L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LE PROBLÈME DE SOUSLIN

Par

GEORGES KUREPA

En admettant la possibilité d'une bonne ordination du continu linéaire, c'est-à-dire que le nombre $2^{\aleph_0}$ soit un aleph, on aura en posant

$$2^{\aleph_0} = \aleph_{N(0)}\ , \ N(0) \geqslant 1, \tag{1}$$

l'égalité hypothétique $N(0)=1$ étant le contenu de l'hypothèse de Cantor. Un bon nombre de mathématiciens se sont occupés du problème du continu, c'est-à-dire de la détermination du nombre $N(0)$ et ont obtenu plusieurs propositions équivalentes à l'hypothèse $N(0)=1$[1].

Dans le présent travail nous engloberons l'étude du problème du continu dans l'étude d'une classe d'ensembles partiellement ordonnés ayant quelques rapports avec l'étude du problème de Souslin.

Bien que nous ne sachions pas établir une relation directe entre le problème du continu et le problème de Souslin, nous indiquerons, dans ce qui suit, tout au moins quelques analogies dans l'étude des deux problèmes dans les deux classes d'ensembles partiellement ordonnés, que nous allons définir et qui sont liés aux deux problèmes, respectivement[2])[3]).

[1]) Voir W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwów, 1934, IV+192, en particulier, ch. I. Voir aussi des notes de M. Kurt Gödel dans Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1938, 1939 dans lesquelles il aurait prouvé la consistance de l'hypothèse du continu au sein d'une axiomatique consistante de la théorie des ensembles.

En désignant, pour un ensemble partiellement ordonné E, par

(2) $$bE,$$

la borne supérieure des puissances des sous-ensembles bien ordonnés croissants et décroissants de E et des sous-ensembles de E composés de points deux à deux incomparables, nous avons fait voir l'existence des liens intimes entre, d'une part, le problème de Souslin et, d'autre part, les ensembles partiellement ordonnés E tels que

(3) $$bE \leqslant \aleph_0,$$

vérifiant les deux conditions que voici:

I. Tout sous-ensemble ordonné de l'ensemble est bien ordonné;

II. Quelque soit le point a de l'ensemble, le sous-ensemble des points de l'ensemble précédant le point a est ordonné.

C'est que la puissance d'un ensemble quelconque est $\leqslant \aleph_1$, le problème de Souslin lui-même étant équivalent à celui disant que la puissance d'un E quelconque vérifiant (3), I, II soit $\leqslant \aleph_0$[4].

Nous verrons plus loin que le problème du continu est intimément lié à l'étude des E vérifiant (3) et I (sans vérifier II), l'hypothèse de Cantor étant équivalente à celle que la puissance d'un E quelconque vérifiant (3), I soit $\leqslant \aleph_1$.

Pour montrer en quoi consiste notre réduction du problème du continu, avançons quelques définitions.

1. Un ensemble partiellement ordonné sera dit $\left\{\begin{array}{l}\text{partiellement}\\ \text{un tableau}\end{array}\right.$

---

[2]) Rappelons que le problème de Souslin demande si un ensemble ordonné continu tel que chaque famille de ses intervalles disjoints soit $\leqslant \aleph_0$ est semblable à un ensemble linéaire (*v. Fund. Math.* I, 1920 p. 223, problème 3 et la 2[de] edition, 1937, p. 248).

[3]) Dans Thèse, p. 133, (*Ensembles ordonnés et ramifiés*, Paris, 1935, et *Publ. Math. Univ. Belgrade*, IV, 1935), j'ai établi la proposition suivante: Si, quel que soit l'ensemble partiellement ordonné T de puissance $\geqslant \aleph_1$ et vérifiant les conditions I, II ci-après, la famille des ensembles extraits de T et dont chacun est, soit ordonné, soit composé de points deux à deux incomparables, est d'une puissance $> \aleph_1$, l'hypothèse de Cantor entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin.

[4]) Voir Thèse loc. cit.[3], pp. 106, 124, 132 (équivalence $P_2 \rightleftarrows P_5$).

bien ordonné / ramifié s'il vérifie $\begin{cases}\text{la condition I} \\ \text{les conditions I,II}\end{cases}$ ci-dessus.

