SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE PFAFF DANS LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

Par

TATOMIR ANGELITCH

I

Soit donné un Pfaffian

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i, \tag{1}$$

où les X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions de variables indépedantes x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Le Pfaffian (1) peut être mis sous forme du produit scalaire

$$\Phi = \mathfrak{X} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{2}$$

lorsqu'on considère les fonctions X_i comme les coordonnées d'une fonction vectorielle $\mathfrak{X}$ dans l'espace à n dimensions, que A. Bilimovitch (1) a appelé *le vecteur de Pfaff*, toutes les différentielles dx_i, cependant, comme les coordonnées de la différentielle du rayon vecteur $\mathfrak{r}$ d'un point dans le même espace.

Cette expression nous montre que le Pfaffian (1) peut être considéré comme le travail élémentaire ou le courant élémentaire du vecteur de Pfaff $\mathfrak{X}$ sur le déplacement $d\mathfrak{r}$ dans l'espace à n dimensions.

On peut, d'autre part, dans l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions, traiter les $3k$ de n fonctions X_i comme les coordonnées des vecteurs $\mathfrak{R}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$ et de même les $3k$ de n différentielles dx_i comme les coordonnées des différen-

tielles des rayons vecteurs $\mathfrak{r}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$. Alors, dans le cas $n = 3k + k_1$, le Pfaffian (1) peut être mis sous la forme suivante

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{R}_\lambda \cdot d\mathfrak{r}_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k_1} Q_\mu \, dq_\mu, \tag{3}$$

où les k_1 de fonctions X_i sont des fonctions scalaires Q_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, k_1)$ et dq_μ des différentielles correspondant aux k_1 de variables indépendantes x_i.

Considérons en connexion avec le Pfaffian (1) les équations connues de Pfaff de première espèce

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, dx_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

où l'on a posé

$$a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

D'après A. Bilimovitch (1), ces équations de Pfaff peuvent être transformées de la façon suivante. Prenons, pour fixer les idées, la première des équations (4). On obtient, alors, en s'appuyant sur l'équation (5) l'expression

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} \, dx_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \, dx_j = 0.$$

Puisque les x_i sont des variables indépendantes, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^{n} X_j \, dx_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \, dx_j = 0,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi - \nabla X_1 \cdot d\mathfrak{x} = 0,$$

où l'on a introduit

$$\nabla X_1 = \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \right\},$$

comme le gradient de fonction scalaire X_1 dans l'espace à n dimensions.

Ainsi, au système des équations de Pfaff (4) correspond le système d'équations

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi - \nabla X_i \cdot d\mathfrak{x} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

que l'on peut exprimer à l'aide d'une seule équation vectorielle de la forme

$$\nabla\Phi - (\nabla\mathfrak{X}) \cdot d\mathfrak{x} = 0, \tag{7}$$

$\nabla\mathfrak{X}$ désignant sous forme de produit dyadique l'affineur local à n dimensions

$$\nabla\mathfrak{X} = \left\{ \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

correspondant au champ vectoriel défini par le vecteur de Pfaff $\mathfrak{X}$ et que nous appellerons *l'affineur local de Pfaff.* on a définitivement

Enfin, puisque $\nabla\mathfrak{X} \cdot d\mathfrak{x} = d\mathfrak{X}$,

$$\nabla\Phi - d\mathfrak{X} = 0. \tag{9}$$

Cependant, si le Pfaffian est donné sous forme (3), à chacun des vecteurs $\mathfrak{r}_\lambda$ correspond une équation vectorielle

$$\nabla_\lambda\Phi - (\nabla\mathfrak{R}_\lambda) \cdot d\mathfrak{r}_\lambda = 0, \tag{10}$$

ou

$$\nabla_\lambda\Phi - d\mathfrak{R}_\lambda = 0, \tag{11}$$

$\nabla_\lambda\Phi$ désignant le gradient partiel du Pfaffian (3) par rapport au vecteur $\mathfrak{r}_\lambda$ et $\nabla\mathfrak{R}_\lambda$ désignant l'affineur local de Pfaff, correspondant à la fonction vectorielle $\mathfrak{R}_\lambda$ dans l'espace à trois dimensions. D'autre part, a chacune des grandeurs scalaires q_μ correspond une équation scalaire

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu}\Phi - dQ_\mu = 0. \tag{12}$$

II

De seul fait qu'il est possible de considérer le travail élémentaire des forces ainsi que le courant élémentaire du vecteur vitesse de fluide comme des Pfaffians, on peut juger de l'importance du Pfaffian pour les problèmes de Mécanique.

