

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАЛУБНОЙ НАСТИЛКИ СТАЛЬНЫХ СУДОВ

Я. М. ХЛЫТЧИЕВ

Конструктивные размеры листов и набора корпуса торговых судов определяются правилами классификационных обществ; наиболее распространены правила английского Ллойда. Основанные на столетней статистике зарегистрированных судов, эти правила имеют огромную ценность не только для судовладельцев, грузоотправителей и страховых обществ, но и для конструкторов, давая возможность сравнивать с ними результаты теоретических расчетов прочности, производимых при проектировании нового судна.

Обычно, размеры Ллойда совпадают с расчетными данными или дают несколько больший запас прочности, оправдываемый чисто практическими соображениями, как неизбежность изнашивания, ржавления и т. п., но иногда эти размеры оказываются недостаточными. Это происходит, когда конструктор учитывает такие случаи нагрузки, с которыми суда редко встречаются, и которые поэтом ускользают от внимания статистики. К числу таких нагрузок относится изгиб судна при курсе поперек волн близких ему по длине. В этом случае судно представляет огромную трубчатую балку, нагруженную собственным весом, полезными грузами и силами инерции от кильевой качки, подпертую попеременно по средине (при положении на вершине волны) и по концам (на подошве волны).

В этом последнем положении днищевая обшивка судна растягивается, а настилка верхней палубы сжимается; допускаемое сжимающее напряжение в ней для торговых судов

разных типов колеблется от 0,9 до 1,5 t/cm², но оно не может превосходить критическое напряжение палубной настилки, соответствующее ее продольному изгибу, как пластины, опертой на ряд поперечных балок, т. н. „бимсов“. Этим соображением должна определяться необходимая толщина листов верхней палубы.

Но и сами поперечные балки должны обладать достаточной жесткостью, чтобы при продольном изгибе пластины явиться узловыми линиями, разбивающими ее упругую поверхность на ряд полуволн между соседними балками.

Если эти два условия не выполнены, то при встрече судна с поперечными волнами, близкими ему по длине, надо ожидать аварию. Случаи таких аварий известны, хотя и немногочисленны, что объясняется, как увидим ниже, не столько достаточной прочностью палубы и бимсов, сколько малой вероятностью такой встречи. В приведенном ниже примере (§ 5) взято судно обычного грузового типа из известного учебника проектирования судов проф. Байльса. В применении к нему оказывается, что при указанной Ллойдом толщине палубной настилки ее критическое напряжение не превзошло бы 0,5 t/cm², если бы жесткость бимсов была достаточной. Но и это последнее условие оказывается не выполненным и момент инерции площади сечения бимса, указанного Ллойдом, составляет всего 3600 см⁴, вместо требуемого минимального в 3300 см⁴, т. е. почти без всякого запаса.

Вопрос об устойчивости сжатой пластины, подкрепленной поперечными ребрами, был впервые рассмотрен С. П. Тимошенко¹ в 1915 г. Однако, полученные им результаты обратили на себя внимание только строителей гражданских сооружений, и то лишь 20 лет спустя. Насколько известно автору, они остались без применения в судостроении² по настоящее время.

Надо думать, что причиной является то обстоятельство, что в исследовании С. П. Тимошенко им было дано урав-

¹ „Известия Инст. Пут. Сообщ.“, СПБ. 1915 г.

² Интересно отметить, что непосредственный повод к изучению этого вопроса профессором С. П. Тимошенко дали как раз конструкции одного судна, которые в то время разрабатывал автор этой статьи.

нение, определяющее критическое напряжение пластины при любом числе ребер⁸, но практически оно было применено только к случаям одного и трех поперечных ребер, для каковых им даны таблицы необходимой жесткости. Непосредственное применение этого уравнения к значительному числу ребер, что имеет место в судовых конструкциях, сопряжено в каждом случае с большой вычислительной работой, для которой у конструктора судостроительного бюро, конечно, нет времени. Эта работа еще увеличивается, если следовать при вычислениях тому обратному пути, которым идет сам С. П. Тимошенко, именно определять критические нагрузки для ряда ребер различных жесткостей и из сравнения их определять жесткость, необходимую для достижения наибольшей критической нагрузки пластины.

В настоящей статье уравнению С. П. Тимошенко дана форма, при которой из него непосредственно определяется необходимая жесткость ребра, при чем окончательный результат, данный уравнением (28), настолько прост, что может быть без затруднения использован в любой судостроительной чертежной. Попутно установлен предел погрешности результата, которому до сих пор не уделялось достаточно внимания.

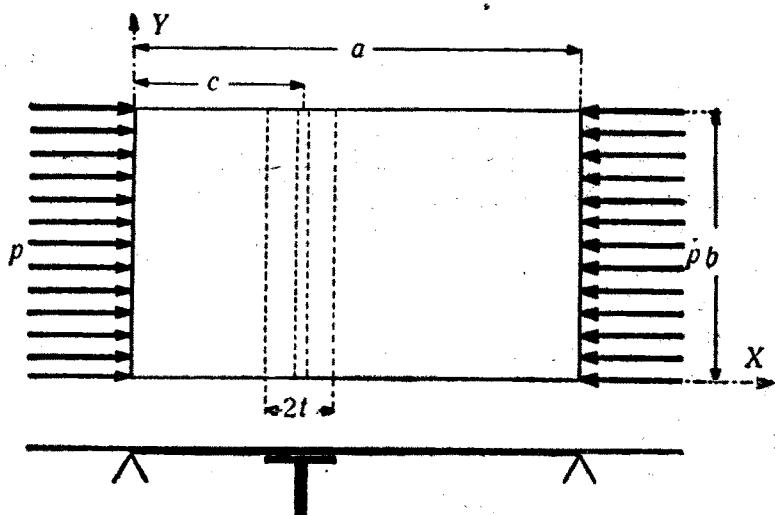
С. П. Тимошенко вывел уравнение (21) из принципа наименьшей потенциальной энергии деформации и это дало повод немецким комментаторам невзаслуженно именовать это уравнение приближенным. В настоящей статье оно выведено из основного дифференциального уравнения упругой поверхности изогнутой пластины и тем показано, что оно является приближенным лишь в такой же мере, в какой приближена вся теория изгиба пластин.

Первые два §§-а статьи посвящены простейшим случаям сжатия пластины с 1 и 2 ребрами, отчасти чтобы читателю было легче следить за дальнейшими, довольно громоздкими, выкладками §-а 3, а отчасти, чтобы попутно дать таблицу необходимой жесткости для случая 2 ребер, опущенного в работе С. П. Тимошенко. В § 4 рассмотрен вопрос об увеличении жесткости ребра от присоединения к нему пластины. В § 5 приведен для иллюстрации применений выводов упомянутый выше пример грузового парохода.

