FORME DYADIQUE DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ

Par

DANIEL RACHKOVITCH

Soit M un point d'un milieu quelconque déterminé par son rayon vecteur $\vec{r}$ (fig. 1). Ke point voisin N est déterminé par rapport á M par le vecteur $\vec{dr}$. Si le point M vient en M', le point N viendra en N' déterminé par le le vecteur

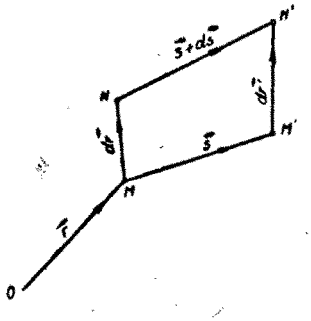

Fig 1.

$$\vec{dr'} = \vec{dr} + \vec{ds}.$$

Si le vecteur de déplacement, au voisinage du point M, est une fonction vectorielle de la position de ce point

$$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

où u, v, w sont fonctions des coordonnées rectangulaires x, y, z, et i, j, k les vecteurs unités du système de coordonnées $Oxyz$, la dérivée dans la direction du vecteur dr sera donnée par l'expression

$$\vec{ds} = \left(\vec{dr}, \nabla\right)\vec{s} = \left(\vec{dr}\left\{\nabla\vec{s}\right\}\right), \tag{1}$$

c'est-à-dire par le produit scalaire gauche et du vecteur $\vec{dr}$ d'affineur $\left\{\nabla\vec{s}\right\}$.

La déformation est déterminée par l'affineur $\{\nabla\vec{s}\}$, où

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

est l'opérateur de *Hamilton.*

Décomposons l'affineur de déformation en tenseur et axiateur

$$\{\nabla\vec{s}\} = T_e + A_e^x = \tfrac{1}{2}\left(\{\nabla\vec{s}\} + \{\vec{s}\nabla\}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\{\nabla\vec{s}\} - \{\vec{s}\nabla\}\right),$$

et prenons le produit scalaire gauche du vecteur $d\vec{r}$ et de cet affineur. En vertu de l'équation (1) et du produit véctoriel double on aura

$$d\vec{s} = \left(d\vec{r}\{\nabla\vec{s}\}\right) = \left(d\vec{r}, T_e\right) - \tfrac{1}{2}\left[d\vec{r}, \left[\nabla\vec{s}\right]\right].$$

La déformation se compose de la dilatation et du glissement qui, durant la rotation, restent invariables, de sorte que l'affineur devient le tenseur

$$T_e = \tfrac{1}{2}\left(\{\nabla\vec{s}\} + \{\vec{s}\nabla\}\right). \tag{2}$$

La forme dyadique de ce tenseur est

$$T_e + e_{xx}\{\vec{i}\vec{i}\} + e_{yy}\{\vec{j}\vec{j}\} + e_{zz}\{\vec{k}\vec{k}\} + \tfrac{1}{2}e_{xy}\left(\{\vec{i}\vec{j}\} + \{\vec{j}\vec{i}\}\right) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}e_{yz}\left(\{\vec{j}\vec{k}\} + \{\vec{k}\vec{j}\}\right) + \tfrac{1}{2}e_{zx}\left(\{\vec{k}\vec{i}\} + \{\vec{i}\vec{k}\}\right)$$

ou schematiquement

$$T_e \left\{ \begin{matrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{yx} & e_{yy} & e_{zz}, \\ \frac{1}{2}e_{zx} & \frac{1}{2}e_{yz} & \frac{1}{2}e_{xz} \end{matrix} \right.$$

avec le premier scalaire

$$S_1^e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\nabla\vec{s}\right) = dw\vec{s}. \tag{3}$$

Par suite de (1) et (2) on a

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r} + \left(d\vec{r}, T_e\right) = \left(d\vec{r}, I + T_e\right), \tag{4}$$

où I est le tenseur unité

$$I\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{Bmatrix}$$

Pour qu'un tenseur détermine la déformation, il faut que les conditions de la compatibilité de *Saint—Venant* soient satisfaites.

