SUR LA TRANSFORMATION CANONIQUE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME NON HOLONOME

Par
ANTON BILIMOVITCH

Le fasc. III – IV, Vol. X, Série II d'Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1941, contient une note de M. S. Luigi Marchetti intitulée „Riduzione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi". Or, en 1914, j'ai publié dans les C. R. (t. 158, p. 1064 – 68) une note intitulée „Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonome", consacrée au même problème et où j'ai appliqué la même méthode — la méthode du pfaffian et des équations de Pfaff — dont s'est également servi M. S. L. Marchetti. Dans la présente note je donne quelques remarques relatives au sujet précédent.

De même que, pour traiter un problème concret du mouvement d'un système holonome non libre, l'emploi des équations de Lagrange de seconde espèce sans multiplicateur des liaisons, est plus approprié que celui des équations de première espèce, avec multiplicateur des liaisons, dans le cas d'un système non holonome il est plus commode avoir à résoudre des équations également sans multiplicateurs de liaisons. Aussi ma théorie des transformations canoniques fut-elle rattachée aux équations sans multiplicateurs de liaisons. Ces équations s'écrivent comme suit.

La position du système étant déterminée par les $n+k$ coordonnées q_i, $q_{n+\nu}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,k)$ et s'ils existent k liaisons différentielles, pouvant être mises sous la forme explicite suivante:

$$(1) \qquad q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} q'_i + a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$a_{\nu i}$, a_ν étant fonctions des coordonnées q_i, $q_{n+\nu}$ et du temps, alors les équations différentielles du mouvement peuvent s'écrire

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} = Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} Q_{n+\nu} a_{\nu i} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} \theta_\mu \left[\frac{da_{\mu i}}{dt} - \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} \right], (i = 1, 2, .., n),$$

où l'on a désigné par Θ la force vive T, exprimée comme fonction des vitesses indépendantes q'_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, de toutes les coordonnées et du temps, par Q_i, $Q_{n+\nu}$ les forces généralisées, par θ_μ la valeur de la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial q'_{n+\mu}}$ après en avoir éliminé les vitesses dépendantes.

Introduisons maintenant les nouvelles variables

$$p_i = \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}$$

ainsi que la fonction

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - \Theta - U,$$

U étant la fonction des forces. On peut alors, en vertu de (2), écrire le système d'équations

$$(3) \qquad dp_i : dq_i : dq_{n+\nu} : dt = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} + S_i :$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} : \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i + b_\nu : 1, (i = 1, 2, \ldots, n; \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

où

$$S_i(p_i, q_i, q_{n+\nu}, t) = \sum_{\mu=1}^{k} \theta_\mu \left[\frac{da_{\mu i}}{dt} - \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}} a_{i\nu} \right] (i = 1,2,...n)$$

et $q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i + b_\nu$ après transformation en impulsions.

En appliquant maintenant la méthode de Pfaff, comme nous l'avons montré dans la note citée plus haut, on aura les conditions (6) de cette note comme conditions de transformation canonique. Nous donnons ici ces conditions pour le cas

$$a_\nu = 0, \ \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} = \frac{\partial U}{\partial q_{n+\nu}} = \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_{n+\nu}} = 0 \qquad (\nu, \mu = 1,2, \ldots, k)$$

lorsque les équations du système non holonome dans notre note ont la forme

$$dp_i : dq_i : dt = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} : \frac{\partial H}{\partial p_i} : 1, \tag{4}$$

où

$$\sigma_{ij} = \sum_{\mu=1}^{k} \theta_\mu \left(\frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{\mu j}}{\partial q_i} \right);$$