⁸ Уравнение (1) настоящей статьи.

I. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНЫМ РЕБРОМ

Обозначим через ζ стрелку прогиба ребра (черт. 1) в сечении, расположенном в расстоянии y от края, через E модуль упругости материала и через I момент инерции площади сечения ребра совместно с прилегающей к нему частью сечения пластины¹. Тогда давление пластины на единицу длины ребра будет $EIa^4\zeta/dy^4$; ту же величину будет иметь



черт. 1

и давление ребра на пластину. Предполагая, что пластина свободно оперта по контуру, представим ее стрелку прогиба тригонометрическим рядом

$$(1) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где m и n равны 1, 2, 3... Тогда стрелка прогиба ребра, связанного с пластиной, будет

¹⁾ Вопрос о том, какую долю пластины можно считать участвующей в изгибе ребра, рассмотрен в § 4.

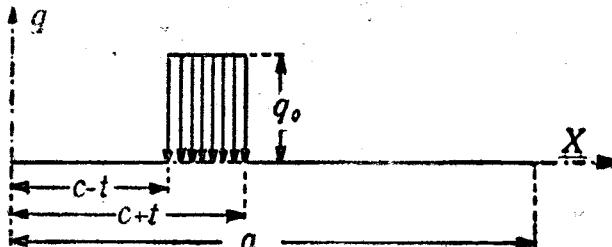
$$\zeta - (w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

а его давление на пластину

$$(2) \quad 2tq_0 = - EI \frac{d^4 \zeta}{dy^4} = - \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 EI \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_{mn} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где $2t$ обозначает ширину поверхности соприкосновения ребра и пластины, а q_0 давление на единицу этой поверхности.

Таким образом, нормальная нагрузка на пластину равна нулю при $0 < x < c-t$ и $c+t < x < a$, а для значений x , лежащих между $c-t$ и $c+t$ определяется уравнением (2). Этую за-



черт. 2

висимость, показанную на черт. 2, можно представить тригонометрическим рядом

$$q = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi c}{a} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

где $k = 1, 2, 3 \dots$. Если в этом уравнении заменим q_0 его выражением из уравнения (2), то будем иметь

$$q = - 2\pi^2 \frac{EI}{tb^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n^4 a_{mn} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi c}{a} \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Принимая во внимание, что ширина поверхности соприкосновения ребра и пластины, обычно, весьма мала по сравнению с длиной пластины, мы можем в этом выражении заменить $\sin k\pi t/a$ через $k\pi t/a$. Если кроме того поменять местами t и k и переменить порядок суммирования, то нормальная нагрузка на пластину представится в виде

$$(3) \quad q = -2\pi^4 \frac{EI}{ab^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} n^4 \sin \frac{k\pi c}{a} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины, сжатой продольно нагрузкой p на единицу ширины и изгибающей одновременно произвольно распределенным давлением q на единицу поверхности, имеет вид

$$(4) \quad D \nabla_1^4 w - q = -p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

где

$$(4') \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

т. н. „жесткость пластины“, h ея толщина, а μ Пуассонов коеффициент. Если вместо q ввести выражение (3), то это дифференциальное уравнение будет соответствовать продольному изгибу пластины, подкрепленной поперечным ребром, вследствие нагрузки p . Если, кроме того, заменить w его выражением (1), то, уравнивая коеффициенты при синусах той же кратности в уравнении (4), получим

$$(5) \quad D \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 a_{mn} + 2\pi^4 \frac{EI n^4}{ab^4} \sin \frac{m\pi c}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{k\pi c}{a} = \\ = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} a_{mn} p_{cr},$$

где через $\beta = a/b$ обозначено отношение сторон пластины. Это уравнение определяет критические значения сжимающей нагрузки p_{cr} , вызывающие продольный изгиб.

Нельзя предвидеть, какое число полуволн m упругой поверхности вдоль оси x -ов соответствует наименьшей критической нагрузке для заданных размеров и материала пла-

стини и ребра, но можно утверждать, что в направлении оси у-ов этой нагрузке соответствует одна полуволна. Поэтому, не уменьшая общности дальнейшего рассуждения, можно в уравнении (5) положить $n=1$ и отбросить для сокращения письма второй индекс у коеффициентов. Если, кроме того, ввести обозначения¹

$$(5') \quad \tilde{\omega} = \frac{EI}{Db} \beta^2, \quad \lambda = \frac{a^2 p_{cr}}{\pi^2 D},$$

то уравнение (5) примет вид

$$(6) \quad a_m(m^2 + \beta^2) + 2\tilde{\omega} \sin \frac{m\pi c}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi c}{a} = \lambda m^2 a_m.$$

Например, для $c = 1/2a$, т. е. для ребра, расположенного на средине длины пластины, получим из уравнения (6):

$$\begin{aligned} a_1(1^2 + \beta^2)^2 + 2\tilde{\omega}(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) &= 1^2 \lambda a_1, \\ a_2(2^2 + \beta^2)^2 &= 2^2 \lambda a_2, \\ a_3(3^2 + \beta^2)^2 - 2\tilde{\omega}(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) &= 3^2 \lambda a_3, \\ a_4(4^2 + \beta^2)^2 &= 4^2 \lambda a_4, \\ \vdots &\vdots \\ \vdots &\vdots \end{aligned}$$

Эти уравнения распадаются на: 1) группу независимых уравнений с четным индексами при коеффициентах, из которых следует:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} (2^2 + \beta^2)^2 &= 2^2 \lambda, \\ (4^2 + \beta^2)^2 &= 4^2 \lambda, \\ (6^2 + \beta^2)^2 &= 6^2 \lambda, \\ \vdots &\vdots \end{aligned} \right\}$$

и 2) систему однородных линейных уравнений для коеффициентов с нечетными индексами, из которой следует²

$$(8) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} (1^2 + \beta^2)^2 - 1^2 \lambda + 2\tilde{\omega} & -2\tilde{\omega} & 2\tilde{\omega} & \dots \\ -2\tilde{\omega} & (3^2 + \beta^2)^2 - 3^2 \lambda + 2\tilde{\omega} & -2\tilde{\omega} & \dots \\ 2\tilde{\omega} & -2\tilde{\omega} & (5^2 + \beta^2)^2 - 5^2 \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right| = 0.$$

¹ Тимошенко обозначает через $\gamma = EI/bD = \tilde{\omega}/\beta^3$ и через $\sigma_{cr} = p_{cr}/h$.

² Тривиальное решение $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ исключает возможность продольного изгиба.

