CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES INTÉGRALES DE LAPLACE

Par

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

1. Dans plusieurs de mes travaux j'ai étudié la manière dont se comporte la fonction $A(u)$ figurant dans l'intégrale laplacienne

$$I(s) = s \int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du,$$

sachant que $I(s)$ est convergent pour $R(s) > o$ et uniformément borné dans un domaine convexe, ayant avec l'axe imaginaire un contact d'ordre $k-1$, avec $1 < k < \infty$. Dans ce qui suivra, un tel domaine sera désigné par D_k. Donc

$$|I(s)| < M \text{ pour tout } s \in D_k.$$

On rencontre, en outre, aussi l'hypothèse sur la manière dont se comporte l'intégrale de Dirichlet de la fonction limite $lim\ I(s)$, lorsque s tend vers un point du contour de D_k. Désignons cette intégrale par $H(y)$, de sorte qu'en posant

$$Q(t) = \lim_{\sigma=0} I(\sigma + |t|^k + i\lambda t)$$

l'on aura

$$H(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} Q(t)\, dt,$$

car il est évident que l'on peut prendre $s = |t|^k + i\lambda t$ pour l'équation du contour de D_k.

J'admets comme connu que par la nature même du problème la fonction $A(u)$ aussi doit satisfaire une certaine condition, appelée „la condition de convergence“, dont je me servirai sous forme

$$(K-o)\quad \liminf_{u=\infty} \operatorname*{Min}_{u \leqq u' \leqq U} u^{\beta}\,\{A(u')-A(u)\} = -\omega(\varepsilon)\to 0,\ 0<\varepsilon\to 0,$$

où $U = u+\varepsilon u^{\frac{1}{k}}$ et $0 \leqq \beta < \frac{k-1}{k}$.

Dans un travail antérieur [6] j'ai démontré, entre autres, le théorème suivant relatif à ce problème.

Théorème I. *De*

$$H(y) = Q(0) + o\left(y^{-\frac{k\beta}{k-1}}\right), \quad y\to\infty$$

il s'ensuit

$$A(u) = Q(0) + o(u^{-\beta}), \quad u\to\infty$$

toutes les fois que la condition $(K-o)$ *est satisfaite.*

Dans ce qui suivra j'aborderai les théorèmes du genre des précédents par une méthode nouvelle, à laquelle je fus conduit en cherchant à approfondir celle que j'ai exposée dans le travail cité, et qui s'est montrée nécessaire en vue de certaines généralisations du théorème énoncé. En même temps je préciserai le théorème I.

Théorème *A*. *De*

$$H(y) = Q(0) + o(y^{-\beta}), \quad y\to\infty$$

il résulte

$$A(u) = Q(0) + o(u^{-\beta}), \quad u\to\infty$$

toutes les fois que la condition $(K-o)$ *est satisfaite.*

Pour abréger posons

$$g_l(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-|t|^l + ixt\right] dt,$$

l étant supérieur à 1 et

$$K_\wedge(\delta, x) = \delta\wedge\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\delta(x-t))^{\frac{m}{m-1}}\right] g_m(\wedge t)\, dt,$$

m étant le plus petit nombre pair supérieur à k, δ et $\wedge$ étant des nombres positifs.

Le théorème A résulte des théorèmes B et C en vertu des théorèmes D et E.

Théorème *B. De*

(H) $$H(y) = O(y^{-\beta}), \quad y \to \infty$$

et

(I) $$A(u) = O\left(u^{\frac{k-1}{k}-\beta}\right), \quad u \to \infty$$

il résulte, pour tout $\delta > o$ et $\wedge > o$,

$$\int_0^\infty A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) K_\wedge(\delta, x-u)\, du = O\left(x^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \quad x \to \infty.$$

J'avance dès maintenant, à titre d'orientation du lecteur, qu'ils existent deux nombre δ et $\wedge$ tels que, pour tout x,

(7) $$C_3 \exp\left[-(C_4 x)^{\frac{m}{m-1}}\right] < K_\wedge(\delta, x) < C_5 \exp\left[-(C_6 x)^{\frac{m}{m-1}}\right]$$

où C_3, C_4, C_5 et C_6 désignent certaines constantes positives.