En posant

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = Q_i^*, \tag{5}$$

les équations (4), quant à la forme, s'accordent avec les équations (7″) de la note de L. Marchetti. Pour le système (4) les conditions de transformations canoniques sont données, dans notre note, sous la forme suivante:

$$\frac{\partial(K^*,T)}{\partial(\alpha, t)} - [\alpha, t] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left\{ \frac{\partial(K^*, T)}{\partial(\alpha, q_i)} - [\alpha, q_i] \right\} + \tag{6}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \left\{ \frac{\partial(K^*, T)}{\partial(\alpha, p_i)} - [\alpha, p_i] \right\} = 0,$$

où α désigne l'une des variables t, q_i, p_i et

$$\frac{\partial(K^*, T)}{\partial(\alpha,\beta)} = \frac{\partial K^*}{\partial\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta} - \frac{\partial K^*}{\partial\beta}\frac{\partial T}{\partial\alpha}, \qquad [\alpha,\beta] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial\alpha}\frac{\partial Q_i}{\partial\beta} - \frac{\partial P_i}{\partial\beta}\frac{\partial Q_i}{\partial\alpha}\right).$$

Chez L. Marchetti les conditions (13) sont écrites en trois groupes différents, mais sont identiques à nos conditions, si on tient compte des équations (5). Ainsi, par ex., les conditions pour q_s s'écrivent

$$(13)_M \qquad \sum_1^n \left\{ [q_s, q_i]\frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} + [q_s, t] -$$

$$-\sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q^*_i\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\right. = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme l'on voit, les équations (6) et $(13)_M$ ne diffèrent que par leurs signes, dispositions des termes et notations.

Dans ma note sont citées aussi les données relatives au cas très intéressant, à savoir lorsqu'on donne la solution concrète du problème en question. Outre cette solution, fournie par le prof. Tchapliguine, aucun cas concret simple, à ma connaissance, n'a reçu de solution, pas plus des équations générales que de celle relative au cas spécial (6).

Par conséquent la question posée n'a nullement perdu de son intérêt. Je dirai même qu'aujourd'hui aussi, vingthuit ans après, à mon avis, il me paraît plus approprié, même dans le cas d'un système non holonome, de se servir des équations du mouvement dont on a éliminé les multiplicateurs de liaisons

Communiqué le 8-XI-1946

О КАНОНИЧКИМ ТРАНСФОРМАЦИЈАМА ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА НЕХОЛОНОМНИХ СИСТЕМА

Од

А. БИЛИМОВИЋА

У Fasc. III—IV, Vol. X. Serie II, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1941, штампан је чланак S. Luigi Marchetti-a под насловом „Riduzione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi". Како сам још 1914 године објавио у Comptes Rendus (т. 158. п. 1064—68) рад под насловом: „Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonome", који је посвећен истом предмету и где је употребљена иста метода — метода Пфаф-ова израза и Пфаф-ових једначина, — коју и S. L. Marchetti искоришћава, износим неколико примедаба о третираном питању.

Као што је за решавање конкретних проблема о кретању неслободних холономних система згодније употребљавати Лагранжеве једначине друге врсте, без множитеља веза, а не једначине прве врсте са множитељима веза, тако је и у случају нехолономног система згодније решавати једначине такође ослобођене множитеља веза. Према томе је и моја теорија каноничних трансформација била надовезана на једначине без множитеља веза. Те једначине овако изгледају.

Ако је положај система одређен са $n+k$ координата q_i, $q_{n+\nu}$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ \nu=1, 2, \ldots k)$ и постоји k диференцијалних веза, које можемо написати у решеној форми

$$(1)\qquad q'_{n+\nu}=\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, q'_i + a_\nu \qquad (r=1, 2, \ldots, k)'$$

где су $a_{\nu i}$, a_ν функције q_i, $q_{n+\nu}$ и времена, онда диференцијалне једначине кретања постају

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q'_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+\nu}}a_{\nu i}=Q_i+\sum_{\nu=1}^{k}Q_{n+\nu}a_{\nu i}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\theta^{\mu}\left[\frac{da_{\mu i}}{dt}-\frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_i}-\sum_{\upsilon=1}^{k}\frac{\partial q'_{n+\nu}}{\partial q_{n+\nu}}a_{\nu i}\right]. \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

где су: Θ жива сила T, изражена као функција независних брзина q'_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$, свих координата и времена, $Q_i, Q_{n+\nu}$ – генералисане силе, θ_μ вредност извода $\dfrac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}}$, из кога су елиминисане зависне брзине.

