SUR UN PROBLÈME TOPOLOGIQUE DE LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Par

M. RADOJČIĆ

1. Il ne sera question ici que des surfaces de Riemann simplement connexes, i l l i m i t é e s (v. [3], p. 64) et qui s'étendent sur le plan de ζ. Soit Δ une telle surface. D'après un théorème général de *Poincaré-Koebe* il existe une fonction analytique $z(\zeta)$, qui fait la transformation conforme bi-univoque de Δ sur un domaine simplement connexe du plan de z. Ce domaine comprend tout le plan de z, ou bien il possède une frontière et c'est alors un domaine ouvert, soit par ex. l'intérieur d'un cercle au rayon fini ou infini. Désignons par D ce domaine.

Comme nous l' avons démontré (v. [3] et [4]), les surfaces de Riemann illimitées peuvent être divisées en f e u i l l e t s aux frontières continues, feuillets dont chacun recouvre entièrement le plan, et qui ne s'accumulent en aucun point de la surface. À cette division correspond la division de D en d o m a i n e s f o n d a m e n t a u x dont les frontières sont, elles aussi, continues à l'intérieur de D et ne s'accumulent en aucun point à l'intérieur de D (v. [5]).

2. À cette occasion remarquons que *M. T. Shimizu* a démontré le même fait, à peu près en même temps, mais concernant le cas plus restreint des fonctions méromorphes et de leurs inverses (v. [6], p. 175—200). Il applique la méthode identique à la nôtre, dont il a pu prendre connaissance de notre communication [3], mais sans avoir connu notre communication [4], où le problème proposé de la division des surfaces de

Riemann en feuillets, traité dans [3], fut conduit au bout. M. Shimizu fait remarquer qu'il avait énoncé son théorème, pour la première fois, à la réunion de la Société physico-mathématique du Japon en juin 1928 (c. à d. à l'époque même où parut notre travail [3]). Quant à sa démonstration, elle est, en partie, identique à la notre. (Ajoutons que notre second travail [4] fut présenté à la séance de l'Académie Serbe des Sciences le 8 déc. 1930, c. à d. également avant le travail de M. Shimizu, qui fut présenté le 9 juillet 1931).

Or M. Shimizu remarque bien que la division en feuillets, proposée par nous dans [3], ne donne pas nécessairement tous les feuillets de la surface. Nous rappelons ici que nous avons construit les feuillets par une suite de prolongements analytiques: le premier feuillet à partir d'un point quelconque a_1 de la surface, le second à partir d'un autre point a_2 de la surface, extérieur au premier feuillet, le troisième à partir d'un point a_3 extérieur aux deux feuillets déjà construits etc. Évidemment, on doit tenir compte de la manière par laquelle on choisit les a_n: le fait bien connu, que toute surface de Riemann peut être recouverte par un ensemble dénombrable d'éléments de la fonction correspondante, trouve ici encore son application, sans quoi on ne pourrait pas affirmer que les feuillets obtenus recouvrent la surface entièrement. Or, c'est ce que nous avons dans [3] omis de mentionner. Donc M. Shimizu a bien raison. Néanmoins, il nous semble exagéré lorsqu'il dit que notre méthode est insuffisante et il a tort en disant qu'il est nécessaire d'appliquer dans ce problème un théorème de *W. Gross* et un autre de *M. Terasaka* (v. [6], p. 180, remarque (2)). Au contraire, comme nous avons montré dans [4], il n'existe aucune difficulté à compléter la démonstration, sans appliquer des théorèmes auxiliaires.

3. Dans l'étude des surfaces de Riemann on est souvent obligé à chercher une représentation aussi claire que possible des propriétés topologiques de la surface considérée. Une telle espèce de représentation fait l'objet des considérations suivantes.

Dans ce but on divise ordinairement la surface en feuillets ou en demi-feuillets (v. par ex. [7] et [8]). L'entrelacement des feuillets (ou demi-feuillets) caractérise alors les propriétés topologiques de la surface de Riemann considérée. Dans la présente note il s'agira de la division en feuillets entiers. La surface de Riemann apparaît alors comme un ensemble de feuillets qu'on peut nommer un s y s t è m e d e f e u i l l e t s.

De même, l'ensemble des domaines fondamentaux qui constituent le domaine D dans le plan de z peut être appelé un s y s t è m e d e d o m a i n e s f o n d a m e n t a u x.