Sur le rôle important des équations de Pfaff pour la Dynamique en général c'est Whittaker (2) le premier qui a attiré l'attention. L'application des équations de Pfaff, cependant, a été développée dans tous ses détails par A. Bilimovitch (1). Il a fondé sur cette application une méthode toute nouvelle et donné un nouveau principe de Mécanique — le principe de Pfaff.

Les avantages qui mettent en évidence la méthode de Pfaff résident dans les belles propriétés qui caractérisent un Pfaffian et que nous supposons connues (voir p. ex. Forsyth (3)). Nous tenons à souligner ici deux de ces propriétés, qui jouent un rôle prépondérant dans les problémes de Mécanique. D'abord, étant donné que les Pfaffians transformés donnent naissance aux équations de Pfaff équivalentes, il devient inutile de faire directement les transformations, souvent tres laborieuses, des équations de Pfaff, il suffit de transformer le Pfaffian correspondant. Ensuite, la méthode de Pfaff, par la liaison entre la transformation d'un Pfaffian et l'intégration des équations de Pfaff correspondantes, est aussi d'une importance particulière.

Bref, la méthode de Pfaff possède toutes les qualités d'une méthode avantageuse pour le traitement des divers problèmes de la Dynamique.

III

Considérons, d'abord, une fonction vectorielle

$$\mathfrak{v} = \{ v_i \}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

qui définit le champ des vitesses du fluide, et le Pfaffian

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} v_i \, dx_i = \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{14}$$

définissant dans ce champ le courant élémentaire du vecteur vitesse. Dans ce cas comme on sait (voir p. ex. Lohr (4)), l'affineur local de Pfaff, donné par la matrice

$$\nabla \mathfrak{v} = \left\{ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{15}$$

définit la déformation infinitésimale d'un milieu continu en un point déterminé du champ. Cet affineur, cependant, peut tou-

jours être décomposé et d'une seule manière en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique, c'est à dire écrit sous la forme suivante

$$\nabla \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} + \overline{\nabla \mathfrak{v}}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} - \overline{\nabla \mathfrak{v}}), \tag{16}$$

$\overline{\nabla \mathfrak{v}}$ désignant l'affineur conjugué de l'affineur $\nabla \mathfrak{v}$. Il est donné par la matrice

$$\overline{\nabla \mathfrak{v}} = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{17}$$

La déformation pure est définie par la partie symétrique de l'affineur local de Pfaff (15) de sorte que la condition pour que la déformation dans la direction donnée par l'élément $d\mathfrak{r}$ soit une déformation pure peut être exprimé par la relation

$$(\nabla \mathfrak{v} - \overline{\nabla \mathfrak{v}}) \cdot d\mathfrak{r} = 0. \tag{18}$$

De cette équation, en tenant compte de la règle de multiplication scalaire de l'affineur par un vecteur, nous aurons

$$\nabla (\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}) - (d\mathfrak{r} \cdot \nabla) \mathfrak{v} = 0,$$

ou enfin

$$\nabla \Phi - d\mathfrak{v} = 0, \tag{19}$$

équation qui réunie en une seule toutes les équations de Pfaff correspondantes au Pfaffian (14).

Ainsi, lorsque le Pfaffian représente le courant élémentaire, les équations de Pfaff correspondantes sont les conditions pour que la déformation d'un milieu continu fluide dans une direction donnée soit pure.