Théorème *C. De*

(h) $$H(y) = o(y^{-\beta}), \quad y \to \infty$$

et

(II) $$A(u) = O(u^{-\beta}), \quad y \to \infty$$

il résulte pour tout $\varepsilon > o$ et $\delta > o$,

(III) $$\limsup_{x=\infty} \left| x^{\beta\frac{k}{k-1}} \delta \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) \exp\left[-(\delta(x-u))^{\frac{m}{m-1}}\right] du \right| < P(\delta)$$

où $P(\delta) \to o$ *lorsque* $\delta \to \infty$.

Théorème *D. Soient* δ *et* $\wedge$ *deux nombres tels que l'inégalité* (7) *soit satisfaite. De*

$$\text{(IV)}\qquad \int_0^\infty A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) K_\wedge(\delta, x-u)\,du = O\left(x^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \quad u\to\infty$$

et

$$\text{(K-O)}\qquad u^\beta\{A(u')-A(u)\} > -\omega_0 \quad \textit{pour tout}\quad u\leq u'\leq u+u^{\frac{1}{k}}$$

il résulte

$$A(u)=O(u^{-\beta}), \quad u\to\infty.$$

Théorème *E. De* (III) *il résulte*

$$A(u)=o(u^{-\beta}), \quad u\to\infty$$

toutes les fois que la condition $(K-o)$ *est satisfaite.*

Au paragraphe 3 nous démontrerons les théorèmes B et C. Sur la démonstration des théorèmes D et E nous n'insisterons pas, étant donné qu'elle est analogue à celle des O, resp. o-théorèmes inverses de sommabilité.

Par contre nous nous proposons de démontrer que les théorèmes B et C avec les théorèmes D et F donnent le théorème A.

De $I(s)=O(1)$, $s\to 0$ et même de

$$I(s)=O\left(s^{\frac{1-k}{k}-\beta}\right), \quad s\to 0$$

(ces conditions étant satisfaites d'après $|I(s)|<M, s\in D_k$) on obtient d'après $(K-O)$ (cette condition comme conséquence de $(K-o)$), en vertu d'un O-théorème inverse

$$\text{(I)}\qquad A(u)=O\left(u^{\frac{k-1}{k}-\beta}\right), \quad u\to\infty.$$

Sans restreindre les hypothèses proposées, on peut poser $Q(0)=0$. De l'inégalité précédente et des hypothèses relatives à la fonction $I(s)$, il résulte d'après le théorème B que (IV) sera satisfait.

Or, comme de $(K-o)$ il résulte $(K-O)$, le théorème D signifie que (II) sera satisfait. Ainsi donc les hypothèses faites au théorème C sont remplies et l'on conclut que $A(u)$ satisfait l'inégalité (III). Finalement, en vertu du théorème E, on obtient

$$A(u) = o(u^{-\beta}), \quad u \to \infty,$$

ce qui démontre le théorème A.

En terminant, je dois ajouter que le travail [7] de MM. N. Wiener et H. R. Pitt rentre aussi dans le domaine de l'étude précédente. Ils ont, en effet, démontré le théorème suivant: *Étant donné $I(s)/s$ absolument intégrable le long de la courbe L_k $(s = |t|^k + i\lambda t, -\infty < t < +\infty)$ telle que*

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{I(\zeta)}{s - \zeta} d\zeta$$

et qu'en outre $A(u) > -C$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on aura

$$\text{(V)} \qquad x^{-\frac{1}{k}} \int_{x - \varepsilon x^{\frac{1}{k}}}^{x + \varepsilon x^{\frac{1}{k}}} A(u)\, du = o(1), \qquad x \to \infty.$$

Ce théorème permet, en tenant compte des théorèmes B et D (tous deux avec $\beta = 0$), d'arriver à l'expression (V), puis aussi à la convergence de $A(u)$ à condition toutefois que celle-ci satisfasse la condition $(K - O)$ avec $\beta = 0$, l'inégalité (Γ) étant une conséquence des inégalités $I(s) = O(1)$, $s \to \infty$ et $(K\text{-}o)$.

2. Certains détails de la méthode que je me propose d'exposer sont connus de mes travaux antérieurs [5] où je m'en suis servi pour démontrer un théorème analogue aux précédents, mais se rapportant à une singularité exponentielle de la forme $\exp\left[-s^{-\frac{1}{2n+1}}\right]$.

Pour démontrer les théorèmes B et C je me servirai des Lemmes suivants.