4. Les obstacles auxquels se heurte la représentation directe, d'un système de feuillets dans l'espace, dès que celui-là est un peu plus compliqué, nous poussent à la recherche d'un modèle simplifié d'un tel système, qu'on obtiendrait plus facilement et qui conserverait au moins ses propriétés topologiques.

Quand il s'agit des surfaces du genre zéro, le système des domaines fondamentaux, étalé dans le plan, présente déjà un tel modèle. Mais la connaissance exacte de ce système dépend des problèmes de la métrique conforme, entre autres du „problème des types". Comme on sait, les surfaces de Riemann algébriques et simplement connexes, et elles seules, sont du type elliptique, donc, à ce point de vue, c'est un problème résolu. Par contre, la distinction du type hyperbolique et parabolique est un problème difficile et non résolu.

Or, parmi les modèles utilisables, c. à. d. qui ne dépenderaient pas du problème des types et d'autres questions de la métrique conforme, on peut distinguer: 1° l' a r b r e ou le r é s e a u topologique (v. [2], [7] et [8]) et 2° l'i m a g e t o p o l o g i q u e d u s y s t è m e d e f e u i l l e t s, dont nous nous sommes déjà servi implicitement dans certains travaux antérieurs et que nous allons considérer ici.

5. Pour ne pas compliquer l'exposition, désignons les éléments d'une image topologique par les mêmes noms et les mêmes signes que les éléments correspondants de l'image conforme. Donc, soit – dans l'image topologique – D le domaine correspondant à la surface Δ; appelons également „domaines fondamentaux" les domaines en lesquels D est divisé et qui correspondent aux feuillets, etc.

Par l'image topologique d'un système de feuillets d'une surface de Riemann Δ nous entenderons toute image plane de *ce système de feuillets, par laquelle* Δ *est transformée en un domaine plan D d'une manière bi-univoque et bi-continue à l'intérieur de* Δ, *continue même aux frontières de chaque feuillet considéré à part, et telle qu'aux points de ramification transcendants, différents entre-eux correspondent des points de la frontière de D différents entre-eux.*

Remarquons que la continuité de la transformation aux frontières de chaque feuillet est une condition non contenue dans la précédente, parce qu'elle se rapporte aussi aux points de ramification transcendants situés à la frontière d'un feuillet. En vertu de la dite condition, nous pourrons parler dans l'image topologique d'angles transcendants comme des figures formées par deux courbes continues partant du sommet de l'angle. (Notons que cette continuité n'est pas un fait nécessaire dans l'image conforme; v. [5]).

En ce qui concerne la dernière condition de la définition précédente, il conviendra mieux de considérer les faisceaux transcendants qui donnent une idée plus complète des points de ramification transcendants de Δ.

Lorsque Δ est du type elliptique, cette image topologique recouvre tout le plan, y compris le point à l'infini. La transformation est alors bi-univoque et bi-continue partout. Lorsque Δ est du type hyperbolique ou parabolique, l'image topologique comprend la partie finie du plan ou bien (ce qui a nécessairement lieu dès qu'on a deux faisceaux transcendants) l'intérieur d'un cercle topologique. Dans le dernier cas la distinction des faisceaux transcendants sera plus facile, donc:

Le type étant parabolique ou hyperbolique, supposons que l'image topologique du système des feuillets recouvre l'intérieur d'un cercle.

Appelons d'après Riemann un point e x t r a o r d i n a i r e chaque point du plan de z, qui correspond à un point de ramification de la fonction inverse, et par point extraordinaire d'o r d r e n celui qui correspond à un point de ramification algébrique d'ordre n (c. à d. où s'interchangent n feuillets). Les points extraordinaires sont des sommets des domaines fondamentaux, excepté quand l'ordre est égal à deux, car alors ils peuvent être aussi bien des points intérieurs des côtés (intérieurs au sens linéaire). Pour mettre en évidence tous les points extraordinaires dans l'image topologique d'un système de feuillets, *supposons que nous y ayons marqué tous les points extraordinaires, qu'ils soient des sommets des domaines fondamentaux ou qu'ils ne le soient pas.*

6. Montrons par un exemple élémentaire comment l'image topologique du système de feuillets peut donner l'idée de l'entrelacement des feuillets ou, si l'on veut, un tableau des propriétés topologiques de la surface de Riemann, lorsque celle-ci est connue.

