AIRES ET VOLUMES VÉLOCIDIQUES ET HODOGRAPHIQUES DANS UN MOUVEMENT DU FLUIDE

Par

ANTON BILIMOVITCH

Dans une note [1] D. Pompeiu a analysé la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

des projections (u, v) de la vitesse d'un point (x, y) dans un mouvement plan du fluide, en se proposant d'en donner la forme intrinsèque, indépendante des coordonnées choisies. Il trouve pour cette forme le théorème exprimé par l'équation

$$A_V=A_C+A_H, \tag{2}$$

A_C étant l'aire limitée par une courbe fermée dans un fluide; A_V – l'aire limitée par le lieu géométrique des extrémités des vitesses dont les origines se trouvent sur la courbe C; A_H – l'aire limitée par les extrémités de ces vitesses avec l'origine au même point de l'espace. Tous ces éléments géométriques se rapportent au même instant. Nous appellerons A_V – aire vélocidique, A_H – aire hodographique de l'aire A_C donnée dans un mouvement plan du fluide.

La condition (1) doit être considérée comme une condition différentielle, tandisque (2) comme une condition intégrale.

Avant tout il faut faire remarquer que la théorie du champ vectoriel fournit la forme intrinsèque bien connue de la condition différentielle (1). On sait que le premier terme de la condition

(1) n'est autre chose que la divergence du vecteur-vitesse. Par conséquent cette condition peut s'écrire

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

où $\vec{V}$ est la vitesse du point du fluide. La notion de divergence étant un élément intrinsèque, il en résulte que la condition (1) l'est aussi. Les raisons qui confirment la nature intrinsèque de divergence sont les suivantes.

1. La divergence du vecteur $\vec{V}$ peut être définie par la formule intrinsèque

$$\text{div}\,\vec{V} = \lim_{S \to 0} \frac{\int_L (\vec{V}, \vec{dn})}{\iint_S dS},$$

où $\vec{dn}$ est le vecteur ayant la direction de la normale au contour L de l'aire S et de grandeur de celle d'un élément de longueur de ce contour, et dS – l'élément de l'aire S.

2. La divergence est le premier scalaire invariant de l'affineur (du tenseur au sens généralisé) qui caractérise la variation du vecteur $\vec{V}$ dans les différentes directions du plan.

Il va de soi que la condition différentielle

$$\text{div}\,\vec{V} = 0 \tag{4}$$

doit entraîner la condition intégrale

$$A_V = A_C + A_H, \tag{5}$$

citée par D. Pompeiu.

La condition (5) peut être déduite de (4) par la voie vectorielle en se servant du procédé élémentaire suivant.

Les trois aires A_V, A_C, et A_H peuvent être déterminées par les relations

$$2\,A_V = \int_V (\vec{r} + \vec{V}, \vec{dn}_V), \tag{6}$$

$$2\,A_C = \int_C (\vec{r}, \vec{dn}_C), \tag{7}$$

$$2\,A_H = \int_H (\vec{V}, \vec{dn}_H), \tag{8}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur du point du contour de l'aire C, $\vec{dn}_V$, $\vec{dn}_C$, $\vec{dn}_H$ les vecteurs perpendiculaires aux contours correspondants aux valeurs des éléments de ce contour.

En prenant sur le contour C (Fig. 1) en plus du point M un point infiniment voisin M', puis en construisant le triangle NN_1N' dont les sommets sont les extrémités de la vitesse $\vec{V}$ avec l'origine au point M, de la vitesse $\vec{V}$ avec l'origine au point M' et de la vitesse $\vec{V}'$ du point M' avec l'origine au point M' – les côtés $NN_1 = MM'$, N_1N' et NN' de ce triangle donnent alors les éléments: du contour C, de l'hodographe de vitesse des points du contour et de la vélocide de ces points.

