SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE THOMAS-FERMI
(DEUXIÈME PARTIE)

Par

VOJISLAV G. AVAKUMOVIC

1. Ad *A* du № 3 de la première partie du travail[1]), nous avons montré que l'équation différentielle de Thomas-Fermi

$$y'' = f(x) y^{\lambda} \text{ avec } \lambda > 1, \tag{1}$$

se ramène, par la substitution

$$y = p(x) z(\varphi), \tag{2}$$

où $p(x)$ est une fonction positive, convexe et décroissante, à l'équation différentielle

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} = \chi [\Omega z^{\lambda-1} - 1], \tag{3}$$

où α est un nombre positif, d'ailleurs arbitraire, et

$$\varphi(x) = \zeta + \int_0^x \frac{\dfrac{1}{p^2(\tau)}}{\eta + \alpha \displaystyle\int_0^{\tau} \frac{dt}{p^2(t)}} d\tau \tag{4}$$

tandisque les fonctions χ et Ω sont définies par

$$\chi = \frac{p'' z}{p \varphi'^2}$$

et

$$\Omega = \frac{f p^{\lambda}}{p''}.$$

D'après le Lemme 3 du T-F. I., $1 > z(\varphi) \to 1$ lorsque $\varphi \to 8$ toutes les fois que les conditions

$$\frac{p^2(x)}{x} \int_0^x \frac{dt}{p^2(t)} > C_0, \tag{5}$$

$$x^2 \frac{p''(x)}{p(x)} > C_0, \tag{6}$$

et

$$\Omega \to 1, x \to \infty \tag{7}$$

sont satisfaites.

Des conditions (5) et (6) nous nous sommes servi pour démontrer (ad B de № 3 du T-F. I.) qu'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que

$$\chi > \beta z. \tag{8}$$

D'autre part, la conclusion $p(x) z(\varphi) > C > 0$ – résultant des inégalités (5) et (6) – que nous avons tirée ad C, cas a) de № 3 du T-F. I., s'obtient aussi sous la condition $z = o(e^{\alpha\varphi})$. Pour le reste de la démonstration du Lemme 3 on n'emploie que les conditions (7), (8) et $z = o(e^{\alpha\varphi})$. Donc on peut énoncer le Lemme 3 sous la forme du théorème suivant.

Théorème 1_2. *Soit*

$$\chi > \beta z \text{ et } \Omega \to 1 \text{ lorsque } x \to \infty$$

et $z = z(\varphi)$ *une solution de l'équation* (3) *satisfaisant l'inégalité* $z = o(e^{\alpha\varphi})$ *lorsque* $\varphi \to \infty$. *Alors*

$$1 > z \to 1 \text{ lorsque } \varphi \to \infty.$$

Au № 2 de la présente note nous allons montrer qu'on peut améliorer le comportement asymptotique de la fonction z toutes les fois que les fonctions χ et Ω satisfont aux restrictions (9) et (10). De cette manière nous arrivons au

Théorème 2_2. *Soit:*

1. $$a = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta}}{2},$$

$$\chi = \beta z + O(e^{an\varphi}), \quad \varphi \to \infty \quad \text{et} \tag{9}$$

$$\Omega = 1 + O(e^{an\varphi}), \quad \varphi \to \infty, \tag{10}$$

n étant un nombre entier $\geqslant 2$.