Lemme I.

$$\text{(1)} \qquad g_l(x) = O\left(\frac{1}{1 + |x|^{l+1}}\right), \qquad x \to \infty.$$

Démonstration: Voir G. Polya — G. Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I (Berlin, 1925), p. 286.

Lemme II. *Soit*

$$\varphi(y,\zeta) = B(y+\zeta)\int_0^\infty e^{-\eta^k}\left\{\cos\zeta\eta - \cos\left[\alpha_0\left(y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right)(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\right]\right\}d\eta$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{k-1}{k}$$

et

$$B(u) = O(u^b), \quad u\to\infty, \; 0\leq b<1.$$

Alors

$$\int_{-y}^{\infty}\varphi(y,\zeta)\,d\zeta = O(y^{b-1}), \quad y\to\infty.$$

Ce Lemme est au fond identique aux Lemmes I, II et III du travail [5] et aux Lemmes II et II du travail [4]. Aussi, je me dispenserai d'en donner ici la démonstration.

Lemme III. *Soit*

$$G(\lambda,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\lambda t^m + |t|^k + ixt\right]dt.$$

Il existent deux constantes positives $C_0 = C_0(\lambda)$ *et* $C_1 = C_1(\lambda)$ *telles que*

$$|G(\lambda,x)| < C_0\exp\left[-C_1x^{\frac{m}{m-1}}\right]. \tag{2}$$

Démonstration. Voir [5], p. 143, formule (4).

Lemme IV. *Soit*

$$\Psi(y) = \int_0^\infty B(u)\,g_k(u-y)\,du, \tag{3}$$

$$\Psi^*(y) = \int_0^\infty B(u)\, K_\Lambda(\delta, u-y)\, du,$$

$$B(u) = O(u^b), \quad u \to \infty,\ 0 \leq b < 1$$

et $y^{\beta\frac{k}{k-1}}\Psi(y)$ *bornée lorsque* $y \to \infty$. *Alors*

$$\lim_{y=\infty} \sup \left| y^{\beta\frac{k}{k-1}} \Psi^*(y) \right| < L$$

où $L = const. > 0$ *ou* $= 0$ *suivant que* $y^{\beta\frac{k}{k-1}}\Psi(y) = O(1)$ *ou* $= o(1)$ *lorsque* $y \to \infty$.

Démonstration. D'après (1) et (2) pour $g_k(x)$ et $G(\lambda, x)$ sont valables les règles d'inversion et de composition des intégrales de Fourier, de sorte qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}\, G(\lambda, t)\, dt = \pi \exp\left[|a|^k - \lambda a^m\right]$$

et

$$(4)\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\zeta) G(\lambda, x-\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax} da \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} g_k(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}\, G(\lambda, t)\, dt \\ \displaystyle\qquad = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[iax - \lambda a^m\right] da \\ \qquad = \pi \Lambda g_m(\Lambda x) \end{cases}$$

avec $\Lambda^{-m} = \lambda$. Posons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) G(\Lambda^{-m}, \zeta - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} + \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta+\varepsilon} + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty}$$

$$= J_1 \quad + J_2 \quad + J_3.$$

On aura

$$\left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} J_2\right| = \left|\int\limits_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta+\varepsilon} \left(\frac{\zeta}{t}\right)^{\beta\frac{k}{k-1}} t^{\beta\frac{k}{k-1}} \Psi(t)\, G\left(\Lambda^{-m}, \zeta-t\right) dt\right|$$

$$< C_2 \operatorname*{Max}_{\zeta-\varepsilon\leqq\zeta'\leqq\zeta+\varepsilon} \zeta'^{\beta\frac{k}{k-1}} \left|\Psi(\zeta')\right|.$$

Le $\limsup\limits_{\zeta=\infty}$ dans le second membre de l'inégalité précédente ne dépendant pas de ε, on obtient

$$\limsup_{\zeta=\infty} \left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} J_2\right| < L_0,$$

avec

$$L_0 = C_2 \limsup_{\zeta=\infty} \left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} \Psi(\zeta)\right|.$$