Наименьший из корней уравнений (7)

$$(9) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2^2} (2^2 + \beta^2)^2$$

отвечает продольному изгибу в *две* полуволны вдоль оси x -ов. Если поставить условием, что критическая нагрузка, отвечающая продольному изгибу в *одну* полуволну, не должна быть меньше нагрузки, определяемой уравнением (9), то ребро сыграет ту же роль, которую бы сыграло *абсолютно жесткое* ребро. Математически это условие значит, что наименьший корень уравнения (8) должен быть больше, или равен, λ_2 . Этому условию отвечает значение ω (и определяемая ею жесткость ребра), которое дает уравнение (8), если заменить в нем λ выражением (9). Тогда это уравнение примет вид

$$(10) \quad \begin{vmatrix} (1^2 - 2^2)(1^2 - \alpha^2) + 2\omega, & -2\omega, & 2\omega, & \dots \\ -2\omega, & (3^2 - 2^2)(3^2 - \alpha^2) + 2\omega, & -2\omega, & \dots \\ 2\omega, & -2\omega, & (5^2 - 2^2)(5^2 - \alpha^2) + 2\omega, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

где через α обозначено $\beta^2//$.

Если задержать в этом определителе n пар столбцов и такое же число строк, отбросив пока остальные строки и столбцы, и прибавить к элементам первого столбца элементы второго, к элементам второго элементы третьего и т. д. до предпоследнего столбца включительно, к которому прибавляются элементы последнего, то из уравнения (10) получим

$$\begin{vmatrix} (1^2 - 2^2)(1^2 - \alpha^2) & 0 & \dots & -2\omega \\ (3^2 - 2^2)(3^2 - \alpha^2) & (3^2 - 2^2)(3^2 - \alpha^2) & \dots & 2\omega \\ 0 & (5^2 - 2^2)(5^2 - \alpha^2) & \dots & -2\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [(2n+1)^2 - 2^2][(2n+1)^2 - \alpha^2] + 2\omega \end{vmatrix} = 0,$$

или, развертывая определитель по элементам последней колонны:

$$2\omega \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{1}{[(2s-1)^2 - 2^2][(2s-1)^2 - \alpha^2]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{[(2s+1)^2 - 2^2][(2s+1)^2 - \alpha^2]} \right\} + 1 = 0,$$

где $s = 1, 3, 5 \dots$. Первое слагаемое в этой сумме отрицательно, а все остальные положительны; увеличивая n до ∞ будем иметь

$$(11) \quad 2\omega(1-R) = \left(\frac{1}{(2^2-1^2)(1^2-\alpha^2)} - \frac{1}{(3^2-2^2)(3^2-\alpha^2)} \right)^{-1} = \\ = \frac{15(9-10\alpha^2+\alpha^4)}{2(21-\alpha^2)},$$

где R обозначает остаточный член

$$R = \sum_{s=3}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(2s-1)^2 - 2^2][(2s-1)^2 - \alpha^2]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{[(2s+1)^2 - 2^2][(2s+1)^2 - \alpha^2]} \right\} : \frac{2(21-\alpha^2)}{15(9-10\alpha^2+\alpha^4)} < \\ < \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{[(2s-1)^2 - 2^2][(2s-1)^2 - \alpha^2]} : \frac{21-\alpha^2}{15(9-10\alpha^2+\alpha^4)}.$$

При $\alpha < 1^1$ это выражение меньше, чем

$$\frac{15 \cdot 9}{20 \cdot 16} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s^2} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{9} \right] \left[\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{12} \right]} < \\ < \frac{15 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 18}{20 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 11} \left(\frac{\pi^4}{96} - 1 \right) \approx 0,018.$$

Таким образом, с погрешностью, не превосходящей 2% , можно для определения размеров ребра принять

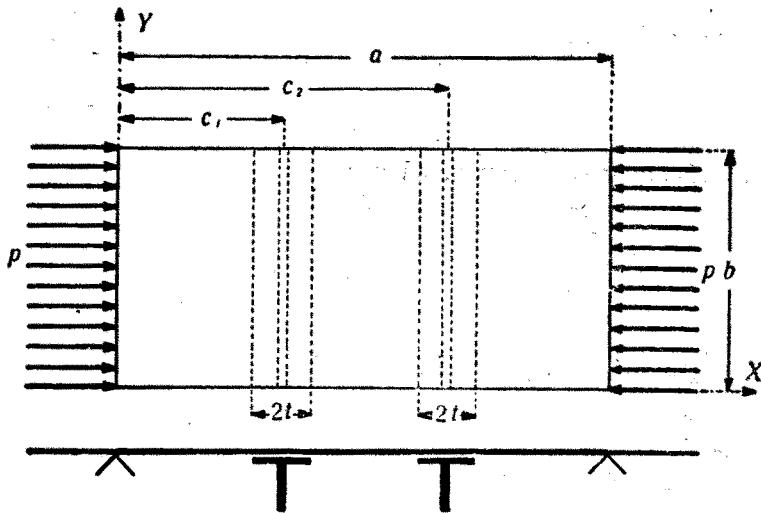
$$(12) \quad \omega = \frac{15(9-10\alpha^2+\alpha^4)}{4(21-\alpha^2)}.$$

¹ При $\alpha=1$, т. е. при $a/b=\sqrt{2}$ пластина изгибается в две полуволны и *без* поперечного ребра.

II. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ

В этом случае (черт. 3) подобно предыдущему получим

$$q = \frac{4}{\pi} q_a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \left(\sin \frac{k\pi c_1}{a} + \sin \frac{k\pi c_2}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}$$



черт. 8.

и вместо уравнения (6) будет

$$(12) \quad a_n (m^2 + \beta^2)^2 + 2\bar{\omega} \beta^8 \left\{ \sin \frac{m\pi c_1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi c_1}{a} + \right. \\ \left. + \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi c_2}{a} \right\} = \lambda m^2 a_m.$$

В случае равноотстоящих ребер, т. е. $c_1 = 1/3 a$ и $c_2 = 2/3 a$ это дает

$$(13) \quad a_m(m^2 + \beta^2)^2 + 2\bar{\omega}\beta^3 \left\{ \sin \frac{m\pi}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{3} + \right. \\ \left. + \sin \frac{2m\pi}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{2k\pi}{3} \right\} = \lambda m^2 a_m;$$

отсюда получим

$$\begin{aligned} a_1(1^2 + \beta^2)^2 + 3\bar{\omega}_3(a_1 - a_5 + a_7 - \dots) &= \lambda a_1, \\ a_2(2^2 + \beta^2)^2 + 3\bar{\omega}_3(a_2 - a_4 + a_8 - \dots) &= 2^2 \lambda a_2, \\ a_3(3^2 + \beta^2)^2 &= 3^2 \lambda a_3, \\ a_4(4^2 + \beta^2)^2 + 3\bar{\omega}_3(-a_2 + a_4 - a_8 + \dots) &= 4^2 \lambda a_4, \\ a_5(5^2 + \beta^2)^2 + 3\bar{\omega}_3(-a_1 + a_5 - a_7 + \dots) &= 5^2 \lambda a_5, \end{aligned}$$