2. *$z = z(\varphi)$ une solution de l'équation* (3) *satisfaisant la condition $o < z = o(e^{\alpha\varphi})$ lorsque $\varphi \to \infty$.*

Alors:

1. *Il existe une suite de nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ avec $A_1 = 1$ et un nombre C tels que*

$$z = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu (Ce^{a\varphi})^\nu + O(e^{an\varphi}) \text{ lorsque } \varphi \to \infty. \tag{11}$$

2. *Les A_ν sont définis par les relations*

$$[a\nu(a\nu - \alpha) - (\lambda - 1)]A_\nu + \beta \sum_{\mu=2}^{\nu} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_{\nu-1}=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+(\nu-1)k_{\nu-1}=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\ldots k_{\nu-1}!} \times$$
$$\times A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_{\nu-1}^{k_{\nu-1}} = 0. \tag{12}$$

Dans la note „Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. Théorèmes relatifs à l'existence de l'intégrale" qui paraîtra prochaînement dans „Glas. Srp. Akad. Nauka" j'ai démontré entre autres choses, le

Théorème. *Soit $f(x)$ continu et > 0 pour $x > a \geqslant 0$,*

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\Theta} < \infty \text{ pour } x - a \text{ suffisamment petit}$$

et

$$\frac{f(x)}{x^\Theta} > C_1 > 0 \text{ pour } x \text{ suffisamment grand,}$$

Θ étant un nombre > -2. Alors l'équation (1) *possède une intégrale unique $y(x)$ satisfaisant aux conditions aux limites*

$$y(a) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x=\infty} y(x) = 0,$$

b étant un nombre positif.

Donc, si $f(x)$ est une fonction à croissance régulière avec l'exposant $\upsilon > -2$ [2]), il existe une intégrale particulière $y_p(x)$ de l'équation (1) passant par un point (a, b) et tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$. D'autre part, ad „Démonstration du théorème 3" au № 3 du T-F. I, j'ai démontré qu'il existe une fonction $p(x)$ satisfaisant aux conditions (5), (6) et (7) et $p(x) \infty y_p(x)$ lorsque $x \to \infty$. Par suite, pour $p(x)$ on peut prendre l'une quel onque des intégrales particulières $y_p(x)$ de sorte que Ω devienne $= 1$. Pour que le théorème 2_2 soit applicable à ce cas, il reste à montrer que $z = o(e^{\alpha\varphi})$ lorsque $\varphi \to \infty$. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une suite de nombres $\varphi_\nu = \varphi(x_\nu)$ tendant vers $+\infty$ lorsque $x_\nu \to \infty$ et un $C_3 > 0$ tel que $z(\varphi_\nu) > C_3 e^{\alpha\varphi_\nu}$. D'autre part, on a, d'après (5), $p(x)e^{\alpha\varphi(x)} > C_2$ (formule (26) du T-F. I). Par suite

$$p(x_\nu)z(\varphi_\nu) > C_3 p(x_\nu)e^{\alpha\varphi_\nu} > C_3 C_2 > 0.$$

Cette inégalité étant en contradiction avec $y = p(x)z(\varphi) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, on conclut que $z = o(e^{\alpha\varphi})$ lorsque $\varphi \to \infty$.

De cette manière on obtient le

Théorème 3_2. *Soit $f(x)$ une fonction à croissance régulière avec $\upsilon > -2$ et $p(x)$ une intégrale particulière de* (1) *tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$ et satisfaisant la condition qu'ils existent quatre nombres $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\xi \geqslant 0$ et $\eta \geqslant 0$ tels que* (9) *soit rempli. Alors, pour chaque intégrale particulière $y(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$, il existe un nombre C tel que*

$$\frac{y(x)}{p(x)} = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu (Ce^{\alpha\varphi})^\nu + O(e^{an\varphi}) \quad \textit{lorsque } x \to \infty,$$

a et les A_ν ayant le même sens qu'au théorème 2_2 et φ étant défini par (4).

