de points matériels est scléronome; mais si une seule des liaisons est rhéonome, le système sera rhéonome. La liaison $\gamma_s = 0$ sera certainement scléronome si γ_s est une fonction homogène de $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_\alpha$ (en vertu du théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes). S'il n'y a point de liaisons $\gamma_k = 0$, le système sera certainement scléronome. Dans le cas d'un système scléronome on a, donc, comme conséquence des liaisons,

*) Ces définitions diffèrent dans certains cas des définitions usuelles.

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \Upsilon_k}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{q}_\iota = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Dans ce cas, parmi les vecteurs $\vec{\mu}$ se trouve le vecteur $\dot{q}$ aussi, et parmi les vecteurs $\mathfrak{V}_i$ se trouvent aussi les vecteurs v_i, c'est-à-dire les vitesses des points (x_i, y_i, z_i). Lorsque le système est rhéonome, ce n'est pas le cas.

Le scalaire $\frac{1}{2m} \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}$ est, par définition, l'énergie d'accélération de la force $\mathfrak{F}$ agissant sur le point matériel de masse m. L'énergie totale d'accélération des forces de liaisons $\mathfrak{F}_i^*$ est

$$S^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i^* \cdot \mathfrak{F}_i^*.$$

D'après (21) et (22), S^* est une fonction quadratique des α grandeurs $\ddot{q}_j$, avec, à côté de chaque $\ddot{q}_j^2$, comme coefficient un nombre positif. Par définition, S^* ne peut pas être négatif. Par conséquent, S^* comme fonction de $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_\alpha$ a un minimum. Cependant, les grandeurs $\ddot{q}_j$ ne sont pas indépendantes les unes des autres: ils existent entre elles β relations données par (10). On cherchera, donc, le minimum de S^* en fonction de $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_\alpha$ avec les conditions

$$f_k = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \Upsilon_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota - c_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

On appliquera la méthode bien connue des multiplicateurs. On commencera par former la fonction

$$\Phi = S^* + \sum_{k=1}^{\beta} M_k f_k,$$

puis, aux conditions $f_k = 0$, on joindra en outre les conditions $\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_j} = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, \alpha$. On aura, d'après (21) et (22),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_j} + \sum_{k=1}^{\beta} M_k \frac{\partial f_k}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l} \cdot \mathfrak{F}_l^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}^*_l}{\partial \ddot{q}_j} + \sum_{k=1}^{\beta} M_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l} \mathfrak{F}_l^* \cdot m_l \frac{\partial \mathfrak{r}_l}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{\beta} M_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^* + \sum_{k=1}^{\beta} M_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j}.$$

On aura, donc, pour le minimum cherché

$$Q_j^* = - \sum_{k=1}^{\beta} M_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j}.$$

Mais c'est, avec les notations un peu différentes $(-M_k = \lambda_k)$, la formule de Q_j''. Donc:

(II) *Parmi toutes les forces de liaisons* $\mathfrak{F}_l^*$, *les forces* $\mathfrak{F}_l''$ *sont celles dont l'énergie d'accélération totale est minimum.*

Les composantes $\overline{\mathfrak{F}}_l$ des forces de liaisons peuvent être choisies égales à zéro, car on peut, conformément au troisième groupe d'équations (18), prendre $\mu_\iota = 0$ pour tout ι. En faisant cela, il reste les forces de liaisons $\mathfrak{F}_l''$; nous dirons alors que les liaisons sont établies d'une manière idéale, et ces forces de liaisons on les appelera des forces de liaisons idéales. Le mouvement que donnent les forces de liaisons idéales peut être caractérisé par l'une de leurs propriétés caractéristiques (I) et (II). La propriété (I) n'est autre chose que le principe des déplacements virtuels, étendue aussi aux liaisons $\gamma_k = 0$ qui ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées $\dot{q}_j$; il n'y a qu'à introduire dans (24) les notations habituelles $\mu_\iota = \frac{\delta q_\iota}{\delta t}$, pour s'en rendre compte immédiatement. La propriété (II) est ce qu'on a appelé le principe de Gauss.

5. — Considérons, comme cas spécial, les liaisons données directement entre les coordonnées cartésiennes x_l, y_l, z_l sous la forme

$$(25) \quad g_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu < 3n).$$

On admet que chacune de ces liaisons contient au moins une dérivée. Si ce n'est pas le cas et que la liaison est donnée sous la forme

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; t) = 0,$$

en différentiant, on la ramenera à la forme (25).

Si l'on pose

$$x_i = q_i, \quad y_i = q_{n+i}, \quad z_i = q_{2n+i},$$

des équations (18) on déduira aisément les équations

$$(26) \quad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = X_i + X_i' + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i} + \bar{X}_i, \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i + Y_i' + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{y}_i} + \bar{Y}_i, \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i + Z_i' + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{z}_i} + \bar{Z}_i; \\ g_k = 0; \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{m_i}\left(\bar{X}_i \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i} + \bar{Y} \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{y}_i} + \bar{Z} \dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{z}_i}\right) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, \nu), \end{cases}$$

ou, en les mettant sous la forme vectorielle,

$$(27) \quad \begin{cases} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \lambda_k \nabla_i' g_k + \bar{\mathfrak{F}}_i; \\ g_k = 0; \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{m_i} \bar{\mathfrak{F}}_i \cdot \nabla_i' g_k = 0; \\ (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, \nu). \end{cases}$$

Les forces idéales de liaisons s'obtiennent en prenant $\bar{\mathfrak{F}}_i = 0$ pour tout i.

Communiqué le 4-II-1948.

Publications de l'Institut Mathématique

ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА СА ДАТИМ ВЕЗАМА

Од

Р. КАШАНИНА

Писац посматра везе дате једначинама међу генералисаним координатама и њиховим изводима ма ког реда у најопштијем облику и тражи све силе веза̂ које ће омогућити кретање система материјалних тачака у сагласности са датим везама. Пошто је показано како се најопштије везе могу приказати у облику (1) и (3), опште једначине кретања дате су под (16) у векторском облику, а под (18) у скаларном.

Међу свим силама веза истичу се неке нарочите које су одређене са (14) (идеалне силе веза). Оне чине језгро сила̂ веза̂ и морају се у свакој прилици узети у обзир. Наведене су две њихове особине које их, свака за себе, потпуно карактеришу. Прва се састоји у томе да задовољавају једначине (24), које се могу тумачити као принцип виртуалних померања, уопштен и проширен на све врсте веза. Друга је у томе да је њихова тотална енергија акцелерације минимална.