On se rend facilement compte que d'après (2), limsup $\left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} J_1\right|$ et $\limsup \left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} J_3\right|$ sont plus petits que $M(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ étant une fonction tendant vers zéro lorsque $\varepsilon\to\infty$. Par conséquent, en choisissant ε aussi grand que l'on voudra, on aura

$$\limsup_{\zeta=\infty} \left|\zeta^{\beta\frac{k}{k-1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\, G(\Lambda^{-m}, \zeta-t)\, dt\right| < L_0.$$

De la même manière on peut démontrer que

$$\limsup_{y=\infty} \left| y^{\beta\frac{k}{k-1}} \frac{\delta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\delta(y-t))^{\frac{m}{m-1}}\right] \Psi(t)\, G(\Lambda^{-m}, \zeta-t)\, dt\right| < L$$

où L dépend de L_0 de sorte que L et L_0 deviennent en même temps ou $= const. > 0$, ou bien $= 0$. En substituant dans cette intégrale (3) à la place de $\Psi(t)$ et en intervertissant l'ordre d'intégration, ce qui est permis en vertu de (1), (2), $B(u) = O(u^b)$, $u\to\infty$ et

$$(5) \quad K_\Lambda(\delta, x) = O\left(\exp\left[-\frac{(\delta x)^{\frac{m}{m-1}}}{2^{\frac{1}{m}}}\right]\right), \; x \to \infty$$

on obtiendra la conclusion du Lemme IV.

L e m m e V. 1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$ *il existe un* $\Lambda_0 = \Lambda_0(\varepsilon, \epsilon, \delta)$ *tel que*

$$(6) \; (\pi\delta - \epsilon)\exp\left[-(\delta x)^{\frac{m}{m-1}}\right] \leq K_\Lambda(\delta, x) \leq (\pi\delta + \epsilon)\exp\left[-(\delta x)^{\frac{m}{m-1}}\right]$$

pour tout $\Lambda > \Lambda_0$ *et tout* $|x| < \varepsilon$.

2. *Ils existent un* δ *et un* Λ *tels que*

$$(7) \qquad C_3 \exp\left[-(C_4 x)^{\frac{m}{m-1}}\right] \leq K_\Lambda(\delta, x) \leq C_5 \exp\left[-(C_6 x)^{\frac{m}{m-1}}\right]$$

pour tout $-\infty < x < \infty$.

Ce Lemme est identique au Lemme III du travail [5].

L e m m e VI. *Soit*

$$R_1(y) = \int_0^\infty A(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k u} \cos \alpha_0 (y+u)\, t\, dt,$$

$$R_2(y) = \int_0^\infty A(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k u} t^{k-1} \sin \alpha_0 (y-u)\, t\, dt$$

et

$$R_3(y) = \int_0^\infty A(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k u} t^{k-1} \sin \alpha_0 (y+u)\, t\, dt.$$

Si

$$(8) \qquad A(u) = O(u^\gamma), \; u \to \infty \; avec \; 0 \leq \gamma < \frac{k-1}{k}$$

alors

$$R_i(y) = O(y^{\gamma+1-k}), \quad y \to \infty, \; i = 1, 2, 3.$$

Démonstration: D'après (1) et (8) on trouve

$$|R_1(y)| = \left| \int_0^\infty A(u) \frac{du}{\sqrt[k]{u}} \int_0^\infty e^{-t^k} \cos \alpha_0 \left(\frac{y+u}{\sqrt[k]{u}} \right) t \, dt \right|$$

$$< \text{const.} \int_0^\infty u^{\gamma - \frac{1}{k}} \left| \frac{y+u}{\sqrt[k]{u}} \right|^{-k-1} du$$

$$< \text{const.}\, y^{\gamma+1-k} \int_0^\infty \frac{\tau^{\gamma+1}}{(1+\tau)^{k+1}} d\tau = O\left(y^{\gamma+1-k}\right), \quad y \to \infty.$$

D'après (1), (8) et

$$\int_0^\infty e^{-t^k} t^{k-1} \sin x t \, dt = \frac{x}{k} \int_0^\infty e^{-t^k} \cos x t \, dt$$

on aura

$$|R_2(y)| = \left| \int_0^\infty A(u) \frac{du}{u} \int_0^\infty e^{-t^k} t^{k-1} \sin \alpha_0 \left(\frac{y-u}{\sqrt[k]{u}} \right) t \, dt \right|$$

$$= \frac{\alpha_0}{k} \left| \int_0^\infty A(u) u^{-\frac{k+1}{k}} (y-u) \, du \int_0^\infty e^{-t^k} \cos \alpha_0 \left(\frac{y-u}{\sqrt[k]{u}} \right) t \, dt \right|$$

$$< \text{const.}\, y^{\frac{\gamma k + k - 1}{k}} \int_0^\infty \frac{t^\gamma |1-t| \, dt}{t^{\frac{k+1}{k}} + y^{k-\frac{1}{k}} \left| \alpha_0 (1-t) \right|^{k+1}}.$$