Эти уравнения делятся на три группы: 1) группу независимых уравнений, содержащих коэффициенты с индексами кратными трем, из которых следует

$$(14) \quad \begin{aligned} (3^2 + \beta^2)^2 - 3^2 \lambda, \\ (6^2 + \beta^2)^2 - 6^2 \lambda, \\ (9^2 + \beta^2)^2 - 9^2 \lambda, \\ \dots \end{aligned}$$

затем 2) систему однородных линейных уравнений, содержащих коэффициенты с нечетными индексами, кроме кратных трем, из которой следует

$$(15) \quad \begin{vmatrix} (1^2 + \beta^2)^2 - \lambda + 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & 3\bar{\omega} & \dots \\ -3\bar{\omega} & (5^2 + \beta^2)^2 - 5^2 \lambda + 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & \dots \\ 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & (7^2 + \beta^2)^2 - 7^2 \lambda + 3\bar{\omega} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0;$$

и, наконец, 3) систему таких же уравнений, содержащих коэффициенты с четными индексами, кроме кратных трем, из которой следует

$$(16) \quad \begin{vmatrix} (2^2 + \beta^2)^2 - 2^2 \lambda + 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & 3\bar{\omega} & \dots \\ -3\bar{\omega} & (4^2 + \beta^2)^2 - 4^2 \lambda + 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & \dots \\ 3\bar{\omega} & -3\bar{\omega} & (8^2 + \beta^2)^2 - 8^2 \lambda + 3\bar{\omega} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Наименьший из корней уравнений (14)

$$(17) \quad \lambda_s = \frac{1}{3^2} (3^2 + \beta^2)^2$$

соответствует продольному изгибу в *три* полуволны вдоль оси x -ов. Если, подобно предыдущему, поставим условием, что критическая нагрузка, отвечающая изгибу в одну и две полуволны не должна быть меньше нагрузки соответствующей изгибу в три полуволны, то, введя вместо λ в уравнения (15) и (16) выражение (17) найдем значение ω , т. е. жесткость ребер, отвечающую этому условию. Тогда из уравнения (15) следует:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} (1^2 - 3^2)(1^2 - \alpha^2) + 3\omega & -3\omega & 3\omega & \cdots \\ -3\omega & (5^2 - 3^2)(5^2 - \alpha^2) + 3\omega & -3\omega & \cdots \\ 3\omega & -3\omega & (7^2 - 3^2)(7^2 - \alpha^2) + 3\omega & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

а из уравнения (16):

$$(19) \quad \begin{vmatrix} (2^2 - 3^2)(2^2 - \alpha^2) + 3\omega & -3\omega & 3\omega & \cdots \\ -3\omega & (4^2 - 3^2)(4^2 - \alpha^2) + 3\omega & -3\omega & \cdots \\ 3\omega & -3\omega & (8^2 - 3^2)(8^2 - \alpha^2) + 3\omega & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Второе из этих уравнений дает большее значение для ω , которое находим, решая это уравнение так же, как и уравнение (10) выше:

$$\begin{aligned} 3\omega \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(3s-1)^2 - 3^2][(3s-1)^2 - \alpha^2]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{[(3s+1)^2 - 3^2][(3s+1)^2 - \alpha^2]} \right\} + 1 = 0, \end{aligned}$$

откуда, подобно предыдущему, следует:

$$(20) \quad 3\omega (1 - R) = \left(\frac{1}{(3^2 - 2^2)} \frac{1}{(2^2 - \alpha^2)} - \frac{1}{(4^2 - 3^2)} \frac{1}{(4^2 - \alpha^2)} \right)^{-1} - \frac{35(64 - 20\alpha^2 + \alpha^4)}{2(46 - \alpha^2)},$$

где остаток R меньше

$$\sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{[(3s-1)^2 - 3^2][(3s-1)^2 - \alpha^2]} : \frac{46 - \alpha^2}{35(64 - 20\alpha^2 + \alpha^4)},$$

а это выражение при $\alpha < 2^1$ меньше 0,02. Значения ω при двух ребрах для различных отношений сторон пластины даны в таблице, где приведены и значения коэффициента γ , употребляемого С. П. Тимошенко.

β	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,46
ω	8,1	8,0	7,9	7,7	7,1	0
γ	37	15,6	7,9	4,5	2,6	0

III. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

Обозначим через c_1, c_2, \dots, c_{j-1} расстояние ребер от края пластины; тогда для ребра номер i подобно уравнению (2) найдем

$$2tq_i = - \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 EI \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_{mn} \sin \frac{m\pi c_i}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Поэтому, если назовем через $j-1$ общее число ребер, то

$$\begin{aligned} q = & \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{j-1} q_l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi c_l}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} - \\ & - 2\pi^3 \frac{EI}{tb^4} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mn} n^4 \sin \frac{m\pi c_l}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi c_l}{a} \sin \frac{k\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Заменяя, подобно предыдущему, $\sin k\pi t/a$ через $k\pi t/a$, получим

¹ При $\alpha=2$ пластина изогнется в три полуволны и без ребер.

$$q = -2\pi^4 \frac{EI}{ab^4} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} n^4 \sin \frac{k\pi c_l}{a} \sin \frac{m\pi c_l}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

тогда из дифференциального уравнения (4) и уравнения (1) следует

$$\begin{aligned} D \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 a_{mn} + 2\pi^4 \frac{EI}{ab^4} n^4 \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{m\pi c_l}{a} \sin \frac{k\pi c_l}{a} = \\ = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} p_{cr} a_{mn}. \end{aligned}$$

Вводя, подобно предыдущему, $n = 1$, найдем

$$(21) \quad a_m (m^2 + \beta^2)^2 + 2\omega \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{j-1} \sin \frac{m\pi c_l}{a} \sin \frac{k\pi c_l}{a} = \lambda m^2 a_m,$$

и при равноотстоящих ребрах, т. е. при $c_l = ai/j$ будем иметь

$$(22) \quad a_m (m^2 + \beta^2)^2 + 2\omega \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{j-1} \sin \left(\frac{mi\pi}{j} \right) \sin \left(\frac{ki\pi}{j} \right) = \lambda m^2 a_m$$

Коэффициент при 2ω в этом уравнении, очевидно, равен нулю при m или k кратном j . При других значениях m и k имеем

$$(23) \quad \sum_{l=1}^{j-1} \sin \left(\frac{mi\pi}{j} \right) \sin \left(\frac{ki\pi}{j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{j-1} \left\{ \cos \frac{(m-k)i\pi}{j} - \cos \frac{(m+k)i\pi}{j} \right\}.$$

