SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Par

JEAN ACZÉL (Budapest)

Dans cette Note nous nous proposons d'examiner l'équation fonctionnelle

$$f(ax+by+c)=\Phi\{f(x),f(y)\}, \tag{1}$$

où $\Phi(u,v)$ est une fonction continue des deux variables u et v et monotone au sens restreint, et $f(x)$ la fonction inconnue.

Nous allons montrer que l'on peut ramener cette équation à l'équation fonctionnelle plus simple

$$F(ax+by+c)=\alpha F(x)+\beta F(y)+\gamma, \tag{2}$$

dont la solution est donnée par le

Théorème 1.[1]) *Outre la solution triviale*

$$F(z)\equiv\frac{\gamma}{1-\alpha-\beta}=\text{const.},$$

l'équation fonctionnelle (2) ne possède de solution continue que lorsque

$$\alpha=a \qquad et \qquad \beta=b,$$

et dans ce cas la solution est de la forme

$$F(z)=Az+\frac{\gamma-Ac}{1-a-b},$$

A étant une constante quelconque.

---

1) J. Aczél, Über eine Klasse von Functionalgleichungen. Commentarii Mathematici Helvetici *21* (1946) p. 247—252. Nous esquissons les démonstrations des théorèmes 1. et 2. à la fin de la Note.

Afin de pouvoir ramener l'équation (1) à l'équation (2), nous aurons besoin du théorème suivant relatif aux fonctions „bissymétriques".

Une fonction de deux variables $\Phi(u, v)$ est dite bissymétrique lorsque

$$\Phi\{\Phi(u,v),\ \Phi(u',v')\} = \Phi\{\Phi(u,u'),\ \Phi(v,v')\} \tag{3}$$

quelque soient u, u', v et v'.

Théorème 2.[2]) *Toute fonction bissymétrique $\Phi(u,v)$ continue des deux variables u et v et monotone au sens restreint peut être mise sous la forme*

$$\Phi(u,v) = \varphi\{\alpha\varphi^{-1}(u)+\beta\varphi^{-1}(v)+\gamma\}, \tag{4}$$

où $\varphi(z)$ est une fonction continue et monotone au sens restreint, et $\varphi^{-1}(t)$ la fonction inverse de $\varphi(z)$.

Il est clair que la fonction $\Phi(u,v)$ figurant dans l'équation fonctionnelle (1) est bissymétrique, c'est-à-dire doit satisfaire l'équation (3). D'après le théorème 2. elle peut être mise sous la forme (4) de sorte que l'équation (1) se réduit à

$$f(ax+by+c) = \varphi\{\alpha\varphi^{-1}f(x)+\beta\varphi^{-1}f(y)+\gamma\}.$$

Par suite la fonction

$$F(z) = \varphi^{-1}f(z)$$

doit satisfaire l'équation fonctionnelle (2) et, d'après le théorème 1., l'unique solution non-triviale est de la forme

$$\varphi^{-1}f(z) = Az+\frac{\gamma-Ac}{1-a-b},$$

c'est-à-dire

$$f(z) = \varphi\left(Az+\frac{\gamma-Ac}{1-a-b}\right), \quad \text{avec } \alpha=a, \quad \beta=b. \tag{5}$$

Nous obtenons ainsi le

Théorème 3. *L'équation* (1) *n'admet de solutions non triviales que dans le cas où la fonction $\Phi(u,v)$ est de la forme* (4), *et dans ce cas ces solutions sont données par* (5).

---

[2]) J. Aczél, On Mean Values, Bull. of the Amer. Math. Soc. *54* (1948), p. 392—400.

On peut encore généraliser ce théorème de la manière suivante.

L'équation fonctionnelle

$$f\{\Phi(x, y)\} = \Psi\{f(x), f(y)\},$$

où les deux fonctions $\Phi(u, v)$ et $\Psi(u, v)$ sont supposées continues et monotones au sens restreint et l'une au moins d'entre elles bissymétrique, n'admet de solutions non triviales que lorsque l'autre fonction est de même bissymétrique. Par suite, en posant

$$\Phi(u, v) = \varphi\{a\varphi^{-1}(u) + b\varphi^{-1}(v) + c\},$$

et

$$\Psi(u, v) = \psi\{a\psi^{-1}(u) + b\psi^{-1}(v) + \gamma\},$$

cette solution est de la forme

$$f(z) = \psi\left\{A\varphi^{-1}(z) + \frac{\gamma - Ac}{1 - a - b}\right\}.$$

Esquisse de la démonstration du Théorème 1. Posons

$$\frac{a}{a+b} = r, \qquad \frac{b}{a+b} = s, \qquad (r+s=1),$$

et

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \rho, \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \sigma, \qquad (\rho+\sigma=1);$$

la substitution

$$x = y = \frac{au+bv}{a+b} = ru+sv$$

dans l'équation (2) donne

$$F(au+bv+c) = (\alpha+\beta)F(ru+sv)+\gamma,$$

ou bien, en tenant compte de l'équation (2),

$$F(ru+sv) = \rho F(u) + \sigma F(v), \qquad r+s = \rho+\sigma = 1.$$

En posant

$$\varphi(z) = F(z) - F(0) = F(z) - B, \qquad \varphi(0) = 0,$$

cette équation se transforme en

$$\varphi(ru+sv) = \rho\varphi(u) + \sigma\varphi(v),$$

et en y substituant successivement

$$u=x/r, \quad v=0, \quad \text{elle devient} \quad \varphi(x)=\rho\varphi(x/r),$$
$$u=0, \quad v=y/r, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \varphi(y)=\sigma\varphi(y/r),$$
$$u=x/r, \quad v=y/r, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \varphi(x+y)=\rho\varphi(x/r)+\sigma\varphi(y/r).$$

On en déduit que $\varphi(z)$ doit satisfaire l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

et la seule solution continue de cette équation est

$$\varphi(z)=Az.$$

Nous obtenons donc que $F(z)$ doit avoir la forme

$$F(z)=Az+B;$$

en substituant ce résultat dans l'équation (1) l'on obtient le théorème 1.