Уведимо сад нове променљиве

$$p_i = \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}$$

и функцију

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - \Theta - U,$$

где је U функција сила. Тада је могуће из (2) написати систем једначина

$$(3) \qquad dp_i : dq_i : dq_{n+\nu} : dt = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} + S_i : \frac{\partial H}{\partial p_i} :$$

$$: \sum_{i=1}^{k} b_{\nu i} p_i + b_\nu : 1, \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

где су

$$S_i(p_i, q_i, q_{n+\nu}, t) = \sum_{\mu=1}^{k} \theta_\mu \left[\frac{da_{\mu i}}{dt} - \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} \right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

и $q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i + b_\nu$ после трансформисања на импулсе.

Ако сад применимо Пфафову методу, како је то показано у поменутом нашем раду, добићемо услове (6) тог рада као услове за каноничну трансформацију. Дајемо овде у детаљима те услове за случај

$$a_\nu = 0, \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} = \frac{\partial U}{\partial q_{u+\nu}} = \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_{n+\nu}} = 0 \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, k)$$

кад једначине за нехолономни систем изгледају у раду овако

$$dp_i : dq_i : dt = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} : \frac{\partial H}{\partial p_i} : 1, \tag{4}$$

где је

$$\sigma_{ij} = \sum_{\mu=1}^{k} \theta_\mu \left(\frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{\mu j}}{\partial q_i} \right).$$

Ако уведемо ознаку

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = Q_i^*, \tag{5}$$

једначине (4) формално се поклапају са једначинама (7″) у чланку L. Marchetti-a. За систем (4) су код нас дати услови за канoничне трансформације и то у облику

$$\frac{\partial (K^*, T)}{\partial (\alpha, t)} - [\alpha, t] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left\{ \frac{\partial (K^*, T)}{\partial (\alpha, q_i)} - [\alpha, q_i] \right\} + \tag{6}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \left\{ \frac{\partial (K^*, T)}{\partial (\alpha, p_i)} - [\alpha, p_i] \right\} = 0,$$

где је α једна од променљивих t, q_i, p_i и

$$\frac{\partial (K^*, T)}{\partial (\alpha, \beta)} = \frac{\partial K^*}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial K^*}{\partial \beta} \frac{\partial T}{\partial \alpha}, \qquad [\alpha, \beta] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} \frac{\partial Q_i}{\partial \beta} - \frac{\partial P_i}{\partial t} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \right).$$

Код L. Marchetti-a су услови под (13) написани у три различите групе и идентично се поклапају са нашим условима, ако узмемо у обзир једначине (5). На пример, услови за q_s изгледају овако:

$$(13)_M \qquad \sum_{1}^{n}{}_i \left\{ [q_s q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q^*_i \right) \right\} + [q_s t] -$$

$$-\sum_{1}^{n}{}_{l}\left\{\left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial q_l}-\frac{\partial K}{\partial q_l}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_l}+\left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial p_l}-\frac{\partial K}{\partial p_l}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q_l}+Q_l^*\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)=\qquad\qquad (s=1,2,\ldots,n).\right.$$

Како видимо, једначине (6) и $(13)_M$ се разликују само знаком, распоредом чланова и ознакама.

У мом раду су наведени још и подаци о оном врло интересантном случају, кад је дато конкретно решење наведеног питања. Сем овог решења, које је дао проф. Tchapliguine, нису ми позната, ни за који конкретни једноставни случај, никаква решења не само општих једначина но ни једначина за специјалан случај (6).

Према томе постављено питање ни сад није изгубило свој интерес. Но и данас, после двадесет осам година, моје је скромно мишљење да је згодније и у случају нехолономног система оперисати са једначинама кретања из којих су искључени множитељи веза.

17. V. 1942.