IV

La plus importante des applications de la méthode de Pfaff consiste sans doute en la possibilité d'en déduire les équations du mouvement de la Dynamique. L'essentiel dans ce procédé est la formation de l'élément d'action au sens de Hamilton sous forme d'un Pfaffian pour le problème donné, duquel on obtient les équations du mouvement cherchées sous forme des équations de Pfaff (Bilimovitch 1).

Il est donc nécessaire, afin de pouvoir profiter de la méthode de Pfaff pour la déduction de l'équation du mouvement de la Dynamique des fluides, de former cet élément d'action, c'est à dire

$$(T+U)\,dt, \tag{20}$$

ou

$$(2T-H)\,dt, \tag{21}$$

où l'on a posé

$$H=T-U, \tag{22}$$

sous forme d'un Pfaffian. $2T$ est la force vive de la portion du fluide considérée, rapportée à l'unité de masse et U le travail de toutes les forces extérieures (agissant sur les éléments de volume et sur les éléments superficiels), rapportées à l'unité de volume et de l'aire, calculé d'une position initiale quelconque du système jusqu'à une position finale complétement déterminée par le rayon vecteur $\mathfrak{r}$.

Dans ce but, considérons une portion du fluide δV et supposons le fluide *barotrope* au sens de Bjerknes (5), c'est-à-dire

$$\rho=f(p), \tag{23}$$

où ρ est la densité et p la pression.

La force vive de la masse considérée du fluide est évidemment donnée par l'expression

$$\int_{\delta V} \rho\,(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v})\,dV, \tag{24}$$

$\mathfrak{v}$ étant la vitesse d'un élément du fluide. Nous aurons de là pour l'unité de volume

$$\lim_{\delta V\to 0}\frac{1}{\delta V}\int_{\delta V}\rho\,(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v})\,dV=\rho\,(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v})$$

et enfin pour l'unité de masse

$$2T=\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}. \tag{25}$$

La résultante des forces extérieures rapportées à l'unité de volume calculée pour l'unité de masse soit $\mathfrak{F}$.

La composante normale de l'effort — la pression $p\mathfrak{n}$ — $\mathfrak{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface de la portion de fluide considérée, rapportée à l'unité de l'aire σ qui limite le volume δV du fluide, nous donne pour l'aire totale

$$-\int_{\sigma} p\, d\mathfrak{s},$$

où $d\mathfrak{s}$ est l'élément orienté de l'aire σ. Dès lors, en appliquant le théorème de Gauss

$$-\int_{\sigma} p\, d\mathfrak{s} = -\int_{\delta V} \operatorname{grad} p\, dV$$

et pour l'unité de masse du volume considéré, on aura finalement

$$-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P, \tag{26}$$

où l'on a posé

$$P(p) = -\int \frac{dp}{\rho} = -\int \frac{dp}{f(p)}. \tag{27}$$

Les forces tangentielles — la viscosité — dépendent des déplacements relatifs d'éléments du fluide les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire de la déformation pure du fluide. Cette déformation peut à son tour être décomposée en deux composantes: l'une correspondant au changement de forme, le volume de la portion de fluide considérée restant conservé, l'autre qui conserve la forme et ne change que le volume. A ces deux composantes de la déformation pure correspondent deux coefficients différents dynamiques de viscosité μ et λ.

Il est donc nécessaire que le tenseur symétrique

$$T = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} + \overline{\nabla \mathfrak{v}}),$$

qui définit la déformation pure du milieu continu fluide, soit écrit sous forme de somme d'un déviateur au sens de Schouten et d'un tenseur unitaire multiplié par une grandeur scalaire. Donc

$$(28)\quad T = \mathfrak{x} + \frac{1}{3} I \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\} - \frac{2}{3} I \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{3} I \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

$\mathfrak{x}$ étant le déviateur donné par l'expression

$$(29)\qquad \mathfrak{x} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathfrak{v} + \overline{\nabla \mathfrak{v}} - \frac{2}{3} I \operatorname{div} \mathfrak{v}\right),$$

I le tenseur unitaire de troisième ordre et $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ la première invariante scalaire du tenseur symétrique.

