SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALISÉE

Par

S. ALJANČIĆ.

1. Soit $a(x)$ une fonction à variation bornée dans (a, b), x_ν ses points de discontinuité et $\bar{a}(x)$ son noyau continu, c. à d.

$$a(x) = \bar{a}(x) + \sum_{x_\nu \leqq x} \{a(x_\nu + 0) - a(x_\nu - 0)\};$$

soit en outre $f(x)$ défini dans (a, b) y possédant les dérivées jusqu'au n-ième ordre.

En partant de la relation

$$\sum \{a(x_\nu + 0) - a(x_\nu - 0)\} f(x_\nu) + \int_a^b f(x)\, d\bar{a}(x) = \int_a^b f(x)\, d\{a(x) + C_0\},$$

où C_0 est une constante arbitraire, la somme étant prise sur tous les points de discontinuité x_ν de $a(x)$, et en intégrant par partie n fois de suite la seconde de ces intégrales, l'on en déduit la formule

$$(1) \qquad \sum \{a(x_\nu + 0) - a(x_\nu - 0)\} f(x_\nu) + \int_a^b f(x)\, d\bar{a}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \{a_k(b) f^{(k)}(b) - a_k(a) f^{(k)}(a)\} + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\, da_n(x),$$

$a_k(x)$ désignant la k-ième intégrale de $a(x) + C_0$, c. à d.

$$a_k(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{k} a(x)\, d^k(x) + P_k(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$P_k(x) = \sum_{\nu=0}^{a} C_{k-\nu} x^\nu / \nu!$$

étant un polynôme quelconque de degré k.

J. Karamata[1]) a indiqué que cette formule contient, suivant le choix des polynômes $P_k(x)$, d'une part la formule de Taylor et ses analogues, d'autre part la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

En effet, en choisissant les constantes d'intégration C_ν de manière que

$$a_k(b) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

l'on en déduit, en particulier, la formule de Taylor en partant de la fonction

$$a(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad a \leqslant x < b, \\ 0 & \quad » \quad\; x = b. \end{cases}$$

D'autre part, en choisissant les constantes C_ν de manière que l'on ait

$$a_k(b) = a_k(a), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

la formule (1) se réduit à

$$(2) \qquad \sum \{a(x_\nu + 0) - a(x_\nu - 0)\} f(x_\nu) + \int_a^b f(x)\, d\bar{a}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k(a) \{f^{(\alpha)}(b) - f^{(\alpha)}(a)\} + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\, da_n(x),$$

et représente une généralisation de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. Cette dernière formule s'obtient lorsqu'on y pose

$$a = 0, \qquad b = N \quad \text{(entier)}$$

et

$$a(x) = x - [x].$$

[1]) „L'intégrale de Stieltjes et ses applications" (en préparation).

Dans ce cas, en effet, (2) se réduit à

(3) $$\sum_{\nu=1}^{N} f(\nu) = \int_0^N f(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\{f(N)-f(0)\}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{b_{\nu+1}}{(\nu+1)!}\{f^{(\nu)}(N)-f^{(\nu)}(0)\}+R_n,$$

où

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^N f^{(n)}(x)\,b_n(x)\,dx,$$

b_ν désignant la suite de Bernouilli définie par

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu!}t^\nu,$$

c. à d.

$$b_0=1, \quad b_1=-1/2, \quad b_{2\nu+1}=0 \text{ et } b_{2\nu}=(-1)^{\nu-1}B_{2\nu},$$

$B_{2\nu}$ étant les nombres de Bernouilli, et $b_n(x)$ est le prolongement périodique pour tout x par rapport à l'intervalle (0,1) des polynômes de Bernouilli $B_n(x)$, c. à d.

$$b_n(k+x)=B_n(x) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad k=0,1,2,\ldots,$$

les polynômes $B_n(x)$ étant définis par

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)t^n.$$

2. Déjà Legendre[1]) a remarqué qu'en faisant, dans (3), $n\to\infty$ la série ainsi obtenue est en général une série divergente (asymptotique) vu que

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!}\sim 2(2\pi)^{-2n}, \quad n\to\infty.$$

[1]) Legendre, Exerc. de calc. intégral 1, Paris 1811.

Nous allons montrer ici que ce fait subsiste dans le cas général, c. à d. que la formule (2) lorsqu'on y fait $n \to \infty$, donne lieu généralement aux séries asymptotiques.

Plus précisément, nous allons montrer que les intégrales successives $a_n(x)$ d'une fonction quelconque $a(x)$, qui satisfont aux conditions

$$a_n(b) = a_n(a) \quad \text{pour tout} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et que nous appellerons pour abréger „la suite harmonique des intégrales successives" par rapport à l'intervalle (a, b), sont pour $n \to \infty$ du même ordre de grandeur que les nombres de Bernouilli divisés par les factorielles, c. à d. que

$$|a_n(x)| \sim A(2\pi)^{-n}, \quad n \to \infty.$$

Dans des cas exceptionnels seulement, l'on peut avoir

$$|a_n(x)| \sim Aq^n \quad \text{avec} \quad 0 < q < {}^1/_{2\pi},$$

ce qui d'ailleurs influe peu sur le caractère de la convergence des séries (2).

Le cas où l'on aurait

$$a_n(x) = o(q^n), \qquad n \to \infty,$$

quelque petit que soit q, ne peut se présenter à moins que la fonction $a(x)$ ne se réduise identiquement à zéro.