Envisageons la surface de Riemann donnée par la description suivante des liaisons entre ses feuillets L_n $(n=1,2,3,4,5)$ (v. fig. 1, *a*): les feuillets L_1 et L_2 sont reliés suivant un certain arc $\alpha\beta$, les feuillets L_2 et L_3 sont reliés suivant le même arc $\alpha\beta$, les feuillets L_1 et L_4 sont reliés suivant un certain arc $\beta\gamma$, les feuillets L_4 et L_5 sont reliés suivant un certain arc $\gamma\delta$.

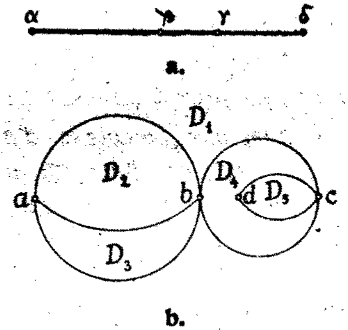


Fig. 1

Considérons les feuillets L_1 et L_2 et les points critiques α et β; décrivons dans le plan de l'image topologique un cercle topologique. Si D_1 et D_2 sont les domaines fondamentaux correspondants, soit D_1 l'extérieur et D_2 l'intérieur du cercle (v. fig. 1 *b*). Prenons sur le bord du cercle deux points quelconques *a* et *b*, qui corresponderaient aux points α et β.

Puisque ce ne sont pas les seuls feuillets, considérons L_2 et L_3 et relions donc *a* et *b* par une seconde ligne (le diamètre du cercle). Soit maintenant D_2 le demi-cercle supérieur et D_3 le demi-cercle inférieur.

Quant à L_1 et L_4, nous devons décrire un second cercle contenu dans D_1 et qui passe par *b*. Ce cercle divise le domaine D_1 en une partie extérieure à ce cercle et en une partie intérieure. La première est maintenant D_1, la seconde D_4. Par une considération analogue, nous trouvons qu'il faut décrire un nouveau cercle dans D_4 par un certain point *c*, pour obtenir le domaine

D_8. L'image obtenue nous montre entre autres que les feuillets L_1 et L_8 sont, eux aussi, reliés suivant l'arc $\alpha\beta$.

7. Soit maintenant une surface de Riemann du type elliptique; alors l'image topologique représente du point de vue topologique un réseau ou un complexe d'arêtes. Ce complexe n'est pas nécessairement connexe, mais chaque arête appartient au moins à un cycle d'arêtes.

Or, cette notion de complexe ne comprend pas les cas de l'image topologique du système de feuillets quand ces feuillets sont en nombre infini. Donc, nous devons généraliser les notions du cercle et du complexe d'arêtes. Ici nous nous contenterons des définitions suivantes:

Appelons cycle d'arêtes tout ensemble connexe d'arêtes, fini ou infini, qui est du point de vue topologique équivalent au cercle.

Appelons complexe d'arêtes ou réseau tout ensemble fini d'arêtes situées dans un plan, tel que chaque point intérieur d'une arête appartient uniquement à cette arête et que chaque arête appartient au moins à un cycle d'arêtes du même complexe.

Le point où se rencontrent n arêtes s'appelle noeud d'ordre n. Il résulte de la définition précédente qu'on a toujours $n \geqslant 2$.

Chaque domaine du plan du réseau, limité par des arêtes et qui ne contient à son intérieur aucune arête sera appelé domaine élémentaire du même réseau.

Nous dirons encore qu'un réseau est fini ou infini suivant qu'il contient un nombre fini ou infini d'arêtes.

8. Avec ces définitions nous pouvons démontrer les propositions suivantes:

I. *L'image topologique d'un système de feuillets constitue un réseau.*

Démonstration. Si dans l'image topologique un certain côté de la frontière d'un domaine fondamental ne contient parmi ses points intérieurs aucun point extraordinaire, ce côté est une arête topologique; dans le cas contraire ce côté est divisé par les points extraordinaires en parties qui sont des arêtes, car elles n'ont plus parmi leurs points intérieurs des points extraordinaires.