Considérons, a titre d'exemple, l'équation

$$y'' = x^\upsilon y^\lambda$$

dont l'intégrale particulière est

$$y_p(x) = \left(\frac{2+\upsilon}{\lambda-1}\,\frac{1+\upsilon+\lambda}{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} x^{\frac{2+\upsilon}{1-\lambda}}.$$

En posant

$$p(x) = y_p(x)$$

$$\alpha = \frac{3+\lambda+2\upsilon}{\lambda-1}, \quad \beta = \frac{2+\upsilon}{\lambda-1}\,\frac{1+\upsilon+\lambda}{\lambda-1}, \quad \xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = \beta^{\frac{2}{1-\lambda}}$$

on obtient

$$\varphi = \lg x \quad \text{et} \quad \chi = \beta z,$$

ce qui donne

$$y(x) = \left(\frac{2+\upsilon}{\lambda-1}\,\frac{1+\upsilon+\lambda}{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} x^{\frac{2+\upsilon}{1-\lambda}} \left\{1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu (Cx^a)^\nu\right\} + O\left(x^{\frac{2+\upsilon}{1-\lambda}+an}\right)$$

lorsque $x \to \infty$, a ayant la même signification qu'au théorème 2_2, c'est-à-dire

$$a = \frac{3+\lambda+2\upsilon - [(3+\lambda+2\upsilon)^2 + 4(\lambda-1)(2+\upsilon)(1+\upsilon+\lambda)]^{\frac{1}{2}}}{2(\lambda-1)}$$

et n étant un entier arbitraire.

Du point de vue physique le cas le plus intéressant est $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\upsilon = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas on aura

$$\lambda(x) = 144x^{-3}\left\{1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \left(Cx^{-\frac{\sqrt{73}-7}{2}}\right)^\nu\right\} + O\left(x^{-3-\frac{\sqrt{73}-7}{2}n}\right)$$

lorsque $x \to \infty$.

2. Démonstration du Théorème 2_2. Posons

$$\varepsilon = 1 - z.$$

D'après le théorème 1_2 on aura $z \to 1$ lorsque $\varphi \to \infty$. Donc

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} - \alpha\varepsilon_\varphi = \beta(1-\varepsilon)(1-(1-\varepsilon)^{\lambda-1}) + O(e^{an\varphi}), \quad \varphi \to \infty$$

ce que l'on peut écrire

$$(13_0) \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} - \alpha\varepsilon_\varphi - (\lambda-1)\beta\varepsilon = \psi(\varepsilon) + O(e^{an\varphi}), \quad \varphi \to \infty$$

où l'on a posé

$$\psi(\varepsilon) = -\beta((1-\varepsilon)^\lambda - (1-\lambda\varepsilon)).$$

A. En premier lieu nous allons montrer que

$$\varepsilon = Ce^{a\varphi} + O(e^{2a\varphi}) \text{ lorsque } \varphi \to \infty.$$

Posons à cet effet

$$\varepsilon = A(\varphi)e^{\alpha\varphi}.$$

Alors l'équation (13_0) devient

$$(13) \qquad A_{\varphi\varphi} - (\alpha - 2a)A_\varphi = e^{-a\varphi}\psi(\varepsilon) + O(e^{a(n-1)\varphi}), \quad \varphi \to \infty$$

puisque a est une racine de l'équation $x^2 - \alpha x - (\lambda - 1)\beta = 0$. La solution générale de l'équation (13) doit satisfaire l'équation

$$(14) \quad \begin{cases} A(\varphi) = d + d'e^{b\varphi} + \dfrac{1}{b}e^{b\varphi}\displaystyle\int_\varphi^\infty e^{-(b+a)\tau}\left\{\psi(\varepsilon) + O(e^{an\tau})\right\}d\tau \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^\varphi e^{-a\tau}\left\{\psi(\varepsilon) + O(e^{an\tau})\right\}d\tau, \text{ [3]} \end{cases}$$

$b = \alpha - 2a$ et 0 étant les racines de l'équation $x^2 - (\alpha - 2a)x = 0$. Comme $\varepsilon \to 0$ lorsque $\varphi \to \infty$ et $\psi(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ on conclut, b étant un nombre positif, que

$$A(\varphi) = d + d'e^{b\varphi} + O(e^{-a\varphi}), \quad \varphi \to \infty$$

c'est-à-dire que

$$A(\varphi)e^{a\varphi} = a'e^{(a+b)\varphi} + O(1), \quad \varphi \to \infty.$$