Ces résultats s'obtiennent immédiatement en exprimant explicitement la suite des intégrales harmoniques au moyen des polynômes de Bernouilli. En effet, en supposant, sans nuire à la généralité, que

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 1,$$

on a

$$a_n(x) = \int_0^1 \{B_n(x) - B_n(x-t)\}\, a(t)\, dt - \frac{1}{(n-1)!}\int_x^1 (x-t)^{n-1} a(t)\, dt,$$

ou bien

$$a_n(x) = \int_0^1 \{b_n(x) - b_n(x-t)\}\, a(t)\, dt, \tag{4}$$

où $B_n(x)$ désignent les polynômes de Bernouilli et $b_n(x)$ leur prolongement périodique relatif à l'intervalle $(0,1)$.

Ces formules se vérifient facilement en tenant compte des propriétés suivantes des polynômes de Bernouilli:

$$B_n'(x) = B_{n-1}(x),$$

et

$$B_n(x+1) = B_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$b_n(x)$ étant les prolongements périodiques des $B_n(x)$, d'après (4) l'on vérifie immédiatement que

$$a_n'(x) = a_{n-1}(x)$$

et que

$$a_n(1) = a_n(0),$$

c. à d. que $a_n(x)$ forme bien la suite des intégrales harmoniques de la fonction $a(x)$ par rapport à l'intervalle $(0, 1)$.

En développant les fonctions $b_n(x)$ en série de Fourier, à savoir

$$b_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2n}},$$

et

$$b_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2n+1}},$$

l'on en déduit, d'après (4), que

$$a_n(x) = (-1)^{[n/2]+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{c_\nu}{\nu^n} \cos 2\nu\pi x + \frac{d_\nu}{\nu^n} \sin 2\nu\pi x \right\},$$

où l'on a posé, pour $n = 2m$,

$$c_\nu = \int_0^1 a(t)(1 - \cos 2\nu\pi t)\, dt \quad \text{et} \quad d_\nu = -\int_0^1 a(t) \sin 2\nu\pi t\, dt,$$

et pour $n = 2m+1$,

$$c_\nu = \int_0^1 a(t)(1 - \sin 2\nu\pi t)\, dt \quad \text{et} \quad d_\nu = -\int_0^1 a(t) \cos 2\nu\pi t\, dt.$$

De ces relations il ressort clairement que lorsque l'un des coefficients c_1 ou bien d_1 est différent de zéro, alors $a_n(x)$ se compte asymptotiquement comme

$$|a_n(x)| \sim 2(c_1 \cos 2\pi x + d_1 \sin 2\pi x)(2\pi)^{-n}, \qquad n \to \infty,$$

D'autre part, pour que l'on ait

$$a_n(x) = o(q^n), \qquad n \to \infty, \tag{5}$$

avec $0 < q\; 1/2\pi$, il faut que les k premiers coefficients de Fourier de la fonction $a(x)$ s'évanouissent, k étant le plus petit entier contenu dans $1/2q\pi$.

Enfin, pour que la relation (5) puisse avoir lieu quelque petit que soit q il faut que tous les coefficients de Fourier de la fonction $a(x)$ soient égaux à zéro, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque la fonction $a(x)$ se réduit presque partout à zéro.

Communiqué le 18-VIII-1948.

О ЈЕДНОМ ОПШТЕМ ЗБИРНОМ ОБРАСЦУ

Од

С. АЉАНЧИЋА

Полазећи од обрасца

$$(1)\qquad \sum \{a(x_\nu+0)-a(x_\nu-0)\}\, f(x_\nu)+\int_a^b f(x)\,da(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\{a_k(b)\,f^{(k)}(b)-a_k(a)\,f^{(k)}(a)\}+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(x)\,da_n(x),$$

где је $a_k(x)$ k-струки интеграл функције $a(x)+C_0$, тј.

$$a_k(x)=\underbrace{\int\ldots\int}_{k}a(x)\,d^k(x)+\sum_{\nu=0}^{k}C_{k-\nu}\,x^\nu/\nu!,\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

при чему је $a(x)$ функција ограничене варијације у размаку (a,b), x_ν њене тачке дисконтинуитета, $f(x)$ произвољна функција која има све своје изводе у посматраноме размаку, а C_ν произвољне интеграционе константе, J. Карамата је показао да он садржи, с једне стране, Taylor-ов образац и њему сличне обрасце, ако интеграционе константе C_ν изаберемо тако да буде

$$a_n(b)=0\quad \text{за свако}\quad n=0,1,2,\ldots,$$

а, са друге стране, проширења Euler - Maclaurin-ова збирног обрасца, ако константе C_ν изаберемо тако да буде

$$(2)\qquad a_n(b)=a_n(a)\quad \text{за свако}\quad n=0,1,2,\ldots,$$

Још је Legendre показао да Euler - Maclaurin-ов збирни образац доводи најчешће до дивергентних, асимптотских редова. Писац овде показује да и општи збирни образац (1), под претпоставком (2), доводи такође до асимптотских редова и то ма каква била полазна функција $a(x)$. Он показује, наиме, да се у овом случају низ функција $a_n(x)$ асимптотски понаша као Bernouilli-ев низ и да само у извесним случајевима он тежи нули нешто брже, што, међутим, мало утиче на конвергенцију посматраног обрасца.