Posons

$$\int_0^\infty = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y).$$

On aura

$$I_1(y) < y^{\frac{1}{k}-k} \int_0^{1+\varepsilon} \frac{t^{\gamma}\, dt}{(\alpha_0(1-t))^k} = O\left(y^{\frac{1}{k}-k}\right), \; y \to \infty.$$

De la même manière on obtient,

$$I_3(y) = O\left(y^{\frac{1}{k}-k}\right), \quad y \to \infty.$$

Posons $\Theta = (1-\varepsilon)^{\frac{k+1}{k}}$. Alors

$$I_2(y) < 2^{\gamma} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{dt}{\Theta + y^{k-\frac{1}{k}} \left|\alpha_0(1-t)\right|^{k+1}}.$$

En faisant la substitution

$$t = 1 - y^{\frac{1-k}{k}} \zeta$$

on obtient

$$I_2(y) < 2^{\gamma} y^{\frac{1}{k}-k} \int_{-\varepsilon y^{\frac{k-1}{k}}}^{+\varepsilon y^{\frac{k-1}{k}}} \frac{d\zeta}{\Theta + \left|\alpha_0 \zeta\right|^{k+1}} = O\left(y^{\frac{1}{k}-k}\right), \; y \to \infty.$$

Lemme VII. *De* $|I(s)| < M$ *pour tout* $s \in D_k$ *et* (8) *il s'ensuit, en posant* $A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) = B(u)$, *que*

$$(9)\begin{cases} \displaystyle\int_{-y}^{\infty} B(y+\zeta)\, d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k} \cos\left[\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right\}(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right] d\eta \\ \quad = 2\pi H\left(\alpha_0 y^{\frac{k}{k-1}}\right) + O\left(y^{\frac{k(\gamma+1-k)}{k-1}}\right), y \to \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Sans aucune restriction on peut supposer que $A(u) = 0$ pour tout $0 \leq u \leq 1$.

Donc

$$\left|I(\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 t\right| < \text{const.}\,|t|^k \int_1^\infty \exp\left[-|t|^k u+\varepsilon' u\right] du$$

$$= O\left(\exp\left[-\frac{|t|^k}{2}\right]\right), \quad t\to\infty,$$

puisque on a pour chaque $\varepsilon'>0$, $|A(u)|<\text{const.}\exp[-\varepsilon' u]$. On conclut que la fonction

$$\frac{\sin\alpha_0 xt}{t} I(\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 t)$$

est absolument intégrable le long de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Par suite il existe l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha_0 xt}{t} I_\varepsilon(t)\, dt$$

où nous avons posé

$$I_\varepsilon(\mathrm{t}) = \frac{|t|^k+i\alpha_0 t}{\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 t} I(\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 t).$$

Puis, ayant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha_0 xt}{\alpha_0 t} I(\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 \mathrm{t})\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha_0 xt}{\alpha_0 t}\Big\{I(\varepsilon+|t|^k+i\alpha_0 t)$$

$$-I_\varepsilon(t)\Big\}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A(u)\, e^{-\varepsilon u}\, du \int_0^\infty e^{-t^k u}\Big\{\cos\alpha_0(x-u)t-\cos\alpha_0(x+u)t$$

$$-\frac{t^{k-1}}{\alpha_0}\sin\alpha_0(x-u)t+\frac{t^{k-1}}{\alpha_0}\sin(x+u)t\Big\}\, dt$$

et le passage $\varepsilon\to 0$ au second membre étant permis, en vertu de (1) et (8), et, en outre, la deuxième intégrale au premier membre tendant vers 0 avec $\varepsilon\to 0$, — on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\alpha_0 t}{\alpha_0 t} Q(t)\,du = \int_0^{\infty} A(u)\,du \int_0^{\infty} e^{-t^k u} \cos\alpha_0 (x-u)\,t\,dt$$

$$-R_1(x) - \frac{1}{\alpha_0} R_2(x) + \frac{1}{\alpha_0} R_3(x),$$

c'est-à-dire, d'après le Lemme VI,

$$\frac{2\pi}{\alpha_0} H(\alpha_0 x) = \int_0^{\infty} A(u)\,du \int_0^{\infty} e^{-t^k u} \cos\alpha_0 (x-u)\,t\,dt + O(x^{\gamma+1-k}), x \to \infty.$$