Par conséquent, l'image topologique d'un système de feuillets est un ensemble d'arêtes. Évidemment, tout point intérieur d'une telle arête n'appartient à aucune autre. Prenons une arête. Elle appartient à un côté de la frontière d'un domaine fondamental. Ce côté appartient à la courbe fermée qui constitue une partie connexe de la frontière de ce domaine. Ce cercle se compose de côtés, donc d'arêtes; donc c'est un cycle d'arêtes. Par conséquent, l'arête considérée appartient à un cycle d'arêtes, c.q.f.d.

Remarquons que les domaines fondamentaux de l'image topologique sont identiques aux domaines élémentaires du réseau. Les points extraordinaires sont des noeuds, mais comme il y a des sommets qui ne sont pas des points extraordinaires, chaque noeud n'est pas nécessairement un point extraordinaire.

II. *Si la surface de Riemann Δ est du type elliptique, l'image topologique de son système de feuillets constitue un réseau fini.*

Démonstration. Lorsque le type est elliptique la surface est algébrique, donc l'image topologique a un nombre fini de points extraordinaires et de sommets de domaines fondamentaux; par conséquent elle représente un réseau au nombre fini de noeuds et d'arêtes: c'est un réseau fini.

III. *Si la surface de Riemann est du type hyperbolique ou parabolique, l'image topologique du système de feuillets constitue un réseau infini, contenu à l'intérieur d'un cercle* (topologique). *Ce réseau contient une suite infinie de cycles aux propriétés suivantes:*

1. *chaque cycle contient et délimite un domaine qui ne contient qu'un nombre fini de domaines élémentaires;*

2. *chaque cycle contient tous les domaines élémentaires contenus par le cycle précédent;*

3. *chaque domaine élémentaire est contenu à l'intérieur d'un cycle au moins.*

Démonstration. Soit $D_1, D_2, \ldots$ la suite de tous les domaines fondamentaux de l'image considérée du système de feuillets. D'après le n° 4 cette image est contenue dans le cercle D. Il reste à démontrer l'existence d'une suite de cycles possédant les propriétés énoncées.

Considérons n'importe quel domaine fondamental, soit par ex. D_1; sa frontière est un cycle K_1; si D_1 n'est pas un domaine simplement connexe, K_1 contient plusieurs domaines fondamentaux, mais en tout cas un nombre fini, car dans le cas contraire l'une des frontières intérieures du domaine D_1 renfermerait une infinité de domaines fondamentaux, donc il y aurait, hormi la frontière de D, d'autres singularités essentielles de $\zeta(z)$ dans D, contrairement aux hypothèses. Soit D' le domaine limité du côté extérieur par K_1. Ajoutons à D' le domaine fondamental $D n_1$ qui a au moins un côté de sa frontière commun avec D' et possède le moindre index parmi tous les domaines $D_2, D_3, \ldots$ Soit D'' le domaine limité du côté extérieur par la frontière extérieure du domaine $D' + D n_1$. Le domaine D'' contient un nombre fini de domaines fondamentaux, puisque dans le cas contraire il y aurait dans $D n_2$ une infinité de domaines fondamentaux, donc une singularité essentielle, ce qui s'oppose aux hypothèses. Puis ajoutons à D'' le domaine fondamental $D n_3$ qui a au moins un côté commun avec D'' et possède le moindre index parmi tous les domaines fondamentaux dans D''. Soit D''' le domaine limité du côté extérieur par la frontière extérieure du domaine $D'' + D n_3$.

En répétant ainsi ce procédé, nous obtenons une suite de domaines $D^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ayant les propriétés suivantes: la frontière de chacun est un cycle K_ν; chaque domaine $D^{(\nu)}$ contient un nombre fini de domaines fondamentaux; chaque K_ν contient tous les domaines élémentaires contenus par $K_{\nu+1}$; chaque domaine élémentaire du réseau est contenu à l'intérieur des cycles K_ν dès que ν est assez grand, puisque nous épuisons par le choix d'indices n_1, $n_2, \ldots$ (et le reste des opérations) la suite $D_1, D_2, \ldots$

9. L'image topologique du système de feuillets est, de même que l'image conforme du système de domaines fondamentaux dans le plan de z, un domaine simplement connexe, ouvert, ou bien sans limites, situé dans un plan. Il est clair qu'on peut l'obtenir aussi bien de l'image conforme par une déformation continue à l'intérieur de D et sur la frontière de chaque domaine fondamental considéré à part. Or, sur la frontière de D la déformation n'est pas nécessairement continue et c'est justement là que réside l'indépendance dans la construction de l'image topologique à l'égard du problème des types des surfaces de Riemann.