Dans ce qui suit E désignera un ensemble partiellement bien ordonné quelconque.

1,1. Nombre γE Ensembles $R_\alpha E$, $(\alpha < \gamma E)$. Nous désignerons par

(4) $$R_0 E$$

l'ensemble des premiers points de E; manifestement, $R_0 E$ est bien déterminé et on aura $R_0 E = 0$ si $E = 0$; on voit que, E étant partiellement bien ordonné, tout point de $E - R_0 E$ est précédé d'au moins un point de $R_0 E$.

L'ensemble $R_0 E$ sera appelé la *rangée o* ou la *première rangée de E*. Pour tout ordinal $\alpha > 0$, nous poserons

(5) $$R_\alpha = R_0 (E - \sum_{\xi<\alpha} R_\xi E).$$

Nous désignerons par

(6) $$\gamma E$$

le premier ordinal ξ vérifiant $R_\xi E = 0$.

Ainsi se trouve parfaitement déterminée *la suite des rangées de E:*

(7) $$R_0 E,\ R_1 E,\ \cdots,\ R_\alpha E,\ \cdots,\ (\alpha<\gamma E).$$

1,2. Soit $\alpha<\gamma E$; l'ensemble $R_\alpha E$ ne contenant aucun couple de points distincts comparables, on aura, dans le cas où E vérifie (3), puissance $R_\alpha E \leqq \aleph_0$.

L'un des buts de cette note sera de prouver les propositions suivantes:

α_1. *Si E vérifie II et (3), la puissance de E est $\leqq \aleph_1$, l'égalité éventuelle étant équivalente à la réponse négative au problème de Souslin.*[5])

[5]) Pour démonstration, voir Thèse, loc. cit.[5], p. 105 (th. 1), pp. 106. 124. 132.

α_2. *Si* $\gamma E \geqslant \Omega$ *et si chacun des ensembles* $R_\alpha E$, $(\alpha<\gamma E)$ *est* **fini**, *l'ensemble E contient un sous-ensemble bien ordonné infini non dénombrable; par conséquent, si* $bE \leqq \aleph_0$ *et puiss.* $R_\alpha E \angle \aleph_0$, $(\alpha<\gamma E)$, *on aura* $\gamma E<\Omega$ *et donc E est au plus dénombrable (cf. th.* 1^{bis}).

α_3. *Si* $bE=\aleph_0$ *et puiss.* $R_\alpha E=\aleph_0, (\alpha \angle \gamma E)$, *tout ce qu'on peut dire de* γE, *c'est que* $\gamma E \angle \omega_{N(o)+1}$ *avec* $\aleph_{N(o)}=2^{\aleph_0}$, *l'hypothèse* $\gamma E \angle \omega_2$ *étant équivalente à l'hypothèse du continu (cf. th.* 4).

Par contre, si E vérifie II et si puiss. $R_\alpha E=\aleph_0, (\alpha \angle \omega_{\beta+1})$ avec $\beta>0$, il y a un indice $\xi<\gamma E$ tel que, quels que soient $a \varepsilon R_\eta E$, $\xi \leqslant \eta<\gamma E$, l'ensemble des points de E succédant à a est ordonné et de la puissance $\aleph_{\beta+1}$[6]).

L'énoncé de la proposition α_3 subsiste même dans le cas où l'on suppose que E vérifie quelques conditions supplémentaires, comme par exemple celle-ci: à tout point a de E on peut faire correspondre un nombre réel $f(a)$ de telle manière que, si a précède b dans E, le nombre $f(a)$ précède le nombre réel $f(b)$[7]). L'importance de la condition provient de ce que, dans le cas où un pareil E vérifie II et (3), E est au plus dénombrable et se comporte donc normalement par rapport au problème de Souslin (cf. prop α_1).

Ajoutons-y l'importante relation

$$\gamma E \leqq \beta E \cdot \Gamma E \quad \text{(cf. th. 5 ci-après).}$$

Notons que quelques-uns des résultats de l'article ont paru aux *Comptes rendus*, 205, Paris, 1937, pp. 1196—1198.