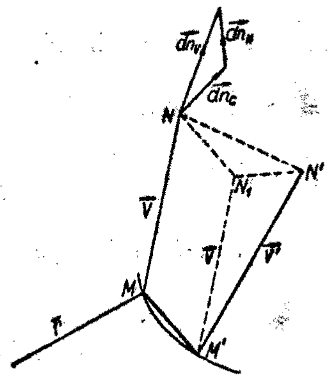

Fig. 1

En construisant maintenant les vecteurs $\vec{dn}_V$, $\vec{dn}_C$, et $\vec{dn}_H$, ils formeront un triangle semblable au triangle NN_1N' tel que l'on aura

$$\vec{dn}_V = \vec{dn}_C + \vec{dn}_H.$$

En portant la valeur du vecteur $\vec{dn}_V$ ainsi obtenue dans (6), on pourra écrire

$$\begin{aligned} 2A_V &= \int_V (\vec{r}+\vec{V}, \vec{dn}_V) = \int_V (\vec{r}+\vec{V}, \vec{dn}_C + \vec{dn}_H) = \\ (9) \qquad &= \int_C (\vec{r}, \vec{dn}_C) + \int_H (\vec{V}, \vec{dn}_H) + \int_H (\vec{r}, \vec{dn}_H) + \int_C (\vec{V}, \vec{dn}_C) \\ &= 2A_C + 2A_H + \int_H (\vec{r}, \vec{dn}_H) + \int_C (\vec{V}, \vec{dn}_C). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que les deux dernières intégrales sont nulles.

Pour la dernière des deux ceci résulte du raisonnement suivant.

En appliquant le théorème de Gauss au contour C, on aura pour les points pour lesquels nous construisons le vecteur $\vec{V}$

$$\int_C (\vec{V}, \vec{dn_C}) = \iint_C div\,\vec{V}.dS,$$

où S est l'aire limitée par le contour C et dS son élément

Mais, comme div $\vec{V} = 0$, on a

$$\int_C (\vec{V}, \vec{dn_C}) = 0. \tag{10}$$

Quant à la première intégrale

$$\int_H (\vec{r}, \vec{dn_H}),$$

qui est étendue au contour H, le théorème de Gauss donne

$$\int_H (\vec{r}, \vec{dn_H}) = \iint_\sigma div_{\vec{V}}\,\vec{r} \cdot d\sigma, \tag{11}$$

où on a désigné par σ l'aire limitée par le courbe H (l'hodographe) et par div$_{\vec{V}}\vec{r}$ la divergence du vecteur $\vec{r}$ considéré comme fonction du vecteur $\vec{V}$.

Montrons maintenant que de la condition

$$div\,\vec{V} = div_{\vec{r}}\,\vec{V} = 0$$

il s'ensuit la condition

$$div_{\vec{V}}\,\vec{r} = 0, \tag{12}$$

mais seulement dans les cas du mouvement plan du fluide.

Si

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}), \tag{13}$$

à cette équation vectorielle correspondent les équations scalaires

$$u = u(x,y),$$
(14)
$$v = v(x,y)$$

et la valeur de la divergence

$$div_{\vec{r}} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot$$

En résolvant maintenant l'équation (13) par rapport à $\vec{r}$, on pourra écrire

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{V});$$

à cette équation correspondent les équations scalaires

$$x = x(u,v),$$
$$y = y(u,v)$$

et la divergence

$$div_{\vec{V}} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot$$

Puis, en différentiant les équations (14), d'abord par rapport à u et ensuite par rapport à v, on aura les deux systèmes d'équations

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$1 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x}$$

et

(15)
$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

où

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De (15) il résulte que la condition

$$div_{\vec{r}}\vec{V} = 0$$

entraîne la condition (12).

Ceci étant, de (11) nous pourrons conclure que

$$\int_H (\vec{r}, \vec{dn}_H) = 0.$$

Ainsi donc, nous avons démontré que, en effet, dans l'équation (9) les deux dernières intégrales sont nulles, de sorte que de cette équation il résulte

$$A_V = A_C + A_H,$$

équation que l'on peut énoncer sous forme du théorème suivant:

Dans le cas du mouvement plan d'un liquide incompressible, l'aire vélocidique d'une aire déterminée du liquide est égale à la somme de cette aire du liquide et de l'aire hodographique du même domaine.