En d'autres termes: *l'image topologique du système de feuillets de la fonction* $z(\zeta)$ *est en même temps l'image topologique du système correspondant des domaines fondamentaux de la fonction* $\zeta(z)$. Donc nous pouvons dire:

Par l'image topologique d'un système de domaines fondamentaux nous entenderons toute image plane de ce système, par laquelle le domaine D du plan de z est transformé en un domaine plan d'une manière bi-univoque et bi-continue à l'intérieur de D, continue même aux frontières de chaque domaine fondamental considéré à part, et telle qu'aux faisceaux transcendants différents entre-eux correspondent des faisceaux transcendants de l'image topologique dont les sommets sont différents entre-eux.

En ce qui concerne notre condition, que dans l'image topologique d'un système de feuillets tous les points intérieurs du second ordre soient inscrits, nous devons la supprimer dans l'image du système de domaines fondamentaux, puisqu'un système de domaines fondamentaux n'est qu'une agglomération de domaines. Donc, *supposons que les points extraordinaires du second ordre, qui ne sont pas des sommets des domaines fondamentaux, ne soient pas inscrits dans l'image topologique d'un système de domaines fondamentaux.*

10. Tenant compte de cette remarque, tous les énoncés du n° 7 sont applicables aux images topologiques des domaines fondamentaux. Ainsi nous pouvons dire:

IV. *La figure topologique d'un système de domaines fondamentaux constitue un réseau qui ne contient aucun noeud du second ordre.*

11. L'une des premières questions qu'on peut poser par rapport au système de domaines fondamentaux est la suivante: À un point situé dans *D* correspond-il un point ordinaire de la surface Δ ou un point de ramification, et de quel ordre? La réponse est donnée par la proposition suivante, contenant des faits élémentaires:

V. *Les points intérieurs des domaines fondamentaux sont des points ordinaires* (non extraordinaires); *sur la frontière des domaines fondamentaux chaque point intérieur d'un côté est un point ordinaire ou extraordinaire du second ordre; le sommet* *d'un faisceau d'angles, contenant p angles, est un point ordinaire ou extraordinaire d'ordre $\leqslant p$; aux sommets transcendants correspondent des points de ramification transcendants.*

Démonstration. La première et la dernière partie de la proposition sont évidentes. En ce qui concerne la seconde, à chaque point intérieur a d'un côté s correspond sur la frontière σ des feuillets un point α, où se limitent deux feuillets seulement, Δ_m et Δ_n. Supposons que α soit un point intérieur de la ligne σ considérée dans le plan de ζ (fig 2).

Décrivons dans le plan de z autour de a une courbe fermée suffisamment petite et telle que le côté s soit franchi deux fois; à cela correspond une courbe qui entoure α au moins une fois (parce qu'on doit retourner au point de départ). Or, pour que σ soit franchi deux fois il faut entourer α une seule fois, donc α est un point ordinaire de Δ. Considérons un autre point intérieur b de s et supposons qu'il lui correspond une extrémité β de σ. Décrivons autour de b une courbe fermée, telle que s soit franchi deux fois; à ceci correspond une courbe qui entoure β deux fois, car c'est la seule manière de franchir σ deux fois. Donc, β est un point de ramification du second ordre. C. q. f. d.

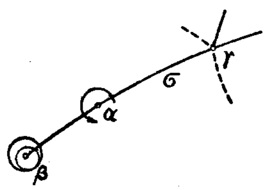


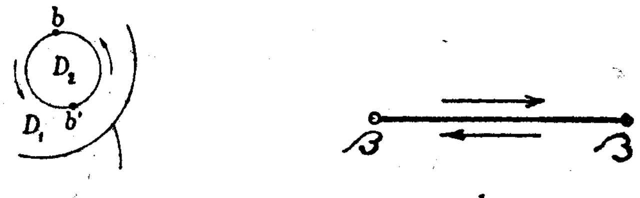
Fig. 2

En ce qui concerne la troisième partie de la proposition V, la démonstration en est semblable. Décrivons autour d'un sommet c commun à p angles une courbe fermée. Généralement à cette courbe correspond sur Δ un chemin qui tourne plusieures fois autour du point correspondant γ de la surface Δ. Au passage par l'un des p angles correspond le passage par un feuillet; comme chaque feuillet recouvre le plan une fois, on entoure γ une fois au plus par ce passage. Or, il y a p angles, qui ne doivent pas nécessairement appartenir tous aux différents domaines fondamentaux; donc dans γ se rencontrent p feuillets au plus, c. à. d. il faut entourer $\leqslant p$ fois le point γ avant que le chemin soit fermé. Donc, γ est un point de ramification d'ordre $\leqslant p$, c. q. f. d.