2,1. Quelques propriétés des ensembles $R_\alpha E$ $(\alpha<\gamma F)$ (cf. 7).

Lemme 1. Pour tout $\alpha<\beta<\gamma E$, les ensembles $R_\alpha E$, $R_\beta E$ sont disjoints.

Lemme 2. Pour tout $\alpha<\beta<\gamma E$, et pour tout $b \varepsilon R_\beta E$, il y a au moins un point $a \varepsilon R_\beta E$ précédant le point a; dans le cas où E vérifie II, le point a est unique.

[6]) Cf. Thèse, p. 78. (th. 4).

[7]) Cf. la définition des ensembles H au n^0 2,3 où l'on peut poser $f(a)=a$ $(a \varepsilon H)$.

L e m m e 3. Quel que soient l'indice $\beta < \gamma E$ et la suite croissante de nombres ordinaux $< \gamma E$

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\xi < \cdots, \qquad (\xi < \beta)$$

on aura, en posant $F = \sum_\xi R_{\alpha_\xi} E, \qquad (\xi < \beta)$

$$\gamma F = \beta, \quad R_\xi F = R_{\alpha_\xi} E, \qquad (\xi < \beta).$$

L e m m e 4. Si $\gamma E = \Omega$ et si pour tout $\alpha < \Omega$ il y a un point a_α de $R_\alpha E$ et un nombre ordinal β_α tel que $\alpha < \beta_\alpha < \Omega$ et que a_α précède chacun des points de $R_{\beta_\alpha} E$, alors E contient un ensemble bien ordonné infini non dénombrable.

Tout d'abord, si un point de E précède tout point de $R_\alpha E$ le même point précédera tout point de l'ensemble $\sum_\xi R_\xi E$, $(\alpha \leqq \xi < \gamma E)$. Sott $b_0 \varepsilon R_{\beta_0} E$; supposons que $0 < \alpha < \Omega$ et que $b_0, b_1, \ldots, b_\xi, \ldots, (\alpha < \xi)$ constitue un sous-ensemble bien ordonné de E; alors η désignant un ordinal tel que l'ensemble R, E soit précédé de l'ensemble des $b_0, \ldots, b_\xi, \ldots, (\xi < \alpha)$, soit b_α un point de $R_{\beta_\eta} E$.
Ceci étant, on voit immédiatement que la suite des points

$$b_0, b_1, \cdots, b_\alpha \cdots, \qquad (\alpha < \Omega)$$

constitue un sous-ensemble de E bien ordonné et non dénombrable.

2,2. L e m m e 5. *Les relations* $\gamma E = \Omega$, puiss $R_\alpha E < \aleph_0, (\alpha < \gamma E)$ *entraînent l'existence d'un sous-ensemble de E bien ordonné infini et non dénombrable.*

En vertu du lemme 4, nous pouvons nous restreindre au cas où il y a un $\mu < \Omega$ tel qu'aucun point de $\sum_\xi R_\xi E$, $(\mu \leqq \xi < \Omega)$ ne précède aucune rangée $R_\eta E$ de E; rien ne nous empêche de supposer $\mu = 0$. Ceci étant, on aura $2 \leqq$ puiss. $R_\alpha E < \aleph_0$ pour tout $\alpha < \Omega$. Considérons le cas où puiss. $R_\alpha E = 2$ pour tout $\alpha < \Omega$.

En vertu de l'hypothèse de tout-à-l'heure, tout point de E a une infinité non dénombrable de successeurs. En effet, si E contenait un point, a, n'ayant, dans E, que $\leqq \aleph_0$ successeurs, soient α, β deux ordinaux $< \Omega$ tels que $a \varepsilon R_\alpha E, \alpha < \beta$ et que a ne précède aucun point de $\sum_{\xi} R_{\xi}E$, $(\beta \leqq \xi < \Omega)$; en désignant par b le point de $R_{\alpha}E$ distinct de a, le point b précéderait la rangée $R_{\beta}E$, contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant, soit a un point de R_0E; posons $F = \sum_{\xi} R_{\alpha_\xi}E$, α_ξ parcourant tous les ordinaux $< \Omega$ tels que $R_{\alpha_\xi}E$ contienne un point comparable à a. D'après ce que nous venons de prouver puiss $F > \aleph_0$ et d'après le lemme 3, $\gamma F = \Omega$.