Les substitutions

$$x = y^{\frac{k}{k-1}},$$

et

$$t = \eta u^{-\frac{1}{k}}$$

$$u = (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}$$

conduisent en définitive à la relation (9).

3. Démonstration du Théorème B. En partant de (I) et (8) $\left(\text{avec } \gamma = \frac{k-1}{k} - \beta\right)$ on aura, d'après (9) et (H),

$$\int_{-y}^{\infty} B(y+\zeta)\,d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k} \cos\left[\alpha_0 \left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right\} (y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}} \eta\right] d\eta$$

$$= O\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), y \to \infty,$$

d'où l'on obtient, en vertu du Lemme II $\left(\text{avec } b = 1 - \beta\frac{k}{k-1}\right)$,

$$\int_{-y}^{\infty} B(y+\zeta)\,d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k} \cos\zeta\eta\,d\eta = O\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \quad y \to \infty$$

c'est-à-dire

(10) $$\Psi(y) = O\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \quad y \to \infty.$$

Donc, d'après le Lemme IV (avec $L>0$ en vertu de (10))

$$\int_0^\infty B(u)\, K_\Lambda(\delta, u-y)\, du = O\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \; y\to\infty$$

ce qui démontre le théorème B.

Démonstration du Théorème C. D'après IV, (8) (avec $\gamma=0$), (9) et (h) on aura

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\, d\zeta \int_0^\infty e^{-\eta^k} \cos\left[\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right\}(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right] d\eta = o\left(y^{-\beta\frac{1}{k-1}}\right), \; y\to\infty,$$

d'où, en vertu du Lemme II (avec $b=0$), il suit

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\, d\zeta \int_0^\infty e^{-\eta^k} \cos\zeta\eta\, d\eta = o\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \; y\to\infty$$

c'est-à-dire

$$\Psi(y) = o\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \quad y\to\infty. \tag{11}$$

Donc, d'après le Lemme IV (avec $L=0$ en vertu de (11)),

$$\int_0^\infty B(u)\, K_\Lambda(\delta, u-y)\, du = o\left(y^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right), \; y\to\infty$$

et par suite

$$y^{\beta\frac{k}{k-1}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} B(y+\zeta) K_\Lambda(\delta,\zeta)\, d\zeta = o(1) - \Phi_y(\Lambda, \delta, \varepsilon), \; y\to\infty$$

où nous avons posé

$$\Phi_y(\Lambda, \delta, \varepsilon) = y^{\beta\frac{k}{k-1}} \left\{\int_{-y}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty\right\} B(y+\zeta) K_\Lambda(\delta,\zeta)\, d\zeta.$$

D'après (5) et (IV), pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $P(\delta)$ telle que

$$\limsup_{y=\infty} |\Phi_y(\wedge, \delta, \varepsilon)| = \pi P(\delta) \to 0, \delta \to \infty.$$

En choisissant $\wedge$ suffisamment grand on aura, d'après (6),

$$\limsup_{y=\infty} \left| y^\beta \delta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} B(y+\zeta) \exp\left[-(\delta\zeta)^{\frac{m}{m-1}} \right] d\zeta \right| < \frac{\pi \delta P(\delta)}{\delta\pi - \epsilon}$$

ce qui démontre le théorème C, puisque $\epsilon \to 0$ lorsque $\wedge \to \infty$.

Présenté le 31-III-1941.