Esquisse de la démonstration du Théorème 2.

La solution

$$w=M(u,v)$$

de l'équation

$$\Phi(w,w)=\Phi(u,v)$$

est une fonction continue, monotone, bissymétrique et „reflexive", c. à d. qu'elle est une moyenne $M(z,z)=z$.

Formons les deux suites suivantes:

$$u_0=u \quad u_1=M(u,v), \ldots\ldots, \quad u_{n+1}=M(u_n,v_n), \ldots\ldots$$
$$v_0=v \quad v_1=M(v,u) \qquad v_{n+1}=M(v_n,u_n)$$

elles ont une limite commune

$$m(u,v)=\lim u_n=\lim v_n,$$

qui est une fonction continue, monotone, bissymétrique, reflexive et symétrique $\{m(u,v)=m(v,u)\}$.

Définissons à présent la fonction $\varphi(z)$ pour les nombres dyadiques

$$\varphi(0)=a, \quad \varphi(1)=b, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=m(a,b), \ldots$$
$$\ldots\varphi\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)=m\left\{\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right),\varphi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right\},$$

et étendons cette définition raisonnablement pour l'intervalle entier $(0, 1)$; alors

$$m(u, v) = \varphi\left(\frac{\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)}{2}\right).$$

On peut montrer que

$$m\{M(u, u'), M(v, v')\} = M\{m(u, v), m(u', v')\},$$

c. à d. que

$$\varphi\left[\frac{1}{2}\varphi^{-1}\{M(u, u')\} + \frac{1}{2}\varphi^{-1}\{M(v, v')\}\right] =$$

$$= M\left[\varphi\left\{\frac{\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)}{2}\right\}, \varphi\left\{\frac{\varphi^{-1}(u') + \varphi^{-1}(v')}{2}\right\}\right]$$

d'où, en posant

$$\varphi^{-1}(u) = x, \quad \varphi^{-1}(v) = y, \quad \varphi^{-1}(u') = x', \quad \varphi^{-1}(v') = y'$$

et

$$F(x, y) = \varphi^{-1}\{M(\varphi(x), \varphi(y))\},$$

l'on déduit que

$$F\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x'+y'}{2}\right) = \frac{1}{2}\{F(x, x') + F(y, y')\}.$$

Cela signifie que $F(x, y)$ est linéaire, c. à d. que

$$F(x, y) = px + qy + r \quad \text{et} \quad M(u, v) = \varphi\{p\varphi^{-1}(u) + q\varphi^{-1}(v) + r\}.$$

Puisque

$$M(z, z) = z, \quad p + q = 1 \quad \text{et} \quad r = 0,$$

on a

$$M(u, v) = \varphi\{p\varphi^{-1}(u) + q\varphi^{-1}(v)\}.$$

En vertu de notre définition, on a

$$\Phi(u, v) = \Phi(M, M) = \psi\{M(u, v)\} = g\{p\varphi^{-1}(u) + q\varphi^{-1}(v)\},$$

et $\Phi(u, v)$ étant bissymétrique

$$\Phi\{\Phi(u, u), \Phi(v, v)\} = \Phi\{\Phi(u, v), \Phi(u, v)\},$$

donc

$$g\varphi^{-1}g\{p\varphi^{-1}(u) + q\varphi^{-1}(v)\} = g\{p\varphi^{-1}g\varphi^{-1}(u) + q\varphi^{-1}g\varphi^{-1}(v)\}.$$

Posons

$$\varphi^{-1}(u)=x, \quad \varphi^{-1}(v)=y, \quad \varphi^{-1}g(z)=h(z),$$

alors

$$h(px+qy)=ph(x)+qh(y), \qquad h(z)=rz+s,$$

et vu que

$$g(z)=\varphi\, h(z)=\varphi\,(rz+s),$$

l'on obtient finalement

$$\Phi(u,v)=\varphi\{rp\,\varphi^{-1}(u)+rq\,\varphi^{-1}(v)+s\}=\varphi\{\alpha\varphi^{-1}(u)+\beta\varphi^{-1}(v)+\gamma\}.$$

c. q. f. d.

О ЈЕДНОЈ ФУНКЦИОНАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

Од

ЈОВАНА АЦЕЛА (Будимпешта)

Писац доказује овај став. Ако је функција $\Phi(u, v)$ непрекидна и монотона у ужем смислу, тада функционална једначина

$$f(ax+by+c)=\Phi\{f(x), f(y)\}$$

има непрекидних решења једино ако је функција $\Phi(u, v)$ облика

$$\Phi(u,v)=\varphi\{a\varphi^{-1}(u)+b\varphi^{-1}(v)+\gamma\},$$

где је $\varphi(x)$ монотона функција у ужем смислу, а $\varphi^{-1}(x)$ инверзна функција функције $\varphi(x)$. Тада опште решење посматране функционалне једначине има облик

$$f(x)=\varphi\left\{Ax+\frac{\gamma-Ac}{1-a-b}\right\},$$

где је A произвољна константа.