Если $k - m = 2nj$, где n любое число, положительное или отрицательное, то пользуясь известным выражением для суммы тригонометрического полинома

$$\sum_{l=1}^n \cos li\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n+1/2)\varphi}{\sin 1/2\varphi},$$

найдем для выражения (23) значение

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{j-1} \cos 2ni\pi - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{j-1} \cos \frac{2ki\pi}{j} = \frac{1}{2}(j-1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{\sin(2j-1)k\pi/j}{\sin k\pi/j} = 1/2j.$$

Точно также для случая $m+k=2nj$ найдем

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \cos \frac{2ki\pi}{j} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \cos \frac{2ni\pi}{j} = -\frac{1}{2}j.$$

Для всех остальных значений k выражение (23) даст

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin(2j-1)(m-k)\pi/2j}{\sin(m-k)\pi/2j} - \frac{\sin(2j-1)(m+k)\pi/2j}{\sin(m+k)\pi/2j} \right\} = \\ & = \frac{1}{4} \frac{\cos\pi(m-k-m/j) - \cos\pi(m-k+k/j) - \cos\pi(m+k-m/j) + \cos\pi(m+k-k/j)}{\cos\pi k/j - \cos\pi m/j} = \\ & = \frac{1}{4} [(-1)^{m-k} - (-1)^{m+k}] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для $k=2nj-m$, если m не кратно j , коэффициент при ω в уравнении (22) равен $-j$; для $k=2nj+m$ он, если m не кратно j , равен j ; во всех остальных случаях он обращается в ноль. Кроме того, он равен нулю при значениях m кратных j .

Для этих последних значений получим из формулы (22) подобно уравнениям (7) и (14) группу уравнений:

$$(24) \quad \begin{aligned} a_j(j^2+\beta^2)^2 &= j^2 \lambda a_j, \\ a_{2j}(2^2j^2+\beta^2)^2 &= 2^2j^2 \lambda a_j, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Наименьший из корней этих уравнений

$$(25) \quad \lambda_j = \frac{1}{j^2} (j^2 + \beta^2)^2$$

Для остальных значений m получим из уравнения (22) однородные линейные уравнения:

$$a_1(1^2+\beta^2)^2 + j\omega(a_1 - a_{2j-1} + a_{2j+1} - \dots) = 1^2 \lambda a_1,$$

$$a_2(2^2+\beta^2)^2 + j\omega(a_2 - a_{2j-2} + a_{2j+2} - \dots) = 2^2 \lambda a_2,$$

$\dots \dots \dots$

$$a_{j-2}[(j-2)^2+\beta^2]^2 + j\omega(a_{j-2} - a_{j+2} + a_{3j-2} - \dots) = (j-2)^2 \lambda a_{j-2},$$

$$a_{j-1}[(j-1)^2+\beta^2]^2 + j\omega(a_{j-1} - a_{j+1} + a_{3j-1} - \dots) = (j-1)^2 \lambda a_{j-1},$$

$$a_{j+1}[(j+1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_{j-1} + a_{j+1} - a_{3j-1} - \dots) = (j+1)^2 \lambda a_{j+1},$$

$$a_{j+2}[(j+2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_{j-2} + a_{j+2} - a_{3j-2} - \dots) = (j+2)^2 \lambda a_{j+2},$$

$$a_{2j-2}[(2j-2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_2 + a_{2j-2} - a_{2j+2} - \dots) = (2j-2)^2 \lambda a_{2j-2},$$

$$a_{2j-1}[(2j-1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_1 + a_{2j-1} - a_{2j+1} - \dots) = (2j-1)^2 \lambda a_{2j-1},$$

$$a_{2j+1}[(2j+1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_1 - a_{2j-1} + a_{2j+1} - \dots) = (2j+1)^2 \lambda a_{2j+1},$$

$$a_{2j+2}[(2j+2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_2 - a_{2j-2} + a_{2j+2} - \dots) = (2j+2)^2 \lambda a_{2j+2},$$

$$a_{3j-2}[(3j-2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_{j-2} - a_{j+2} + a_{3j-2} - \dots) = (3j-2)^2 \lambda a_{3j-2},$$

$$a_{3j-1}[(3j-1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_{j-1} - a_{j+1} + a_{3j-1} - \dots) = (3j-1)^2 \lambda a_{3j-1},$$

Эти уравнения образуют $(j-1)$ систему:

$$a_1(1^2 + \beta^2)^2 + j\tilde{\omega}(a_1 - a_{2j-1} + a_{2j+1} - \dots) = 1^2 \lambda a_1,$$

$$a_{2j-1}[(2j-1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_1 + a_{2j-1} - a_{2j+1} + \dots) = (2j-1)^2 \lambda a_{2j-1},$$

$$a_{2j+1}[(2j+1)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_1 - a_{2j-1} + a_{2j+1} - \dots) = (2j+1)^2 \lambda a_{2j+1},$$

$$a_2(2^2 + \beta^2)^2 + j\tilde{\omega}(a_2 - a_{2j-2} + a_{2j+2} - \dots) = 2^2 \lambda a_2,$$

$$a_{2j-2}[(2j-2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_2 + a_{2j-2} - a_{2j+2} + \dots) = (2j-2)^2 \lambda a_{2j-2},$$

$$a_{2j+2}[(2j+2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_2 - a_{2j-2} + a_{2j+2} - \dots) = (2j+2)^2 \lambda a_{2j+2},$$

$$a_{j-2}[(j-2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(a_{j-2} - a_{j+2} + a_{3j-2} - \dots) = (j-2)^2 \lambda a_{j-2},$$

$$a_{j+2}[(j+2)^2 + \beta^2]^2 + j\tilde{\omega}(-a_{j-2} + a_{j+2} - a_{3j-2} + \dots) = (j+2)^2 \lambda a_{j+2},$$

$$a_{3j-2}[(3j-2)^2 + \beta^2]^2 + j\omega(a_{j-2} - a_{j+2} + a_{3j+2} - \dots) = (3j-2)^2 \lambda a_{3j-2},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{j-1}[(j-1)^2 + \beta^2]^2 + j\omega(a_{j-1} - a_{j+1} + a_{3j-1} - \dots) = (j-1)^2 \lambda a_{j-1},$$

$$a_{j+1}[(j+1)^2 + \beta^2]^2 + j\omega(-a_{j-1} + a_{j+1} - a_{3j-1} + \dots) = (j+1)^2 \lambda a_{j+1},$$

$$a_{3j-1}[(3j-1)^2 + \beta^2]^2 + j\omega(a_{j-1} - a_{j+1} + a_{3j-1} - \dots) = (3j-1)^2 \lambda a_{3j-1},$$