D. Pompeiu considère cette propriété du mouvement d'un liquide incompressible comme étant l'expression intrinsèque de la condition d'incompressibilité. De ce qui précède il devient apparent quel rôle jouent la divergence, ainsi que la condition qu'elle est nulle, dans le théorème énoncé ci-dessus.

Passons maintenant à l'étude du mouvement d'un fluide dans l'espace et examinons les relations qui existent entre le volume vélocidique, correspondant à un domaine déterminé du liquide, le volume du liquide de ce domaine et le volume hodographique.

Considérons dans le liquide un tetraèdre infinitésimal $MM_1 M_2M_3$ (Fig. 2) ayant pour vecteurs de position des sommets $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ et désignons ses arêtes, considérées comme vecteurs, par

$$\vec{MM_1} = \vec{m}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r},$$
$$\vec{MM_2} = \vec{m}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r},$$
$$\vec{MM_3} = \vec{m}_3 = \vec{r}_3 - \vec{r}.$$

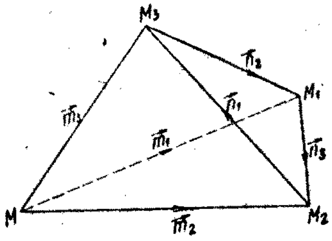

Fig. 2

En désignant, en outre, par ΔZ_C le volume de ce tetraèdre, on aura, d'après la formule bien connue,

$$(16) \qquad 6\Delta Z_C = (\vec{m}_1[\vec{m}_2\vec{m}_3]).$$

Construisons pour les points M, M_1, M_2, M_3 du liquide les vitesses et désignons les par $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$. Soit ΔZ_H le volume du tetraèdre hodographique, que l'on peut exprimer par la formule

$$(17) \qquad 6\Delta Z_H = (\vec{V}_1 - \vec{V}, [\vec{V}_2 - \vec{V}, \vec{V}_3 - \vec{V}]).$$

Enfin, désignons par ΔZ_V le volume du tetraèdre vélocidique, ce dernier s'exprimant par la formule

$$6\Delta Z_V = (\vec{V}_1 - \vec{V} + \vec{m}_1, [\vec{V}_2 - \vec{V} + \vec{m}_2, \vec{V}_3 - \vec{V} + \vec{m}_3]).$$

Cette relation peut être développé et mise sous la forme suivante

$$\begin{aligned}6\Delta Z_V = {} & (\vec{m}_1[\vec{m}_2\vec{m}_3]) + (\vec{V}_1 - \vec{V}, [\vec{V}_2 - \vec{V}, \vec{V}_3 - \vec{V}]) + \\ & + (\vec{m}_1[\vec{V}_2 - \vec{V}, \vec{V}_3 - \vec{V}]) + (\vec{m}_2[\vec{V}_3 - \vec{V}, \vec{V}_1 - \vec{V}]) + \\ & + (\vec{m}_3[\vec{V}_1 - \vec{V}, \vec{V}_2 - \vec{V}]) + (\vec{V}_1 - \vec{V}, [\vec{m}_2\vec{m}_3]) + \\ & + (\vec{V}_2 - \vec{V}, [\vec{m}_3\vec{m}_1]) + (\vec{V}_3 - \vec{V}, [\vec{m}_1\vec{m}_2]).\end{aligned}$$

Or, en tenant compte des relations (16) et (17), cette dernière équation peut s'écrire

$$(18) \qquad \Delta Z_V = \Delta Z_C + \Delta Z_H + U_1 + U_2.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}(19) \qquad 6U_1 = {} & (\vec{m}_1[\vec{V}_2 - \vec{V}, \vec{V}_3 - \vec{V}) + (\vec{m}_2[\vec{V}_3 - \vec{V}, \vec{V}_1 - \vec{V}]) + \\ & + (\vec{m}_3[\vec{V}_1 - \vec{V}, \vec{V}_2 - \vec{V}]),\end{aligned}$$