Ceci étant soient, pour tout $\alpha < \Omega$, x_α le point de $R_\alpha F$ comparable à a et y_α le point constituant l'ensemble $R_\alpha F - x_\alpha$. Si $\alpha < \beta < \Omega$, on aura $y_\alpha < y_\beta$. En effet, y_β étant précédé d'au moins un des points x_α, y_α, on ne peut pas avoir $x_\alpha < y_\beta$ puisque, en vertu de $a \leqq x_\alpha$, on aurait $a < y_\beta$, contrairement à la définition du point y_β. Bref, l'ensemble des points de F incomparables à a est ordonné (donc, aussi, bien ordonné) infini et non dénombrable. D'une façon générale, supposons que n soit un entier > 2 tel que le lemme 5 soit prouvé pour tout E vérifiant $\gamma E = \Omega$ et puiss. $R_\alpha E < n$; démontrons le lemme pour le cas où puiss. $R_\alpha E \leqq n$, $(\alpha < \Omega)$. Manifestement, nous pouvons supposer que puiss. $R_\alpha E = n$ pour tout $\alpha < \Omega$. Soit alors a un point de E tel que puiss. $[a] =$ [8]) puiss. E; l'existence de a étant immédiate, posons $G = \sum_{\alpha_\xi} R_{\alpha_\xi}E - [a]_E$[8]), α_ξ parcourant tous les indices $< \Omega$ tels que $R_{\alpha_\xi}E$ ait un point comparable à $a \cdot G$ est non dénombrable puisque $R_{\alpha_\xi}E - [a]_E \neq 0$, pour tout $\xi < \Omega$. De plus, $R_\xi G = R_{\alpha_\xi} E - [a]_E$; dès lors, puisque $[a]_E \cdot R_{\alpha_\xi} E \neq 0$, $(\xi < \Omega)$, et que, par hypothèse, puiss. $R_\alpha E = n$, $(\alpha < \Omega)$, on aura $0 <$ puiss. $R_\xi G < n$, $(\xi < \Omega)$, ce qui, d'après les suppositions, entraîne l'existence d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ ordonné et extrait de G et à fortiori de E.

Ainsi le lemme 5 est prouvé toutes les fois qu'il y a un entier n tel que $0 <$ puiss. $R_\alpha E \leqq n$, $(\alpha < \Omega)$. Dans le cas général

---

[8]) Nons désignerons par $[a]_E$ l'ensemble des points de E comparables à a.

où un tel n n'existe pas, bien que $0 < \text{puiss. } R_\alpha E < \aleph_0, (\alpha < \Omega)$, il est évident qu'il existe, d'une part, un entier $k > 0$, et, d'autre part, une suite d'ordinaux $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\xi < \cdots$, $(\alpha_\xi < \Omega_1 \; \xi < \Omega)$, tels que puiss. $R_{\alpha_\xi} = k$. Alors, l'ensemble $F = \sum_\xi R_{\alpha_\xi} E, \quad (\xi < \Omega)$, satisfaisant aux conditions dans lesquelles le lemme est prouvé, on en déduit la validité du lemme 5 dans tous les cas.

Théorème 1. *Pour tout ensemble partiellement bien ordonné* E, les relations $bE \leqq \aleph_0$ (cf (2)), puiss. $R_\alpha E < \aleph_0$, $(\alpha < \gamma E)$ entraînent $\gamma E < \Omega$ et à fortiori puiss. $E \leqq \aleph_0$. En effet, si l'on avait $\gamma E \geqq \Omega$, en considérant l'ensemble $G = \sum_\alpha R_\alpha E$, $(\alpha < \Omega)$, on aurait $\gamma G = \Omega$, $R_\alpha G = R_\alpha E$ et donc puiss. $R_\alpha G < \aleph_0$, $(\alpha < \Omega)$, ce qui, d'après le lemme 5, entraînerait l'existence d'un sous-ensemble bien ordonné de puissance $\aleph_1$ extrait de G et donc E, contrairement à l'hypothèse $bE \leqq \aleph_0$.