Отсюда следует $(j-1)$ уравнение:

$$\begin{vmatrix} (1^2 + \beta^2)^2 - 1^2 \lambda + j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(2j-1)^2 + \beta^2]^2 - (2j-1)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(2j+1)^2 + \beta^2]^2 - (2j+1)^2 \lambda + j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (2^2 + \beta^2)^2 - 2^2 \lambda - j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(2j-2)^2 + \beta^2]^2 - (2j-2)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(2j+2)^2 + \beta^2]^2 - (2j+2)^2 \lambda + j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} [(j-2)^2 + \beta^2]^2 - (j-2)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(j+2)^2 + \beta^2]^2 - (j+2)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(3j-2)^2 + \beta^2]^2 - (3j-2)^2 \lambda + j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} [(j-1)^2 + \beta^2]^2 - (j-1)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(j+1)^2 + \beta^2]^2 - (j+1)^2 \lambda + j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(3j-1)^2 + \beta^2]^2 - (3j-1)^2 \lambda + j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Подобно предыдущему мы поставим условием, что критическая нагрузка не должна быть меньше той, которая отвечает продольному изгибу в j полуволна, т. е. что ребра

должны выполнить свою роль, как если бы они были абсолютно жесткими. Это означает, что в только что написанных уравнениях надо заменить λ выражением (25). Тогда они примут вид:

$$(j-1) \begin{vmatrix} (1^2-j^2)(1^2-\alpha^2)+j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(2j-1)^2-j^2][(2j-1)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(2j+1)^2-j^2][(2j+1)^2-\alpha^2]+j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$(j-2) \begin{vmatrix} (2^2-j^2)(2^2-\alpha^2)+j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(2j-2)^2-j^2][(2j-2)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(2j+2)^2-j^2][(2j+2)^2-\alpha^2]+j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \begin{vmatrix} [(j-2)^2-j^2][(j-2)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(j+2)^2-j^2][(j+2)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(3j-2)^2-j^2][(3j-2)^2-\alpha^2]+j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1) \begin{vmatrix} [(j-1)^2-j^2][(j-1)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & +j\omega & \dots \\ -j\omega & [(j+1)^2-j^2][(j+1)^2-\alpha^2]+j\omega & -j\omega & \dots \\ +j\omega & -j\omega & [(3j-1)^2-j^2][(3j-1)^2-\alpha^2]+j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0.$$

Полученные уравнения перенумерованы *снизу вверх* от (1) до (j-1). Если мы применим к решению этих уравнений тот же прием, который был применен выше в случаях одного и двух ребер, т. е., задержав в уравнении № (r) пока n пар столбцов и n пар строк, прибавим к элементам каждого столбца элементы следующего, то это уравнение получит вид:

$$\begin{vmatrix} [(j-r)^2-j^2][(j-r)^2-\alpha^2], & 0 & -j\omega & \dots \\ [(j+r)^2-j^2][(j+r)^2-\alpha^2], & [(j+r)^2-j^2][(j+r)^2-\alpha^2], & +j\omega & \dots \\ 0 & [(3j-r)^2-j^2][(3j-r)^2-\alpha^2], & -j\omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & [(nj+r)^2-j^2][(nj+r)^2-\alpha^2]+j\omega & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, увеличивая n до ∞ найдем

$$j\omega \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(sj-r)^2 - j^2][(sj-r)^2 - \alpha^2]} + \frac{1}{[(sj+r)^2 - j^2][(sj+r)^2 - \alpha^2]} \right\} + 1 = 0,$$

где $s = 1, 3, 5 \dots$, или

(26)

$$\begin{aligned} j\omega(1-R) &= \left(\frac{1}{[j^2 - (j-r)^2][(j-r)^2 - \alpha^2]} - \frac{1}{[(j+r)^2 - j^2][(j+r)^2 - \alpha^2]} \right)^{-1} = \\ &= \frac{(4j^2 - r^2)[(j^2 - r^2)^2 - 2(j^2 + r^2)\alpha^2 + \alpha^4]}{2(5j^2 + r^2 - \alpha^2)}. \end{aligned}$$

остаточный член

$$R < \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{[(sj-r)^2 - j^2][(sj-r)^2 - \alpha^2]} :$$

$$\frac{5j^2 + r^2 - \alpha^2}{(4j^2 - r^2)[(j^2 - r^2)^2 - 2(j^2 + r^2)\alpha^2 + \alpha^4]}.$$

Эта граница уменьшается при увеличении r и будет наибольшей при $r=1$, но при $\alpha < j-1$ и $j \geq 4$ она остается меньшей, чем 0,02.

Таким образом с достаточной для практических целей точностью можно положить $R=0$ в уравнении (26), т. е. ограничиться одной парой столбцов и одной парой строк в каждом определителе.¹ Тогда из этого уравнения видно, что наибольшее значение ω получится при $r=1$:

$$(27) \quad j\omega = \frac{(4j^2 - 1)[(j^2 - 1)^2 - 2(j^2 + 1)\alpha^2 + \alpha^4]}{2(5j^2 + 1 - \alpha^2)},$$

при чем $j \geq 4$, обычно, членами содержащими α^2 и α^4 можно пренебречь и пользоваться формулой

¹ Однако, было бы ошибочно пренебречь вторым столбцом и второй строкой, так как отношение абсолютных значений отброшенного члена к оставшемуся в том случае при $r=1$ равно

$$\frac{2j-1}{2j+1} \frac{[(j-1)^2 - \alpha^2]}{[(j+1)^2 + \alpha^2]}.$$

При малых значениях α оно близко к

$$\frac{2j-1}{2j+1} \frac{(j-1)^2}{(j+1)}.$$

Так как отброшенный и оставленный члены разных знаков, то даже и при небольших значениях j это ведет к весьма ошибочным заключениям.

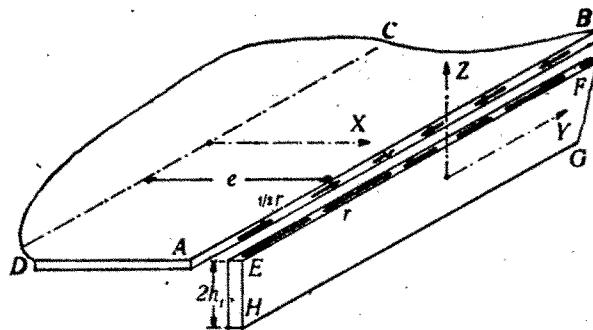
$$(28) \quad \tilde{\omega} = \frac{(4j^2 - 1)(j^2 - 1)^2}{2j(5j^2 + 1)} \approx (0,4j^2 - 1)j,$$

определяя таким путем необходимый момент инерции сечения ребра:

$$(29) \quad I = \tilde{\omega} \frac{Db}{E\beta^3}.$$

IV. О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ РЕБРА

Остается рассмотреть вопрос о том, в какой мере жесткость ребра увеличивается от присоединения к нему части



черт. 4.