(20) $$6U_2 = (\vec{V}_1 - \vec{V}, [\vec{m}_2\vec{m}_3]) + (\vec{V}_2 - \vec{V}, [\vec{m}_3\vec{m}_1]) + (\vec{V}_3 - \vec{V}, [\vec{m}_1\vec{m}_2]).$$

Calculons d'abord l'expression U_2. De (20) on a

(21) $$6U_2 = (\vec{V}_1[\vec{m}_2\vec{m}_3]) + (\vec{V}_2[\vec{m}_3\vec{m}_1]) + (\vec{V}_3[\vec{m}_1\vec{m}_2]) - $$
$$- (\vec{V}, [\vec{m}_2\vec{m}_3] + [\vec{m}_3\vec{m}_1] + [\vec{m}_1\vec{m}_2]).$$

Si l'on prend maintenant le côté $M_1M_2M_3$ de notre tetraèdre et l'on désigne les vecteurs-arêtes comme suit:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n}_3, \quad \overrightarrow{M_2M_3} = \vec{n}_1, \quad \overrightarrow{M_3M_1} = \vec{n}_2,$$

il est alors facile de montrer que l'on a, par exemple,

(22) $$[\vec{m}_2\vec{m}_3] + [\vec{m}_3\vec{m}_1] + [\vec{m}_1\vec{m}_2] = -[\vec{n}_2\vec{n}_1].$$

De la position du vecteur il suit

$$\vec{n}_1 = \vec{m}_3 - \vec{m}_2, \quad \vec{n}_2 = \vec{m}_1 - \vec{m}_3, \quad \vec{n}_3 = \vec{m}_2 - \vec{m}_1.$$

En partant de ces équations nous transformerons notre somme de la façon suivante:

$$[\vec{m}_2\vec{m}_3] + [\vec{m}_3\vec{m}_1] + [\vec{m}_1\vec{m}_2] = [\vec{m}_2\vec{m}_3] + [\vec{m}_3 - \vec{m}_2, \vec{m}_1] =$$
$$= [\vec{m}_3 - \vec{n}_1, \vec{m}_3] + [\vec{n}_1\vec{m}_1] =$$
$$= -[\vec{n}_1\vec{m}_3] + [\vec{n}_1\vec{m}_1] =$$
$$= [\vec{n}_1, \vec{m}_1 - \vec{m}_3] = [\vec{n}_1\vec{n}_2] = -[\vec{n}_2\vec{n}_1],$$

ce qui donne le résultat cherché (22).

En vertu de (22) et (21) on a

$$6U_2 = (\vec{V}[\vec{n}_2\vec{n}_1]) + (\vec{V}_1[\vec{m}_2\vec{m}_3]) + (\vec{V}_2[\vec{m}_3\vec{m}_1]) + (\vec{V}_3[\vec{m}_1\vec{m}_2]).$$

Chaque produit vectoriel au second membre de cette relation représentant le double de la surface orientée du côté de notre tetraèdre, leur somme donne le double écoulement du liquide par la surface totale du tetraèdre et, par conséquent, peut être égalé à la divergence du vecteur $\vec{V}$ mutipliée par le volume ΔZ_C du tetraèdre dans le liquide. Nous pouvons donc écrire

$$6U_2 = 2\, div_{\vec{r}}\, \vec{V}.\Delta Z_C.$$

Comme on a dans le cas du liquide incompressible

$$div_{\vec{r}}\, \vec{V} = 0,$$

on a l'équation

$$U_2 = 0, \tag{23}$$

valable pour tout domaine infiniment petit du liquide.

Par un raisonnement analogue au précédent, on peut montrer que l'on a

$$6U_1 = 2\, div_{\vec{V}}\, \vec{r}.\Delta Z_H, \tag{24}$$

car l'expression U_1 ne diffère de U_2 que par les rôles des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{V}$.

Déterminons maintenant la divergence

$$div_{\vec{V}}\, \vec{r}.$$

A cette effet nous nous servirons de la méthode analogue à celle appliquée dans le cas du mouvement plan.