Ces conditions peuvent être exprimées sous forme dyadique

$$(5) \qquad {}^{d}\left[\nabla {}^{d}\left[T_e, \nabla\right]\right] = \tfrac{1}{2}\left[\nabla {}^{d}\left[\left\{\nabla \vec{s}\right\} + \left\{\vec{s}\nabla\right\}, \nabla\right]\right] = 0,$$

comme un produit vectoriel double de la forme dyadique (d'après *A. Bilimovitch*).

Ce produit est un tenseur avec le schema

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

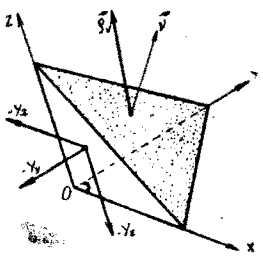

Fig. 2

Considérons l'équilibre d'un tetraèdre (fig. 2) où $\vec{\nu}$ est le vecteur-unité dans le sens de la normale. La tension dans cette direction sera

$$(6) \qquad \vec{\rho}_\nu = \vec{\rho}_x \alpha + \vec{\rho}_y \beta + \vec{\rho}_z \gamma,$$

où α, β, γ sont les cosinus des angles entre le vecteur $\vec{\nu}$ et les axes de coordonnées.

Cette tension peut être exprimée par le produit scalaire du vecteur-unité $\vec{\nu}$ et du tenseur de tension T_n

$$(6') \qquad \vec{\rho}_\nu = \left(\vec{\nu}\, T_n\right)$$

dont la forme dyadique est

$$T_n = \{\vec{\rho}_x \vec{i}\} + \{\vec{\rho}_y \vec{j}\} + \{\vec{\rho}_z \vec{k}\},$$

le schema

$$T_n \begin{cases} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{cases}$$

et le premier scalaire

$$S_1^n = X_x + Y_y + Z_z. \tag{7}$$

Au cas où existent les forces dues au volume $\vec{P}\,dV$, la condition d'équilibre du tetraèdre sera

$$\int_F \vec{\rho}\,dF + \int_V \vec{P}\,dV = 0,$$

d'où, en appliquant la formule de transformation de *Gauss*, l'on obtient

$$\vec{P} + (\nabla T_n) = 0, \tag{8}$$

c'est-à-dire l'équation de *Navier*.

Cette équation peut-être exprimée sous forme vectorielle à savoir

$$\vec{i}\,\mathrm{div}\,\vec{\rho}_x + \vec{j}\,\mathrm{div}\,\vec{\rho}_y + \vec{k}\,\mathrm{div}\,\vec{\rho}_z + \vec{P} = 0$$

ou, sous forme scalaire,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0, \\ &\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0, \\ &\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0, \end{aligned} \tag{8'}$$

comme une relation entre les tensions et les composantes de la force due au volume.

La tension $\vec{\rho}_\nu$ peut-être mise, d'après *Cauchy*, sous la forme suivante

$$\vec{\rho}_\nu = \rho_{\nu x}\vec{i} + \rho_{\nu y}\vec{j} + \rho_{\nu z}\vec{k} \tag{9}$$

avec les projections

$$\begin{aligned}
\rho_{\nu x} &= \left(\vec{\rho}_\nu, \vec{i}\right) = \left(\left(\vec{\nu}, T_n\right)\vec{i}\right) = X_x\,\alpha + X_y\,\beta + X_z\,\gamma,\\
\rho_{\nu y} &= \left(\vec{\rho}_\nu, \vec{j}\right) = \left(\left(\vec{\nu}, T_n\right)\vec{j}\right) = Y_x\,\alpha + Y_y\,\beta + Y_z\,\gamma,\\
\rho_{\nu z} &= \left(\vec{\rho}_\nu, \vec{k}\right) = \left(\left(\vec{\nu}, T_n\right)\vec{k}\right) = Z_x\,\alpha + Z_y\,\beta + Z_z\,\gamma.
\end{aligned} \tag{10}$$

Les relations entre les tensions et les composantes de la force $\int_F \vec{\rho}_\nu\, dF$ due à la surface sont données sous la forme

$$\begin{aligned}
X_\nu &= X_x\,\alpha + X_y\,\beta + X_z\,\gamma,\\
Y_\nu &= Y_x\,\alpha + Y_y\,\beta + Y_z\,\gamma,\\
Z_\nu &= Z_x\,\alpha + Z_y\,\beta + Z_z\,\gamma.
\end{aligned} \tag{11}$$