пластины. Предположим, что сечение ребра весьма узкий прямоугольник (черт. 4), находящийся в условиях плоской задачи. При продольном изгибе пластины поперечное ребро, как мы видели, приобретает форму полуволны

$$\zeta = \zeta_0 \cos \frac{\pi y}{2b},$$

где ζ_0 обозначает стрелку прогиба на средине длины ребра. В точках кромки ребра, прилегающей к поясу, появится дилатация

$$(30) \quad h_1 \frac{d^2\gamma}{dy^2} = - h_1 \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \zeta_0 \cos \frac{\pi y}{2b},$$

где h_1 обозначает высоту ребра.

Влияние каждой из пластин, присоединенных с обеих сторон к верхней кромке ребра, на это ребро скажется в виде касательных давлений r , приложенных в точках этой кромки и распределенных по пока неизвестному закону. Такими же давлениями, но обратного направления, представится воздействие ребра на пластины. Каждая из рассматриваемых пластин находится в условиях плоской задачи.

Функции напряжений, для ребра φ_1 и для половины пояса φ_2 , должны быть бигармоническими и должны удовлетворять на кромках AD и BC , EH и FG условиям для свободно опертой балки, а на остальных кромках нижеследующим условиям. Для ребра: на нижней кромке GH отсутствует нормальное и касательное давление, т. е. $\partial^2\varphi_1/\partial x^2=0$ и $\partial^2\varphi_1/\partial x \partial y=0$; на кромке EF отсутствует нормальное давление, касательное же давление равно r , т. е. $\partial^2\varphi_1/\partial x^2=0$, $\partial^2\varphi_1/\partial x \partial y=r$. Для половины пояса: на кромках AB и CD отсутствуют перемещения точек нормального к тем кромкам, на линии CD отсутствуют скальвающие напряжения (из соображения симметрии), а на линии AB касательное давление равно $-1/2r$. Эти четыре условия для каждой пластины вполне определили бы функции напряжений, если бы было известно касательное давление r . Его мы определим, уравнивая дилатации в совпадающих точках кромок AB и EF .

Перейдем теперь к определению функции напряжений для ребра. Поместив начало координат на средине длины и высоты ребра, возьмем функцию напряжений в форме Рибьера, удовлетворяющей условиям на кромках FG и HE

$$\varphi_1 = f_1(z) \cos \pi y / 2b,$$

$$\text{где } f_1(z) = \left(A_1 + B_1 \frac{\pi z}{2b} \right) \operatorname{Ch} \frac{\pi z}{2b} + \left(C_1 + D_1 \frac{\pi z}{2b} \right) \operatorname{Sh} \frac{\pi z}{2b}.$$

Определяя произвольные постоянные A_1 , B_1 , C_1 и D_1 из условий на кромках EF и GH :

$$f_1(-h_1) = 0, \quad f'_1(-h_1) = 0, \quad f_1(h_1) = 0, \quad \frac{\pi}{2b} f'_1(h_1) \sin \frac{\pi x}{2b} = r,$$

приходим к заключению, что принятая форма для функции φ_1 отвечает действительности, если

$$r = \lambda \sin \frac{\pi x}{2b},$$

где λ произвольная постоянная, а

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \lambda h_1^2 \frac{\operatorname{Sh} u_1}{u_1(u_1 + 1/2 \operatorname{Sh} 2u_1)}, & B_1 &= -\frac{1}{2} \lambda h_1^2 \frac{\operatorname{Sh} u_1}{u_1^2(u_1 - 1/2 \operatorname{Sh} 2u_1)}, \\ C_1 &= \frac{1}{2} \lambda h_1^2 \frac{\operatorname{Ch} u_1}{u_1(u_1 - 1/2 \operatorname{Sh} 2u_1)}, & D &= \frac{1}{2} \lambda h_1^2 \frac{\operatorname{Ch} u_1}{u_1^2(u_1 + 1/2 \operatorname{Sh} 2u_1)}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$u_1 = \frac{\pi h_1}{2b}.$$

Дилатация в точках кромки EF будет

$$(31) \quad \frac{1}{2} \frac{\lambda}{E} \frac{2u_1 - 1/2 \operatorname{Sh} 4u_1}{u_1^2 - 1/4 \operatorname{Sh} 2u_1} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Примем для функции напряжений в точках пластины $ABCD$ ту же формулу

$$\varphi_2 = f_2(x) \cos \frac{\pi y}{2b},$$

где

$$f_2(x) = \left(A_2 + B_2 \frac{\pi x}{2b} \right) \operatorname{Ch} \frac{\pi x}{2b} + \left(C_2 + D_2 \frac{\pi x}{2b} \right) \operatorname{Sh} \frac{\pi x}{2b},$$

и поместим начало координат в средине кромки CD . Перемещение точки в направление оси x -ов будет равно

$$-\frac{1}{E} \left[(2+\mu) f'_2(x) - \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 f'''_2(x) \right] \cos \frac{\pi y}{2b},$$

и, пользуясь им, из условий на кромках AB и CD получим

$$(32) \quad \begin{cases} A_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \frac{\lambda}{\operatorname{Sh}^2 u_2} [(1+\mu) u_2 \operatorname{Ch} u_2 - (1-\mu) \operatorname{Sh} u_2], \\ B_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_2 = -\frac{1}{4} (1+\mu) \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \frac{\lambda}{\operatorname{Sh} u_2}, \end{cases}$$

где введено обозначение

$$u_2 = \frac{\pi e}{2b}.$$

Дилатация в точках кромки AB будет

$$(33) \quad \frac{1}{4} \frac{\lambda}{E} \cos \frac{\pi y}{2b} \frac{(1+\mu^2)u_2 - (1+\mu)(3-\mu)Sh u_2 Chu_2}{Sh^2 u_2}$$

Прибавив к выражению (31) дилатацию, данную выражением (30) и уравняв эту сумму выражению (33), можем выразить λ через ζ_0 , а также и все постоянные $A_1, B_1 \dots A_2 \dots D_2$, удовлетворив всем поставленным условиям.