A l'équation

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}) \tag{25}$$

correspondent les équations scalaires

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned} \tag{26}$$

et l'expression pour la divergence

$$div_{\vec{r}} V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{27}$$

A l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{V}),$$

qui doit être la conséquence de (25), correspond la divergence

$$div_{\vec{V}} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}. \tag{28}$$

Pour calculer la divergence (28), différentions le système (26) par rapport aux u, v, w, et des équations ainsi obtenues:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$1 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$1 = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}$$

déterminons $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$. On aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Pour la divergence (28) on trouve ainsi

$$(29) \qquad div_{\vec{V}}\, \vec{r} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Si l'on considère l'affineur

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix},$$

la divergence

$$div_{\vec{r}}\, \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ne représente autre chose que le premier invariant S_1 de cet affineur.

L'expression entre paranthèses dans l'équation (29) donne le second invariant S_2 du même affineur.

Par conséquent, le premier et le second invariants de affineur $\mathfrak{A}$ étant nuls, de (24) il résulte

$$(30) \qquad U_1 = 0,$$

puis de (18), en vertu de (23) et (30), on arrive à l'équation

$$\Delta Z_V = \Delta Z_C + \Delta Z_H$$

valable pour les volumes infiniment petits. En prenant maintenant la somme de ces éléments, on arrive à l'équation

$$Z_V = Z_C + Z_H \tag{31}$$

qu'on énonce sous forme du théorème suivant:

Si, dans le mouvement d'un liquide, les deux premiers invariants S_1 et S_2 de l' affineur définissant la disposition des vitesses, pour un domaine du liquide, sont égaux à zéro, le volume vélocidique, pour ce domaine, est égal à la somme des volumes du liquide et hodographique.

Le premier invariant S_1 est la divergence de la vitesse, et la condition

$$S_1 = div_{\vec{r}} \vec{V} = 0,$$

étant la condition d'incompressibilité du liquide, on voit qu'elle est insuffisante pour la validité de l'équation (31) dans les cas d'un mouvement spatial.

Pour en venir à la seconde condition $S_2 = 0$, analysons le sens géométrique du second invariant

$$S_2 = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En introduisant les notations connues

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \theta_1, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \theta_2, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \theta_3,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \omega_1, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \omega_2, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega_3$$

S_2 peut s'écrire de la manière suivante

$$S_2 = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

Cette expression peut-être mise sous une autre forme en introduisant les coefficients d'extensions principales E_1, E_2, E_3. Alors, comme nous le savons, on peut écrire

$$S_2 = E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2 + \omega^2,$$

où ω désigne l'intensité de la vitesse tourbillonnaire du liquide.

Par conséquent, les conditions auxquelles doit satisfaire le mouvement spatial du liquide pour le cas du théorème énoncé, deviennent

$$S_1 = E_1 + E_2 + E_3 = 0,$$

$$S_2 = E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2 + \omega^2 = 0.$$

De ces conditions il ressort qu'entre les grandeurs E_1, E_2, E_3, ω deux en tout peuvent être indépendantes. Prenons comme paramètres indépendants ω et la somme, par ex.,

$$E_1 + E_2 = \sigma = -E_3 .$$

Des équations précedentes il résulte alors

$$E_1 = \frac{1}{2}\sigma + \sqrt{\omega^2 - \frac{3}{4}\sigma^2},$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\sigma - \sqrt{\omega^2 - \frac{3}{4}\sigma^2},$$

$$E_3 = -\sigma .$$

Ce résultat montre que le mouvement, dans le cas général, doit être d'un caractère tourbillonnaire avec une vitesse tourbillonnaire satisfaisant la condition

$$\omega^2 \geqq \frac{3}{4}\sigma^2 .$$

Notons que ω^2 ne peut pas être nul, car alors σ^2 le serait aussi, c'est-à-dire on aurait aussi $E_3^2 = 0$. Or de

$$E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2 = 0$$

et (32) il s'ensuit que aussi

$$E_1 = E_2 = 0 .$$

Ainsi donc le mouvement ne peut être irrotationnel qu'à condition qu'aucune particule du liquide ne change de forme et que toutes aient la même vitesse. Dans tous les autres cas le mouvement est obligatoirement d'un caractère tourbillonnaire.