Il est permis de considérer, avec une précision suffisante la viscosité des fluides comme une fonction vectorielle linéaire de l'élément superficiel

$$(30)\qquad \mathfrak{t} = (2\mu \mathfrak{x} + \lambda I \operatorname{div} \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{s},$$

$\mathfrak{t}$ étant la force de viscosité rapportée à l'élément $d\mathfrak{s}$ de l'aire qui limite la portion du fluide considérée. Nous aurons donc pour l'aire totale σ

$$\int_{\sigma} (2\mu \mathfrak{x} + \lambda I \operatorname{div} \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{s}$$

et, si on suppose λ et μ constants, d'après le théorème de Gauss,

$$2\mu \int_{\delta V} (\nabla \mathfrak{x}) \cdot dV + \lambda \int_{\delta V} (\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV.$$

Donc pour l'unité de volume

$$2\mu (\nabla \cdot \mathfrak{x}) + \lambda (\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

et enfin pour l'unité de masse

$$(31)\qquad \mathfrak{T} = 2\frac{\mu}{\rho} (\nabla \cdot \mathfrak{x}) + \frac{\mu}{\rho} (\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

$\nabla \cdot \mathfrak{x}$ étant la divergence vectorielle du déviateur. Ainsi, la force de viscosité $\mathfrak{T}$, rapportée à l'unité de masse, devient

$$\mathfrak{T} = \nu \Delta \mathfrak{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\lambda}{\rho}\right) \text{grad div } \mathfrak{v}, \tag{32}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ étant le coefficient cinématique de viscosité.

Cette expression pour la force de viscosité se réduit pour un liquide incompressible (div $\mathfrak{v} = 0$) à

$$\mathfrak{T} = \nu \Delta \mathfrak{v}. \tag{33}$$

D'autre part, puisque il est toujours

$$\Delta \mathfrak{v} = \text{grad div } \mathfrak{v} - \text{rot rot } \mathfrak{v},$$

nous aurons pour le mouvement irrotationnel du fluide compressible

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{4}{3}\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right) \text{grad div } \mathfrak{v}. \tag{34}$$

D'après cela le travail de toutes les forces extérieures est déterminé par

$$U = Q + P + R, \tag{35}$$

où l'on a posé

$$Q = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}, \quad P = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \text{grad } P \cdot d\mathfrak{r}, \quad R = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{T} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{36}$$

$\mathfrak{r}_0$ et $\mathfrak{r}$ désignant les rayons vecteurs des positions initiale et finale de l'élément du fluide considéré.

Dans ce cas la valeur de H est donnée par l'expression

$$H = T - U = \frac{1}{2}(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) - Q - P - R, \tag{37}$$

H étant la fonction du point et du temps.

Ainsi l'élément d'action au sens de Hamilton rapporté à l'unité de masse devient sous forme d'un Pfaffian

$$\Phi = \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} - H\, dt, \tag{38}$$

puisque il est, en tenant compte de l'équation (25),

$$2T\, dt = \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}.$$

Formons maintenant, d'après les formules (11) et (12), les équations de Pfaff pour le Pfaffian précédent. L'équation vectorielle de Pfaff, correspondant au rayon vecteur $\mathfrak{r}$, s'écrit alors

$$d\mathfrak{v} = \nabla_{\mathfrak{r}}\,\Phi = \nabla_{\mathfrak{r}}\,(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} - H\,dt) = -\,\nabla_{\mathfrak{r}}\,H\,dt,$$

ou

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \nabla_{\mathfrak{r}}Q + \nabla_{\mathfrak{r}}P + \nabla_{\mathfrak{r}}R, \tag{39}$$

d'où l'on tire enfin, en vertu de (26) et (32), *l'équation générale de la Dynamique des fluides* sous la forme

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\mathfrak{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}. \tag{40}$$

En effectuant les opérations de gradient partiel dans (39), il est bon de se rappeler du fait suivant. L'évaluation du gradient partiel pour le rayon vecteur $\mathfrak{r}$, définissant la position finale d'un élément du fluide considéré, ne dépend que de la position finale. Quant à la position initiale, elle reste arbitraire dans ce problème, parce que malgré le changement du Pfaffian correspondant, provoqué par le changement de la position initiale, les équations de Pfaff qui en dérivent restent invariables.