12. On démontre aussi facilement le fait élémentaire suivant:

VI. *Parmi les points intérieurs d'un côté de la frontière d'un domaine fondamental il y a au plus deux points extraordinaires.*

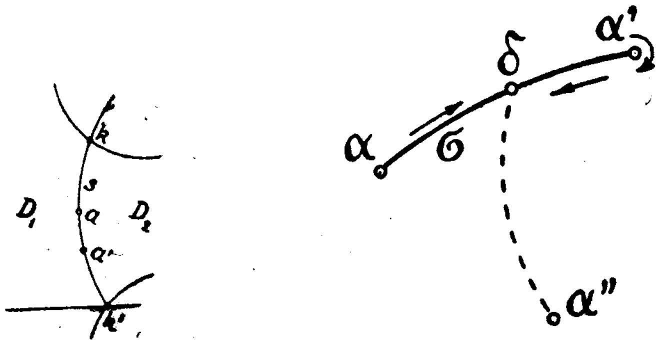
D é m o n s t r a t i o n. D'après la proposition V, ce sont des points extraordinaires du second ordre. Soient D_1 et D_2 les do-



a. b.

Fig. 3.

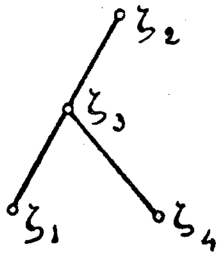
maines fondamentaux qui se limitent en s et Δ_1 et Δ_2 les feuillets correspondants. À l'exception du cas où s est une courbe fermée (fig. 3,a), à quoi corresponderait un arc simple $\beta\beta'$ (fig. 3, b) comme frontière complète de Δ_1 et Δ_2, le côté s a deux extrémités, soient k et k' (fig. 3, c). Partons alors de k et allons le long de s, en nous tenant du côté de D_1. Soit a le premier et a' le second point extraordinaire rencontré ainsi,



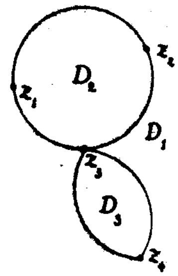
c. d.

Fig 3.

α et α' les points de ramification correspondants, situés sur la frontière σ correspondante (fig. 3, d). Les points α et α' sont deux extrémités de σ, comme nous l'avons vu au n° 10. Au chemin de a à a' correspond le chemin de α à α' sur le bord du feuillet Δ_1; au chemin allant plus loin correspond le retour de α' à α suivant le côté opposé de l'arc $\alpha\alpha'$. Supposons qu'il y ait parmi les points intérieurs de s un troisième point extraordinaire a''. À ce point corresponderait encore un point extrème α'', donc un point qui n'est pas situé sur $\alpha\alpha'$, le long



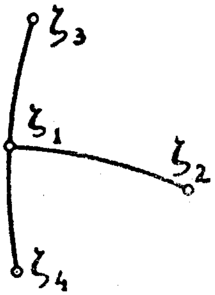
a.



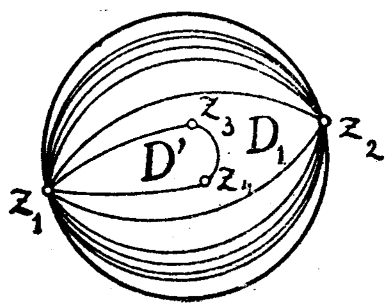
b.

Fig. 4.

duquel nous avons commencé le retour vers α. Donc nous devrions quitter l'arc $\alpha\alpha'$ en l'un de ses points δ et suivre un nouvel arc $\delta\alpha''$; au moins trois arcs $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\alpha''$ se rencontreraient en δ. Or, au point δ devrait correspondre un point ordinaire d situé sur s entre a' et k', ce qui est impossible d'après les con-



c.



d.

Fig. 4.

sidérations du n° 10. Par conséquent il est exclu qu'il y ait un troisième point extraordinaire.