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ LAPLACE-ОВИХ ИНТЕГРАЛА

Од

ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

Нека је $A(u)$ дефинисано за $u \geqslant o$ и ограничене варијације у сваком коначном размаку,

$$I(s) = s \int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du$$

конвергентно за $R(s) > o$ и униформно ограничено за све s неке области која са имагинарном осовином има додир $k-1$ реда са $k > 1$. Не ограничавајући претпоставке можемо узети да је руб ове области дат једначином $s = |t|^k + i\lambda t$, где је λ неки реалан број. Даље нека је

$$Q(t) = \lim_{\varepsilon = o} I(\varepsilon + |t|^k + i\lambda t)$$

и

$$H(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} Q(t)\, dt.$$

Претпоставку

$$\liminf_{u=\infty} \operatorname*{Min}_{u \le u' \le U} u^{\beta}\{A(u')-A(u)\}=o(1),\ o<\varepsilon\to o,$$

где је $U=u+\varepsilon u^{\frac{1}{k}}$ означићемо са (K-o), а претпоставку

$$u^{\beta}\{A(u')-A(u)\}>O(1) \text{ за све } u\leq u'\leq u+u^{\frac{1}{k}}$$

означићемо са (K-O). При томе је $o\leqslant\beta<\frac{k-1}{k}$.

Аутор доказује:

Став *A*. *Из* $H(y)=o(y^{-\beta})$, $y\to\infty$ *и* (K-o) *следи* $A(u)=o(u^{-\beta})$, $u\to\infty$.

Ради лакшег формулисања помоћних ставова ставимо:

$$g_m(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-|t|^m-ixt].$$

при чему је m најмањи парни број већи од k, и

$$K_\wedge(x)=\delta_\wedge\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-(\delta(x-t))^{\frac{m}{m-1}}\right]g_m(t)\,dt,$$

где су ζ и $\wedge$ извесни позитивни бројеви. Оријентације ради споменимо да постоји такво $\zeta>o$ и такво $\wedge>o$ да је за све x,

$$C_1\exp\left[-(c_2x)^{\frac{m}{m-1}}\right]<K_\wedge(\delta,x)<C_3\exp\left[-(C_4x)^{\frac{m}{m-1}}\right], \tag{1}$$

при чему су C_1, C_2, C_3 и C_4 извесни позитивни бројеви.

Споменути помоћни ставови се тада могу овако формулисати.

Став *B*. *Из* $H(y)=O(y^{-\beta}), y\to\infty$ *и* $A(u)=O\left(u^{\frac{k-1}{k}}-\beta\right)$, *за* $u\to\infty$ *следи за свако* $\delta>o$ *и* $\wedge>o$,

$$\int_0^{\infty}A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right)K_\wedge(\delta,x-u)\,du=O\left(x^{-\beta\frac{k}{k-1}}\right),\ x\to\infty. \tag{2}$$

Став *C*. *Из* $H(y)=o(y^{-\beta})$, $y\to\infty$ *и* $A(u)=O(u^{-\beta})$, $u\to\infty$ *следи за свако* $\varepsilon>o$ *и* $\delta>o$

$$(3) \quad \limsup_{x=\infty} \left| x^{\beta \frac{k}{k-1}} \delta \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) K_{\Lambda}(\delta, x-u)\, du \right| < P(\delta) \to o, \delta \to \infty.$$

Став D. *Из* (2) (*са таквим* δ *и* Λ *да важи* (1)) *и* (K-O) *следи* $A(u) = O(u^{-\beta})$, $u \to \infty$.

Став E. *Из* (3) *и* (K-o) *следи* $A(u) = o(u^{-\beta})$, $u \to \infty$.

RÉFÉRENCES

V. G. Avakumović —

[1] Théorèmes relatifs aux intégrales de Laplace sur leur frontière de convergence. C. R. Acad. Paris, t. 240, p. 224 (1937).

[2] Ueber das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten. C. R. du 2-me Congr. interbalkan. des Math. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr. 1/2. S. 101–106 (1938).

[3] Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist. II. Math. Zeit. 46, 1. S. 67–69 (1940).

[4] Ueber das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. Math. Zeit. 46, 5. S. 650–664 (1940).

[5] Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponentialcharakter ist. III. Math. Zeit. 47, 1, S. 141 - 152 (1940).

[6] Théorèmes relatifs aux intégrales de Laplace. Thèse (en serbe), Beograd (1939).

Wiener N. & Pitt H. R. —

[7] A generalization of Ikeharas theorem. J. Math. Phys. of the Mass. Inst. of Technology. 17, p. 247–258 (1939).

Wiener N. —

[8] Tauberian theorems. Ann. of Math. (2) 33, p. 1–100 (1932).