De l'équation générale de la Dynamique des fluides (40) on obtient, pour le liquide incompressible, les équations connues de Navier-Stokes sous forme d'une équation vectorielle,

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\nabla\,\mathfrak{v}, \tag{41}$$

où l'on a posé

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{v}.$$

Enfin, dans le cas du mouvement irrotationnel d'un fluide compressible, nous obtenons de l'équation générale, en vertu de (34)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \left(\frac{4}{3}\,\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}. \tag{42}$$

Donc, si l'élément d'action au sens de Hamilton pour un élément du fluide est donné sous forme d'un Pfaffian, les équations de Pfaff correspondantes seront les équations du mouvement des fluides.

Communiqué le 14-XII-1947

ПРИМЕНА ПФАФОВЕ МЕТОДЕ У ХИДРОДИНАМИЦИ

Од

ТАТОМИРА П. АНЂЕЛИЋА

Садржај: 1. Претстављање Пфафових једначина у векторском облику. 2. Осврт на развој и улогу Пфафове методе. 3. Извођење услова за чисту деформацију непрекидне течне средине у облику Пфафових једначина. 4. Извођење опште једначине хидродинамике у векторском облику као Пфафове једначине.

У овом раду се посматра, прво елементарни ток вектора брзине

$$\mathfrak{v} = \{v_i\} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

у облику Пфафове форме, тј.

$$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{3} v_i \, dx_i, \tag{1}$$

где је $d\mathfrak{r}$ управљени елемент трајекторије и показује да Пфафове једначине које одговарају изразу (1), одн.

$$\nabla (\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}) - d\mathfrak{v} = 0, \tag{2}$$

у ствари претстављају услове да деформација непрекидне течне средине у правцу одређеном управљеним елементом $d\mathfrak{r}$ буде чиста деформација.

Затим се изводи општа једначина хидродинамике у векторском облику помоћу Пфафове методе на овај начин. У смислу у коме је Билимовић разрадио примену Пфафове методе, („Глас Српске Академије наука“, CLXXXIX — 1946), образован је елемент акције у Хамилтонову смислу за течну честицу одређен на јединицу масе у облику Пфафове форме

$$\Phi = \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} - H dt, \tag{3}$$

где је $\mathfrak{v}$ брзина течне честице, а функција H одређена изразом

$$H = \frac{1}{2} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) - Q - P - R. \tag{4}$$

Функције Q, P и R одређене су обрасцима

$$Q = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}; \quad P = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \cdot d\mathfrak{r}; \quad R = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{T} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{5}$$

где су $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{r}$ вектори почетног и крајњег положаја уочене течне честице, $\mathfrak{F}$ претставља резултанту запреминских сила одређену на јединицу масе, $\rho = f(p)$ густину течности, p притисак у течности, и најзад $\mathfrak{T}$ силу вискозности одређену на јединицу масе.

Формирањем Пфафове векторске једначине по вектору положаја $\mathfrak{r}$ за Пфафову форму (3) добија се *општа једначина кретања течности* у облику

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathfrak{r} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\lambda}{\rho}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{6}$$

Из ове једначине лако се добивају једначине кретања хидродинамике за разне специјалне случајеве, на пр. за вискозну нестишљиву течност — Навије-Стоксове, за идеалну течност итд.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Bilimović — Pfafov opšti princip mehanike. Glas Srpske akademije nauka CLXXXIX — 1946.

(A. Bilimovitch — Le principe général de mécanique de Pfaff. Bull. de l'Acad. Serbe des Sciences)

2. E. T. Whittaker — Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Berlin 1924

3. A. R. Forsyth — Theory of Differential Equations, part 1 — Exact Equations and Pfaff's problem. Cambridge — 1890.

4. E. Lohr — Vektor-und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. Berlin 1939.

5. P. Appell — Traité de mécanique rationelle, tome III. Paris 1928