Donc, pour que $A(\varphi)e^{a\varphi} \to 0$ lorsque $\varphi \to \infty$, il faut que $d' = 0$. D'autre part on aura, d'après l'inégalité de Bernouilli,

$$\psi(\varepsilon) < 0$$

et l'on obtient en vertu de (14) que

$$(15) \quad \begin{cases} A(\varphi) < d + O\left(e^{b\varphi}\displaystyle\int_\varphi^\infty e^{((n-1)a-b)\tau}d\tau\right) + O\left(\displaystyle\int_0^\varphi e^{a(n-1)\tau}d\tau\right) \\ \qquad < O(1), \quad \varphi \to \infty. \end{cases}$$

D'après le théorème 1_2, $A(\varphi)$ est une fonction positive et l'on obtient, en vertu de (15),

$$(16) \qquad \psi(\varepsilon) = O(e^{2a\varphi}), \quad \varphi \to \infty.$$

La solution générale de l'équation (13) doit satisfaire de même l'équation

$$A(\varphi) = C + C' e^{b\varphi} + \frac{1}{b} e^{b\varphi} \int_{\varphi}^{\infty} e^{-(b+a)\tau} \left\{ \psi(\varepsilon) + O\left(e^{an\tau}\right) \right\} d\tau$$

$$- \frac{1}{b} \int_{\varphi}^{\infty} e^{-a\tau} \left\{ \psi(\varepsilon) + O\left(e^{an\tau}\right) \right\} d\tau, \quad (4)$$

d'où il suit, d'après (16), que

$$A(\varphi) = C + C' e^{b\varphi} + O\left(e^{a\varphi}\right), \quad \varphi \to \infty .$$

Donc, pour que $A(\varphi) e^{a\varphi} \to \infty$ lorsque $\varphi \to \infty$ il faut que $C' = 0$ puisque $b + a = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta}}{2} > 0$. Par suite

$$A(\varphi) = C + O(e^{a\varphi})$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon(\varphi) = C e^{a\varphi} + O(e^{2a\varphi}), \quad \varphi \to \infty .$$

B. Nous allons maintenant montrer que, de

$$\varepsilon(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m-1} A_\nu \left(C e^{a\varphi}\right)^\nu + O\left(e^{am\varphi}\right) \quad (17)$$

il s'ensuit

$$\varepsilon(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left(C e^{a\varphi}\right)^\nu + O\left(e^{a(m+1)\varphi}\right)$$

lorsque $\varphi \to \infty$ pour chaque $m \leqslant n - 1$.

Dans ce but posons

$$\varepsilon(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left(C e^{a\varphi}\right)^\nu + A(\varphi) e^{am\varphi} .$$

Alors l'équation (13) devient

$$A_{\varphi\varphi} + (2am - \alpha) A_\varphi + (am(am - \alpha) - (\lambda - 1)\beta) A = \psi(\varepsilon) \quad (18)$$

où nous avons posé

$$\psi(\varepsilon) = -e^{-am\varphi}\sum_{\nu=2}^{m}(a\nu(a\nu-\alpha)-(\lambda-1)\beta)A\nu\left(Ce^{a\varphi}\right)^{\nu}$$

$$-e^{-am\varphi}\beta((1-\varepsilon)^{\lambda}-(1-\lambda\varepsilon))+\delta(\varphi),$$