Grâce à l'égalité des tensions tangentielles, le tenseur de la tension peut-être mis sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
T_n = X_x\left\{\vec{i}\,\vec{i}\right\} + Y_y\left\{\vec{j}\,\vec{j}\right\} + Z_z\left\{\vec{k}\,\vec{k}\right\} + X_y\left(\left\{\vec{i}\,\vec{j}\right\} + \left\{\vec{j}\,\vec{i}\right\}\right) +\\
+ Y_z\left(\left\{\vec{j}\,\vec{k}\right\} + \left\{\vec{k}\,\vec{j}\right\}\right) + Z_x\left(\left\{\vec{k}\,\vec{i}\right\} + \left\{\vec{i}\,\vec{k}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

La nature d'un corps dépend de la liaison entre la déformation et les tensions

$$T_e = f\left(T_n\right).$$

Cette liaison est supposée linéaire. Pour un corps élastique et isotrope cette liaison est donnée par la loi de *Hooke*

$$T_e = \frac{1+\sigma}{E}\,T_n - \frac{\sigma}{E}\,S_1^n\,I, \tag{13}$$

où

E est le module d'élasticité de *Yonng*, et σ la constante de *Poisson*.

Sous forme scalaire nous aurons

$$\begin{aligned}
E\,e_{xx} &= X_x - \sigma\,(Y_y + Z_z), & E\,e_{xy} &= 2\,(1+\sigma)\,X_y,\\
E\,e_{yy} &= Y_y - \sigma\,(Z_z + X_x), & E\,e_{yz} &= 2\,(1+\sigma)\,Y_z,\\
E\,e_{zz} &= Z_z - \sigma\,(X_x + Y_y), & E\,e_{zx} &= 2\,(1+\sigma)\,Z_x.
\end{aligned} \tag{13}$$

La formule (13) donne une relation linéaire entre les premiers scalaires

$$S_1^e = \frac{1+\sigma}{E} S_1^n - \frac{3\sigma}{E}, \quad S_1^n = \frac{1-2\sigma}{E} S_1^n \tag{13''}$$

et la loi de *Hooke* prend une forme nouvelle

$$T_n = 2\mu T_e + \lambda S_1^e I, \tag{14}$$

où

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{2\mu\sigma}{1-2\sigma}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{14'}$$

sont les constantes de *Lamé*.

Des relations (14), (3) et (14') on tire

$$\left(\nabla T_n\right) = 2\mu\left(\nabla T_e\right) + \lambda \nabla\left(\nabla \vec{s}\right) = \mu\left(\Delta \vec{s} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla\left(\nabla \vec{s}\right)\right),$$

puisque

$$\left(\nabla T_e\right) = \tfrac{1}{2}\left(\Delta \vec{s} + \text{grad div } \vec{s}\right),$$

ou

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est l'opérateur de *Laplace*.

En portant cette valeur dans l'équation de Navier (8) nous obtenons l'équation différentielle de *Lamé* relative aux déplacements

$$\mu\left(\Delta \vec{s} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad } S_1^e\right) + \vec{P} = 0. \tag{15}$$

Le produit scalaire de cette équation par l'opérateur ∇, par suite des relations

$$\left(\nabla \Delta \vec{s}\right) = \Delta\left(\nabla \vec{s}\right) = \Delta S_1^e; \quad \left(\nabla \nabla S_1^e\right) = \Delta S_1^e,$$

donne une nouvelle correspondance à savoir

$$2\mu \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \nabla S_1^e + \left(\nabla \vec{P}\right) = 0. \tag{15'}$$

Appliquons l'opérateur $\triangle$ à l'équation (14) et ∇ à l'équation (15), en tenant compte des équations (15') et (13') et de la relation

$$\triangle T_e = \nabla\left(\nabla T_e\right) = \tfrac{1}{2}\left(\nabla\left(\triangle \vec{s}\right) + \triangle\left(\nabla \vec{s}\right)\right) = \nabla\left(\triangle \vec{s}\right),$$

on obtient l'équation différentielle de *Beltrami* sous la forme vectorielle

$$\triangle T_n + \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\nabla \vec{P}\right) + \frac{1}{1+\sigma}\triangle S_1^n + 2\,\mathrm{grad}\,\vec{P} = 0. \tag{16}$$

Les équations scalaires correspondantes ont la forme, par exemple,

$$\begin{aligned}
&\triangle X_x + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial X}{\partial x} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\triangle X_y + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{17}$$

on déduit les quatre équations suivantes par la permutation cyclique.