Faisons encore une dernière remarque. Pour un liquide incompressible, tel que $S_1 = 0$, de (18) on a

$$U_1 = \Delta Z_V - \Delta Z_C - \Delta Z_H .$$

Mais comme de (24)

$$3U_1 = div_{\vec{V}} \vec{r} . \Delta Z_H$$

et d'après (29)

$$div_{\vec{V}} \vec{r} = \frac{1}{S_3} S_2 ,$$

où $S_3 = D$ le déterminant et le troisième invariant de l'affineur $\mathfrak{A}$, on peut finalement écrire le second invariant comme suit

$$S_2 = 3 S_3 \lim_{\Delta Z_C \to 0} \frac{\Delta Z_V - \Delta Z_C - \Delta Z_H}{\Delta Z_H} .$$

Cette expression du second invariant de l'affineur du changement de vitesse du liquide a un caractère intrinsèque. Il peut être soumis à d'autres modifications aussi.

Communiqué le 9-XII-1943

ВЕЛОЦИДНЕ И ХОДОГРАФСКЕ ПОВРШИНЕ ЗА КРЕТАЊЕ ТЕЧНОСТИ

Од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

У једној ноти [1] Д. Помпеју испитује услов

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

за пројекције (u, v) брзине тачке (x, y) у случају равног кретања течности и ставља себи као задатак да дâ природну форму тог услова, форму независну од изабраних координата.

Ову форму он проналази у облику теореме

$$A_V = A_C + A_H, \tag{2}$$

где су: A_C – површина омеђена затвореном кривом линијом C у течности, A_V – површина омеђена геометриским местом крајева брзина, кад се почеци тих брзина налазе на кривој

C (велоцидна површина), A_H – површина омеђена крајевима тих истих брзина, кад се почеци тих брзина налазе у истој тачци простора (ходографска површина).

Услов (1) треба сматрати као услов диференцијални, а услов (2) као интегрални.

Пре свега треба приметити да се услов (1) може написати овако

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

где је $\vec{V}$ брзина тачке течности. Како је појам дивергенције појам природни, тиме се утврђује и природност услова (1).

Писац овог чланка показује да из природног диференцијалног услова (3) следује услов (2).

У другом делу чланка писац проучава аналоган проблем за случај тродимензионалног кретања течности. Уводе се: Z_C – запремина течности, Z_V – велоцидна запремина и Z_H – ходографска запремина.

За формулисање резултата уводе се афинор $\mathfrak{A}$ распоређивања брзина

$$\mathfrak{A}\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{matrix}\right\}$$

и две његове инваријанте

$$S_1 = \mathrm{div}_{\vec{r}}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = E_1 + E_2 + E_3,$$

$$S_2 = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= E_2 E_3 + E_3 E_1 + E_1 E_2 + \omega^2,$$

где су E_1, E_2, E_3, главне деформације и ω интензитет вртложне брзине.

Резултат до кога је дошао гласи:

Ако су у кретању течности две прве инваријанте S_1 и S_2 афинора, који одређује распоред брзина, за одређену област течности, једнаке нули, за ту област велоцидна запремина једнака је збиру запремине течности и ходографске запремине, тј.

$$Z_V = Z_C + Z_H.$$

У вези са проучавањем наведених запремина писац наводи и ново природно тумачење друге инваријанте у облику

$$S_2 = 3\, S_3 \lim_{\Delta Z_C \to 0} \frac{\Delta Z_V - \Delta Z_C - \Delta Z_H}{\Delta Z_H},$$

где је S_3 трећа инваријанта афинора, тј. његова детерминанта.

RÉFÉRENCES

D. Pompeiu — Sur la condition des vitesses dans un fluide incom pressible. Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquée-de l'École Polytechnique de Bucarest. I-ère année. No 1, p. 42.