$\delta(\varphi)$ étant une fonction satisfaisant l'inégalité

$$\delta(\varphi) = O(e^{(n-m)\varphi}), \quad \varphi\to\infty .$$

Posons pour abréger

$$R = e^{-am\varphi}\sum_{\nu=2}^{m}(a\nu(a\nu-\alpha)-(\lambda-1)\beta)A\nu\left(Ce^{a\varphi}\right)^{\nu}$$

et

$$\varepsilon = \tau + A(\varphi)e^{am\varphi}$$

c'est-à-dire

$$\tau = \sum_{\nu=1}^{m}A\nu\left(Ce^{a\varphi}\right)^{\nu}.$$

Donc, en posant en outre

$$\beta e^{-am\varphi}((1-\varepsilon)^{\lambda}-(1-\lambda\varepsilon)) = \beta e^{-am\varphi}\left(\sum_{\mu=2}^{m}+\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\right)\binom{\lambda}{\mu}(-1)^{\mu}\varepsilon^{\mu}$$

$$= J_1 + J_2$$

et

$$J_1 = \beta e^{-am\varphi}\sum_{\mu=2}^{m}\binom{\lambda}{\mu}(-1)^{\mu}\tau^{\mu} + \beta e^{-am\varphi}\sum_{\mu=2}^{m}\binom{\lambda}{\mu}(-1)^{\mu}$$

$$\times\sum_{k=1}^{\mu}\binom{\mu}{k}\tau^{\mu-k}A^{k}e^{amk\varphi} = J_1^{*}+J_1^{**},$$

on obtient définitivement

$$\psi(\varepsilon) = -(R+J_1^{*})-J_1^{**}-J_2+\delta(\varphi). \tag{19}$$

a) On aura

$$e^{am\varphi} J_1^* = \beta \sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \left(\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left(Ce^{a\varphi} \right)^\nu \right)^\mu$$

$$= \beta \sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=\mu} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots$$

$$\cdots A_m^{k_m} \left(Ce^{a\varphi} \right)^{k_1+2k_2+\cdots+mk_m}$$

$$= \beta \sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\nu=2}^{N} \left(Ce^{a\varphi} \right)^\nu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+mk_m=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots A_m^{k_m},$$

où $M = \operatorname{Max}\{k_1+2k_2+\cdots+mk_m\}$ sous la condition $2 \leqslant k_1+k_2+\cdots+k_m \leqslant m$. Comme $N \geqslant m+1$ on aura

$$e^{am\varphi} J_1^* = \beta \sum_{\nu=2}^{m} \left(Ce^{a\varphi} \right)^\nu \sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+mk_m=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots$$

$$\cdots A_m^{k_m} + O\left(e^{a(m+1)\varphi} \right) \varphi \to \infty .$$

Alors

$$(20) \quad \begin{cases} (R+J_1^*)\, e^{am\varphi} \\ = \sum_{\nu=2}^{m} \left(Ce^{a\varphi} \right)^\nu \Bigg[\left(a\nu(a\nu-\alpha) - (\lambda-1)\beta \right) A_\nu + \beta \sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \\ \qquad \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+mk_m=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots A_m^{k_m} \Bigg] + O\left(e^{a(m+1)\varphi} \right), \varphi \to \infty . \end{cases}$$

Comme

$$\sum_{\mu=2}^{m} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+mk_m=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_s!} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots A_m^{k_m}$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\nu} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_{\nu-1}=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+(\nu-1)k_{\nu-1}=\nu}} \frac{\mu!}{k_1!\,k_2!\cdots k_{\nu-1}} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots A_{\nu-1}^{k_{\nu-1}},$$

on voit, d'après (12), que les termes entre crochets dans (20) sont $=0$. Donc

$$R+J_1^* = O(e^{a\varphi}), \quad \varphi\to\infty .$$

b) En tenant compte des $\tau = O(e^{a\varphi})$ et $A = O(1)$ lorsque $\varphi\to\infty$ (ces inégalités étant des conséquences de la définition de la fonction τ et de l'inégalité (17)), on aura

$$|J_1^{**}| = O\left(e^{-am\varphi}\sum_{\mu=2}^{m}\left|\binom{\lambda}{\mu}\right|\sum_{k=1}^{\mu}\binom{\mu}{k}e^{a(\mu-k+mk)\varphi}\right)$$

$$= O\left(e^{a\varphi}\right), \quad \varphi\to\infty$$

puisque $\mu - k + mk - m \geqslant 1$ pour $\mu \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$.