Au cas où $\vec{P}$ est le même en tous les points, ces équations se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned}
&\triangle X_x + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial x^2} = 0, \quad \triangle X_y + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial x\,\partial y} = 0,\\
&\triangle Y_y + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial y^2} = 0, \quad \triangle Y_z + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial y\,\partial z} = 0,\\
&\triangle Z_z + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial z^2} = 0, \quad \triangle Z_x + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 S_1^n}{\partial z\,\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{17'}$$

Communiqué le 18-IX-1947

ДИЈАДСКИ ОБЛИК ОСНОВНИХ ЈЕДНАЧИНА ЕЛАСТИЧНОСТИ

Од

ДАНИЛА РАШКОВИЋА

У овом раду се, пошав од дијадског облика

$$T_e = \frac{1}{2}\left(\left\{\nabla\vec{s}\right\} + \left\{\vec{s}\nabla\right\}\right)$$

тензора деформације T_e, где је са $\vec{s}$ обележен вектор померања а ∇ означава Хамилтонов оператор, изводе у дијадском облику све основне једначине Теорије еластичности.

Прво се наводе, у дијадском облику

$$^d\left[\nabla\, ^d\left[T_e, \nabla\right]\right] = 0,$$

Сен-Венанови услови компатибилности да би дати тензор заиста био тензор деформације.

Из посматрања равнотеже тетраедра изводи се у дијадском облику

1) $$\vec{P} + \left(\nabla T_n\right) = 0$$

Навијеова једначина. При томе $\vec{P}$ означава запреминску силу, а T_n је тензор напона, чији је дијадски облик

$$T_n = \left\{\vec{\rho}_x \vec{i}\right\} + \left\{\vec{\rho}_y \vec{j}\right\} + \left\{\vec{\rho}_z \vec{k}\right\}.$$

Вектори $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$, $\vec{\rho}_z$ одређени су једначином

(2) $$\vec{\rho}_\nu = \vec{\rho}_x\,\alpha + \vec{\rho}_y\,\beta + \vec{\rho}_z\,\gamma = \left(\vec{\nu}\, T_n\right),$$

где је $\vec{\rho}_\nu$ напон у правцу спољашње нормале $\vec{\nu}$ тетраедра чији су косинуси правца α, β, γ.

Из једначине (2) се добијају одмах, у дијадском облику, пројекције вектора напона $\vec{P}_\nu$ на осе Декартова правоуглог

триедра, на пр., прва

$$\rho_{\nu x} = \left(\vec{\rho}_\nu \vec{i}\right) = \left(\left(\vec{\nu}, T_n\right)\vec{i}\right).$$

Затим се изводи *Хуков закон* у облику

$$T_n = 2\mu\, T_e + \lambda S_1^e I, \tag{3}$$

где су λ и μ *Ламеове константе*, S_1^e први скалар тензора деформације, а I јединични тензор трећег реда.

Применом Хамилтонова оператора ∇ на једначину (2), а с обзиром на везу која постоји између Ламеових константа λ и μ и *Поасонове константе* σ, добија се, уношењем вредности $\left(\nabla T_n\right)$ у Навијеову једначину (1), *Ламеова диференцијална једначина* односно померања у облику

$$\mu\left(\nabla \vec{s} + \frac{1}{1-2\sigma}\,\mathrm{grad}\, S_1^e\right) + \vec{P} = 0, \tag{4}$$

где је ∇ Лапласов оператор.

Најзад се, применом Лапласова оператора Δ на једначину (3) и извођењем нове везе применом Хамилтонова оператора ∇ на једначину (4), долази до *Белтрамиеве диференцијалне једначине* у векторском облику

$$\Delta T_n + \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\nabla \vec{P}\right) + \frac{1}{\sigma+1}\nabla S_1^n + 2\,\mathrm{grad}\,\vec{P} = 0,$$

где је S_1^n први скалар тензора напона.