Нормальное напряжение в точках среднего сечения ($y=0$) присоединенных поясков будет

$$(34) \quad (\sigma_x)_{y=0} = f_2''(x) = \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \left[A_2 \operatorname{Ch} \frac{\pi x}{2b} + D_2 \left(2 \operatorname{Ch} \frac{\pi x}{2b} + \frac{\pi x}{2b} \operatorname{Sh} \frac{\pi x}{2b} \right) \right],$$

где A_2 и D_2 определяются выражениями (32). Это напряжение достигает наибольшей величины в точках, прилегающих к ребру, т. е. при $x=e$:

$$(35) \quad \sigma_{max} = \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 [A_2 \operatorname{Ch} u_2 + D_2 (2 \operatorname{Ch} u_2 + u_2 \operatorname{Sh} u_2)];$$

оно постепенно уменьшается по мере удаления от этих точек и имеет наименьшую величину в точках расположенных на средине расстояния между ребрами, т. е. при $x=0$:

$$(36) \quad \sigma_{min} = \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 (A_2 + 2D_2).$$

Пользуясь выражением (32), найдем отношение,

$$(37) \quad \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{(3+\mu)Sh u_2 - (1+\mu)u_2 Chu_2}{\frac{1}{2}(3+\mu)Sh 2u_2 - (1-\mu)u_2},$$

которое не зависит от λ , а, следовательно, ни от стрелки прогиба ζ_0 ребра,

Интегрируя выражение (34) по y от 0 до e и разделив интеграл на выражение (35), найдем т. н. „приведенную“ ширину пояска e , т. е. ту ширину пластины, которую можно считать полностью участвующей в изгибе ребра с нормальным напряжением равным напряжению в крайних точках сечения ребра:

$$(38) \quad \frac{e_1}{b} = \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{Sh}^2 u_2}{1/2(3+\mu) \operatorname{Sh} 2u_2 - (1+\mu)u_2}.$$

При увеличении $u_2 = \pi e/2b$, т. е. при увеличении относительной ширины пояска, выражение (38) стремится к

$$\left(\frac{e_1}{b} \right)_{u_2=\infty} = \frac{4}{(3+\mu)\pi} \approx 0,39,$$

т. е., сколько бы мы ни увеличивали ширину пояска, активно участвовать в изгибе будет не больше 40% длины ребра.

V. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве примера взят грузовой пароход $350' \times 50' 6'' \times 31'$ из известного учебника Корабельной Архитектуры.¹ Участок стальной палубы между поперечной переборкой и ближайшим уширенным бимсом (который можно считать абсолютно жестким) имеет длину $28' = 8,53$ м, или по Правилам Британского Ллойда 1931/32 гг. составляет 12 шпангоутных промежутков по $28''$. С боков этот участок ограничен бортом и весьма жестким продольным бимсом и имеет ширину $12' 6'' = 3,81$ м. По Правилам Ллойда толщина стальной настилки $0,46'' = 1,17$ см.

Этим данным, т. е. $j = 12$ и $\beta = 8,53/3,81$ соответствует, согласно уравнению (25), $\lambda = 154$. При $E = 2 \cdot 10^8$ т/см² и $\mu = 0,3$, критическое напряжение по уравнениям (4') и (5') будет $p_{cr}/h = 0,53$ т/см².

Необходимая жесткость бимсов определяется уравнением (28): $\omega = 680$ и соответственно $I = 3300$ см⁴. По Правилам Ллойда профиль бимсов в данном случае углобульб $7\frac{1}{2}'' \times 3\frac{1}{2}'' \times 0,44''$ или около $190 \times 89 \times 11,2$ мм с моментом инерции площади сечения 1600 см⁴. Пользуясь уравнением (38), находим $u_2 = 0,293$ и, соответственно, $e_1/b = 0,176$, т. е. $2e_1 = 67$ см. Эта ширина всего на 4 см меньше расстояния между бимсами и при ширине полки углобульба в 8,9 см можно считать, что вся ширина листа участвует в изгибе бимса. Это повышает момент инерции площади сечения до 3600 см⁴, что все же трудно счесть достаточным.

¹ „The Design and Construction of Ships“ by Sir John Harvard Biles, vol. I, London 1923, plates XIII and XIV.

Критическое напряжение настилки в $0,53 \text{ t/cm}^2$ или 3,3 тн. на кв. дюйм во всяком случае недостаточно, ибо сжимающее напряжение в палубной настилке при изгибе на „стандартной“ волне превосходит 5,5 тн на кв. дюйм. Размеры, указанные Lloydом для настилки, приходится признать недостаточными и расчитывать лишь на то, что *the large vessels are very unlikely to experience waves of their own length*¹.

О ИЗВИЈАЊУ ПАЛУБЕ ГВОЗДЕНИХ БРОДОВА

Од

Ј. ХЛИТЧИЈЕВА

Нека су: a дужина правоугаоне плоче, b њена ширина, t дебљина, $(j-1)$ целокупан број попречних укрућења, c_i отстојање укрућења ред. бр. i од краја плоче, E и μ Јунгов модул и Поасонов кофицијент, I момент инерције површине пресека укрућења, p_{cr} једнолико подељени по ширини плоче притисак паралелан њеној дужини који изазива извијање, $\beta = a/b$, ω и λ дати једн. (4') и (5'), а $m = 1, 2, 3\dots$

1915 г. С. Тимошенко је поставио образац (21), који претставља бесконачни број хомогених линеарних једначина за кофицијенте a_m који, у случају извијања, не могу сви бити једнаки нули. Изједначујући са нулом детерминанту тих једначина добива се бесконачни број решења за λ , која одговарају извијању плоче у 1, 2, ... полуталаса; најмање од њих је меродавно са техничког гледишта. Образац (21) изведен методом потенцијалне енергије сматрао се као приближен; писац га изводи из упоређења деформација плоче и укрућења и тиме утврђује да је он тачан, уколико је, уопште, тачна техничка теорија савијања.

С. Тимошенко је применио образац (21) на случајеве $j=2$ и $j=4$ и израчунao најмање величине λ за низ вредности ω , док није пронашао за сваки од та два случаја ону вредност ω при којој најмања вредност λ одговара извијању

¹ Biles, I. c.

у j полуталаса, када се од укрућења постиже највећи ефект. Ради решења истог проблема за већи број укрућења, обичан код бродских конструкција, писац трансформише образац (21) и добива: а) групу независних једначина (24) за извиђање у бројеве полуталаса дељиве са j , од којих прва даје најмању вредност (25) за λ ; и б) $(j-1)$ бесконачних једначина за извиђање у бројеве полуталаса од 1 до $(j-1)$ од којих последња даје најмању вредност за λ . Поставивши услов да она не сме бити мања од израза (25) писац изводи једн. (27), која са грешком до 2% даје вредност $\bar{\omega}$ потребну за постизавање највећег ефекта од укрућења.

У т. 4 писац утврђује ширину e_1 оног дела плоче, који долази у обзор при израчунавању I. У т. 5 примењена су горња разлагања на палубу типичног брода и показано је да димензије прописане од стране Британског Лојда за палубу нису довољне, јер је њена сила извиђања за 35% мања од притиска који се може јавити при љуљању брода на таласима.