c) Comme $o < \varepsilon < M e^{a\varphi}$, on aura

$$|J_2| < e^{-am\varphi}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\left|\binom{\lambda}{\mu}\right|\left(Me^{a\varphi}\right)^{\mu} = O\left(e^{a\varphi}\right), \quad \varphi\to\infty .$$

d) D'après (19), a), b) et c), on aura

$$\psi(\varepsilon) = O(e^{a\varphi}), \quad \varphi\to\infty . \tag{21}$$

e) Soit

$$\alpha_m = \alpha - 2am \quad \text{et} \quad \beta_m = -am(am-\alpha)+(\lambda-1)\beta$$

et γ_1 et γ_2 les racines de l'équation $x^2 - \alpha_m x - \beta_m = 0$, c'est-à-dire

$$\gamma_{1,2} = \frac{\alpha_m \pm \sqrt{\alpha_m^2 + 4\beta_m}}{2}.$$

Alors la solution générale de l'équation (18) doit satisfaire l'équation

$$A(\varphi) = C_1 e^{\gamma_1\varphi} + C_2 e^{\gamma_2\varphi} + \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\left[e^{\gamma_1\varphi}\int_{\varphi}^{\infty} e^{-\gamma_1 t}\psi(\varepsilon)\,dt - e^{\gamma_2\varphi}\int_{\varphi}^{\infty} e^{-\gamma_2 t}\psi(\varepsilon)\,dt\right]^{5)}.$$

Comme

$$(22)\quad \begin{cases} 2(\gamma_1 - a) > 2(\gamma_2 - a) = \alpha_m - \alpha - \sqrt{\alpha_m^2 + 4\beta_m} + \sqrt{\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta} \\ \qquad = -2am - \dfrac{\alpha_m^2 + 4\beta_m - \alpha^2 - 4(\lambda - 1)\beta}{\sqrt{\alpha_m^2 + 4\beta_m} + \sqrt{\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta}} \\ \qquad = -2am > 0, \end{cases}$$

on aura, d'après (21),

$$e^{\gamma_{1,2}\varphi} \int_{\varphi}^{\infty} e^{-\gamma_{1,2}t} \psi(\varepsilon)\, dt = O\left(e^{a\varphi}\right), \quad \varphi \to \infty .$$

Donc

$$A(\varphi) = C_1 e^{\gamma_1 \varphi} + C_2 e^{\gamma_2 \varphi} + O(e^{a\varphi}), \quad \varphi \to \infty .$$

D'après (22), on a $\gamma_1 > \gamma_2 = a(1 - m) > 0$ pour $m > 1$. Donc $C_1 = C_2 = 0$ puisque $A(\varphi) = O(1)$ lorsque $\varphi \to \infty$. Par suite

$$A(\varphi) = O(e^{a\varphi}), \quad \varphi \to \infty$$

ce qui démontre le théorème 2_2.

Présenté le 16-IV-1947.

---

[1]) Voir: V. G. Avakumović „Sur l'équation différentielle du Thomas—Fermi", Publ. Math. de l'Inst. Math. de l'Acad. de Sc. Tome I (1947) p. 101—113. Pour abréger, nous désignerons cette note par T-F.I.

[2]) Quant au rapport entre les fonctions à croissance régulière (au sens de M. J. Karamata) et l'équation différentielle de Thomas—Fermi, voir T-F.I.

[3]) Voir: E. Kamke „Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen". Tome I (1942) p. 117.