En combinant le lemme 3 et le théorème 1. nous avons le

Théorème 1.bis *Un ensemble partiellement ordonné tel que* $bE \leqq \aleph_0$ *ne contient que* $\leqq \aleph_0$ *rangées* $R_\alpha E$ *dont chacune est* **finie.**

2,3. Combien de rangées dénombrables peut avoir un E vérifiant $bE \leqq \aleph_0$? Un E, dont tout sous-ensemble composé de points deux à deux incomparables est au plus dénombrable et tel que $\gamma E = \omega_2$, contient-il nécessairement un sous-ensemble bien ordonné de puissance $\aleph_2$? Nous n'en savons rien!

Lemme 6. Quel que soit l'ordinal ψ de puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$, il y a un ensemble partiellement bien ordonné E tel que $\gamma E = \psi$, $bE \leqq \aleph_0$.

En effet, soit

$$H_0, H_1, \cdots, H_\xi, \cdots, \quad (\xi < \psi)$$

une suite de type ψ d'ensembles linéaires deux à deux disjoints, dont chacun est dénombrable et partout dense. En désignant par H l'ensemble $\sum_\xi E_\xi$, $(\xi < \psi)$, ordonnée partiellement par la relation ρ où, quels que soient les points a, b de H, la relation $a \rho b$ équivaut à $a < b, \alpha < \beta$, les ordinaux α, β vérifiant $a \varepsilon H_\alpha$, $b \varepsilon H_\beta$, on démontre les propositions que voici:

β_1. H n'est un ensemble partiellement bien ordonné par ρ et vérifie $bH = \aleph_0$.

β_2. Pour tout $\alpha<\psi, R_\alpha H=H_\alpha$; dès lors $\gamma H=\psi$.
De plus, quels que soient $a \varepsilon H$ et $\xi<\psi$, l'ensemble $R_\xi H$ contient un point comparable à a.
Le lemme 6 entraîne le

Théorème 2. *En admettant la possibilité d'une bonne ordination du continu linéaire, il y a un ensemble partiellement bien ordonné E vérifiant $bE=\aleph_0$, puiss. $E=2^{\aleph_0}$.*

3. Ensembles $R^\alpha E$ Nombres ordinaux $\Gamma E, \beta E$.

3,1. Pour un nombre ordinal α, nous désignerons par

(8) $$R^\alpha E$$

l'ensemble de tous le points a de E pour chacun desquels l'ensemble des prédécesseurs du point a contient un sous-ensemble ordonné maximal de type d'ordre α. Nous définirons

(9) $$\Gamma E$$

comme le premier indice α tel que $R^\alpha E=0$.
Ainsi sont bien définis le nombre ordinal ΓE et les ensembles

(10) $$R^0E,\ R^1E, \ldots, R^\alpha E, \ldots, \ (\alpha<\Gamma E).$$

Remarquons que les ensembles (10) ne sont pas nécessairement deux à deux disjoints; de même, $R^\alpha E$ peut contenir des couples de points distincts comparables. Par conséquent, la suite (10) peut différer de la suite (7) des $R_\alpha E$, $(\alpha<\gamma E)$.

Lemme 7. On a $\Gamma E \leq \gamma E$. Dans le cas d'un tableau ramifié (c'est-à-dire d'un E vérifiant II), on a $\gamma E=\Gamma E$, $R_\alpha E=R^\alpha E, (\alpha<\gamma E)$.

3,2. Opérateur F_E (F ordonné $\subseteq E$). F étant un ensemble ordonné quelconque de F, nous désignerons par

(11) $$F_E$$

la première rangée de E, ou la première rangée de l'ensemble des points de E dont chacun succède à F, selon que $F=0$ ou $F\neq 0$.
De proche en proche on démontre l'important

Lemme 8. *$R^0E=R_0E$; pour tout $0<\alpha<\Gamma E$, $R^\alpha E=\sum_F F_E$, F parcourant tous les ensembles ordonnés maxima de type d'ordre α extraits de E.*

En particulier, pour tout $\alpha+1<\Gamma E$, $R^{\alpha+1}E=\sum_a (a)_E, (a \varepsilon R^\alpha E)$ (a) *désignant l'ensemble ordonné composé du point* a.