Comme conséquence de VI on a:

VII. *L'image topologique d'un système de feuillets constitue un réseau qui ne contient nulle part plus de deux noeuds consécutifs du second ordre.*

13. L'exemple suivant va nous rappeler la possibilité que deux points extraordinaires se trouvent parmi les points intérieurs d'un côté de la frontière d'un domaine fondamental.

Imaginons une surface de Riemann à deux feuillets Δ_1 et Δ_2, les points de ramification étant ζ_1 et ζ_2 et la frontière des feuillets $\zeta_1 \zeta_2$. Coupons Δ_1 le long de l'arc $\zeta_3 \zeta_4$, ζ_3 étant un point intérieur de l'arc $\zeta_1 \zeta_2$ et relions le long de cette coupure Δ avec un feuillet nouveau Δ' (fig. 4, *a*). Cela signifie dans l'image topologique de ce système de feuillets qu'on délimite dans D_1 un nouveau domaine D' (fig. 4, *b*) dont la frontière passe par un point z_3 de l'un des arcs $z_1 z_2$. Sur le côté $z_3 z_1 z_3$ de la frontière de D_1 et D_2 se trouvent deux points extraordinaires z_1 et z_2, et c'est l'existence de ces points qu'il fallait démontrer. (Les fig. 4, *c* et *d* représentent un exemple analogue, où le nombre des feuillets est infini).

Communiqué le 16-XII-1940.

О ЈЕДНОМ ТОПОЛОШКОМ ПРОБЛЕМУ ТЕОРИЈЕ РИМАНОВИХ ПОВРШИНА

Од

М. РАДОЈЧИЋА

У испитивању мултиформних функција $z(\zeta)$ или униформних $\zeta(z)$ могу се увек разликовати два питања: једно је тополошке природе, друго припада конформној метрици. Што се првог питања тиче, јавља се пре свега потреба да се посматрана Риманова површина Δ у погледу на своја тополошка својства што прегледније карактерише. У ту сврху писац уводи појам *тополошке слике* система листова на које је Δ подељена, или основних области инверсне функције, и доказује ове ставове:

I. *Тополошка слика система листова претставља „мрежу“* (тј. комплекс „дужи“ у тополошком смислу).

II. *Ако је Δ елиптичног типа, тополошка слика система листова претставља коначну мрежу.*

III. *Ако је Δ хиперболичног или параболичног типа, тополошка слика система листова претставља бесконачну мрежу, садржану у унутрашњости једног тополошког круга. Та мрежа садржи бескрајан низ кола* (циклуса), *који има ове особине:* 1. *свако коло тог низа омеђује област коју споља омеђује само коначан број елементарних области;* 2. *свако коло садржи све елементарне области које садржи претходно коло;* 3. *свака елементарна област мреже садржана је у унутрашњости бар једног кола.*

IV. *Тополошка слика система основних области претставља мрежу у којој нема чворова другог реда.*

V. *Унутрашње тачке основних области јесу обичне тачке; на међи тих области унутрашња тачка неке стране јесте обична или нарочита тачка другог реда; теме неког снопа углова у коме се састоје* **p** *углова јесте обична или нарочита тачка реда* $\leqslant$ **p**; *трансцендентном темену одговара трансцендентна тачка гранања.*

VI. *На једној страни међе неке основне области, између њених крајњих тачака, не могу постојати више од две нарочите тачке.*

VII. *Тополошка слика система листова претставља мрежу која не садржи нигде више од два узастопна чвора другог реда.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Errera Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs (Thèse, Bruxelles, 1920).

[2] R Nevanlinna – Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion (Verh. des Int. Math. Kongresses, Zürich, 1932).

[3] M. Radoitchitch - Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets (Glas de l'Acad. Roy. Serbe, t. 134 Beograd, 1929).

[4] M. Radoitchitch – Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets (Glas de l'Acad. Roy. Serbe, t. 146, Beograd, 1931).

[5] M Radojčić – Sur une classe de fonctions analytiques (Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, t. 1, 1932).

[6] T. Shimizu – On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions, I (Jap. J. of Math., vol. 8, 1931).

[7] A. Speiser - Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen (Comment. math. helv., 1, 1929).

[8] A. Speiser – Über Riemannsche Flächen (Comment. math. helv 2, 1930).