[4]) Loc. cit. 3)

[5]) Loc. cit. 3)

О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА THOMAS - FERMI-ЕВА ТИПА

(ДРУГИ ДЕО)

Од
ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

У првом делу овога рада[1]) аутор је показао да се диференцијална једначина

$$y'' = f(x)\, y^{\lambda}, \tag{1}$$

где је λ неки број већи од 1, а $f(x)$ функција која регуларно расте (види loc. cit.[1])) са експонентом $\upsilon > -2$, може сменом

$$y = p(x)\, z(\varphi) \tag{2}$$

свести на диференцијалну једначину облика

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} = \chi\,[\Omega z^{\lambda-1} - 1].$$

При томе је α неки позитиван број,

$$\varphi(x) = \zeta + \int_0^x \frac{\dfrac{1}{p^2(\tau)}}{\eta + \alpha \displaystyle\int_0^{\tau} \frac{dt}{p^2(t)}}\, d\tau,$$

$$\chi = \frac{p''\, z}{p\, \varphi'^2}$$

и

$$\Omega = \frac{f p^{\lambda}}{p''}.$$

На овај начин се став (3) првог рада може овако формулисати:

Став 1_2. Ако је

$$\chi = \beta z \quad \textit{и} \quad \Omega \to 1 \quad \textit{кад } x \to \infty \tag{3}$$

(где је β неки позитиван број), тада

$$1 > z \to 1 \quad \textit{кад} \quad \varphi \to \infty$$

кад год знамо да је

$$z = o(e^{\alpha\varphi}) \quad \text{кад} \quad \varphi \to \infty. \tag{4}$$

Услови (3) и (4) су задовољени ако је $f(x)$ функција која регуларно расте са експонентом $\upsilon > -2$, а $p(x)$ или неки партикуларни интеграл диференцијалне једначине (1) (који тежи ка нули кад x тежи ка бесконачности) или нека функција која се асимптотски понаша као партикуларни интеграл.

У овом, другом делу, аутор даје асимптотски развитак интеграла диференцијалне једначине (2). При томе, природно, функције χ и Ω морају задовољавати оштрије услове но што су услови (3) и (4). Тако аутор добија

Став 2_2. *Нека је*

$$a = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta}}{2},$$

$$\chi = \beta z + O(e^{an\varphi}) \quad \textit{кад} \quad \varphi \to \infty$$

и

$$\Omega = 1 + O(e^{an\varphi}) \quad \textit{кад} \quad \varphi \to \infty .$$

Даље, нека z задовољава услов (4). *Тада за свако овакво z постоји број C и низ бројева $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (са $A_1 = 1$) таквих да је*

$$z = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\upsilon (C e^{a\varphi})^\nu + O(e^{an\varphi}) \quad \textit{кад} \quad \varphi \to \infty .$$

Бројеви A_ν дефинисани су рекурентним обрасцем

$$(a\nu(a\nu - \alpha) - (\lambda - 1)\beta A_\nu + \beta \sum_{\mu=2}^{\nu} \binom{\lambda}{\mu} (-1)^\mu \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_{\nu-1}=\mu \\ k_1+2k_2+\cdots+(\nu-1)k_{\nu-1}=\nu}} k_1!\,k_2!\ldots k_{\nu-1}!$$
$$A_1^{k_1} A_2^{k_2} \ldots A_{\nu-1}^{k_{\nu-1}} = 0.$$

У случају диференцијалне једначине

$$y'' = x^\upsilon y^\lambda,$$

чији је један партикуларни интеграл

$$p(x) = \left(\frac{2+\upsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{1+\upsilon+\lambda}{\lambda - 1}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}} x^{\frac{2+\upsilon}{1-\lambda}},$$

добија се

$$y(x) = p(x)\left\{1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu (C x^a)^\nu\right\} + O\left(x^{\frac{2+\nu}{1-\lambda}+an}\right), \quad x \to \infty$$

при чему је

$$\frac{3+\lambda+2\upsilon - ((3+\lambda+2\upsilon)^2 + 4(\lambda-1)(2+\upsilon)(1+\upsilon+\lambda))^{\frac{1}{2}}}{2(\lambda-1)}.$$