Le lemme 8 entraîne le

Lemme 9. Quels que soient l'ordinal $\alpha<\Gamma E$ et le point $a \varepsilon R^\alpha E$, le point a est précédé d'un sous-ensemble ordonné de E ayant un point en commun avec chacun des ensembles $R^\xi E, (\xi<\alpha)$[9])

Corollaire 1. Si $\aleph_0 \leq bE <$ puiss. ΓE, le nombre bE est l'aleph qui précède immédiatement l'aleph puiss. ΓE.

Vu le lemme 8, les relations: puiss. $R^0 E \leqq bE \geqq$ borne sup puiss. α, $(\alpha<\Gamma E)$ et $E=\sum_\alpha R^\alpha E$, $(\alpha<\Gamma E)$ entraînent la relation

$$\text{puiss. } E \leqq \sum_\alpha (bE)^{\text{puiss}\alpha},\ (\alpha<\Gamma E)$$

et à fortiori le

Théorème 3. *Tout ensemble partiellement bien ordonné* E *vérifie puiss.* $E \leqq 2^{bE}$.[10])

Les théorèmes 2 et 3 entraînent le

Théorème 4. *Pour que* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il faut et il suffit que la puissance de tout ensemble partiellement bien ordonné* E *vérifiant* $bE \leqq \aleph_0$ *soit* $\leqq \aleph_1$.

3,3. Nombre ordinal βE. En posant, pour un sous-ensemble non vide X de E, $\beta(X,E)=$ borne α sup α, α parcourant tous les ordinaux vérifiant $XR_\alpha E \neq 0$, il est manifeste que, quel que soit le sous-ensemble ordonné $F \neq 0$ de E tel que $F_E \neq 0$ (cf. 11)., on aura $\beta(F_E,E)-\beta(F,E) \geqq 0$.

C'est du nombre ordinal

$$\beta E = \text{borne sup } \beta(F_E,E)-\beta(F,E), \tag{12}$$

F parcourant tous les sous-ensembles ordonnés non vides de E vérifiant $F_E \neq 0$, dont dépend essentiellement la relation entre les nombres γE et ΓE[11])

[9]) Dans le cas où E vérifie II, le sous-ensemble est uniquement déterminé par a.

[10]) La relation subsiste pour tout ensemble partiellement ordonné.

[11]) Il importe bien de trouver une relation entre les nombres γE, ΓE, au moins à cause de la proposition α_2 du n^0 1,2 et du corollaire 1 du n^0 3,2.

Passons à la démonstration du

Théorème 5. $\gamma E \leqq \beta E \cdot \Gamma E$ (bien entendu, $\Gamma E \leqq \gamma E$) (cf. (6) (9), (12).

Tout d'abord, $R^0 E = R_0 E$ (cf. (4), (8)); d'une manière générale, soit $1 < \alpha < \Gamma E$, et supposons que, pour tout $\zeta < \alpha$, on ait

(13) $$\sum_{\xi<\zeta} R^{\xi} E \subseteq \sum_{\eta} R_{\eta} E, (\eta < \beta E \cdot \zeta);$$

démontrons alors que

(13_α) $$\sum_{\xi \leq \alpha} R^{\xi} E \subseteq \sum_{\eta} R_{\eta} E, (\eta < \beta E \cdot \alpha).$$

Si α est de première espèce, la relation (13_α) est une conséquence immédiate de $(13_{\alpha-1})$ et du fait que $R^\alpha E = \sum_\alpha (a)_E$, $(a \in R^{\alpha-1} E)$ (cf. lemme 8). Dans le cas où α est de seconde espèce, la relation (13_α) résulte des relations (13_ζ) $(\zeta < \alpha)$ et de celle-ci:

$$\beta E \cdot \alpha = \operatorname*{borne\ sup}_{\zeta < \alpha} \beta E \cdot \zeta.$$

Ainsi la relation (13_α) subsiste pour tout $\alpha < \Gamma E$. On en déduit

$$\sum_{\xi < \Gamma E} R_{\xi} E^{\alpha} \subseteq \sum_{\eta} R_{\eta} E, \qquad (\eta < \beta E \cdot \Gamma E);$$

dès lors, vu
$$E = \sum_{\xi < \Gamma E} R_{\xi} E,$$

$$E \subseteq \sum R_{\eta} E, \qquad (\eta < \beta E \cdot \Gamma E)$$

ce qui, d'après la définition du nombre γE, entraîne le théorème 5.

Le théorème 5 entraîne le

Théorème 6. *Si* $\beta E \cdot \Gamma E = \Gamma E$, *alors* $\Gamma E = \gamma E$.

Or, on aura $\beta E \cdot \Gamma E = \Gamma E$ toutes les fois que $\beta E < \Gamma E$ et $\Gamma E = \omega_\alpha$. Ainsi, si l'on pouvait établir l'existence d'un E vérifiant

$$bE = \aleph_0, \ \gamma E = \omega_{N(o)}, \qquad \beta F < \Gamma E.$$

on aurait, en vertu de $\Gamma E \leqq \gamma E$,

$\beta E \leqq \omega_{N(o)}$, $\Gamma E \leqq {}_{N(o)}$ et, par conséquent,

$\beta E \cdot \Gamma E \leq \omega_{N(o)} - \gamma E$, ce qui, vu le théorème 5, entraîne
$\beta E \cdot \Gamma E = \omega_{N(o)}$ et dès lors $\Gamma E = \omega_{N(o)}$.

Bref, on aurait $\aleph_0 = bE <$ puiss $\Gamma E = \aleph_{N(o)}$ ce qui, en vertu du corrolaire 1 du n^0 3,2, voudrait dire que $N(0) = 0+1$ et dès lors $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Présenté en 1939.

ХИПОТЕЗА О КОНТИНУУМУ И СУСЛИНОВ ПРОБЛЕМ

Од

Ђ. КУРЕПЕ

У некојим ранијим радовима аутор је довео у везу познати Суслинов проблем[1]) с изучавањем т. зв. *добро разврстаних скупова* (tableaux ramifiés), тј. таквих парцијално добро уређених скупова[2]) T који имају својство, да је немогуће да пред којим елементом из T долазе два *неупоредива* елемента скупа T. Код тог изучавања изграђен је известан технички апарат (скупови $R_\alpha T$, бројеви γT, bT итд.), па је било интересантно да се погледа у којој се мери тај апарат може пренети на било које парцијално добро уређење множине E. То је у овом раду донекле учињено (§§ 1 и 2), па је корисно уочити разлику међу кореспондентним теоремима за скупове T и E. Тако на пр. из $bT = \aleph_0$ излази да T има потенцију $\leqslant \aleph_1$ и да је $\gamma T \leqslant \Omega$ (евентуална једнакост је еквивалентна с негативним одговором на Суслинов проблем); напротив, ако је $bE = \aleph_0$, онда E има потенцију $\leqslant 2^{\aleph_0}$, док се за положај броја γE не зна ништа.

Код скупова E дефинишу се $R^\alpha E$, ΓE, као и оператор F_E; тако, на пр. за уређен скуп, $F \leqslant E$ означује нам F_E скуп свих првих елемената међу оним елементима из E од којих сваки долази иза свих елемената скупа F; ако F нема последњег елемента, онда је заправо $F_E = \lim F$, јер је F_E у неку руку скуп свих најмањих мајораната множине F садржаних у E.

Кад хоће да се сазна како је распоређен скуп F_E, појављују се ординални број βE (гл. 12) па према теореми 5 имамо

$$\gamma E \leqslant \beta E . \Gamma E \text{ (иначе је } \gamma E \geqslant \Gamma E, \ \gamma T = \Gamma T).$$

---

[1]) Суслинов проблем пита да ли је уређен густ скуп S нужно сличан једном скупу реалних бројева, ако је S такав, да је свака фамилија његових интервала који су без заједничких тачака највише пребројива.

[2]) Парцијално уређен скуп је парцијално *добро* уређен, ако сваки његов уређени део има посве одређен *први* елемент.