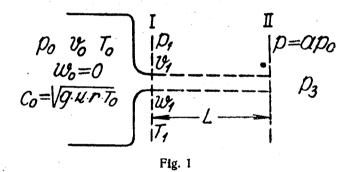
## CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT DES GAZ

## Par D. MILOSAVLIÉVITCH

Considérons l'écoulement d'un gaz à travers un ajutage bien arrondi et se retrécissant progressivement vers la sortie (fig. 1). Soient  $p_0$  la pression en  $kg/m^2$  et  $T_0$  la température



absolue dans l'espace d'où s'écoule le gaz. On sait¹) que la pression  $p_m$  à la sortie de l'ajutage peut descendre au plus jusqu'à la valeur

$$p_m = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot p_0$$

(hypothèse de Saint-Venant et de Wantzel $\cdot$ ). La grandeur k représente le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et le volume constant; pour l'air et les gaz diatomique on a

(2) 
$$k = 1,40$$
 et  $p_m = 5,530 p_0$ .

Nous nous proposons d'étudier le problème de l'écoulement du gaz dans le cas où l'ajutage se prolonge par un tuyau cylindrique de longueur arbitraire L (fig. 1); de façon plus précise, nous allons chercher les valeurs que peuvent prendre la pression  $p_1$  au bout de l'ajutage et au commencement du tuyau (section I) et la pression  $p_2$  au bout du tuyau cylindrique (section II), en supposant que la pression extérieure est bien plus petite que la pression  $p_m$  (on a, par exemple,  $p_0 = 10$  ata,  $p_m = 5,3$  ata et  $p_3 = -1$  ata).

Nous pouvons supposer que le gaz effectue jusqu'à la section I une détente abiabatique, puisqu'on peut négliger les frottements intérieurs à cause de la petitesse du chemin parcouru. Dans ce cas la vitesse  $w_1$  et la température absolue  $T_1$  pour la section I sont données par les expressions [1].

(3) 
$$w_1 = \sqrt{2g\frac{k}{k-1}p_0v_0\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = C_0\sqrt{\frac{2^*}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$
(4)  $T_1 = T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$ 

où  $C_0 = \sqrt{gkrT}$  représente la vitesse du son dans le gaz à la température absolue  $T_0$  (r est la constante du gaz). Soit  $C_1$  la vitesse du son dans le gaz qui se trouve dans la section I: en tenant compte de (4) on a

(5) 
$$C_1^2 = gkrT_1 = gkrT_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = C_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Pendant l'écoulement à travers le tuyau cylindrique, le gaz effectue la transformation caractérisée par la relation [3]

(6) 
$$v(p+bv) = v_1(p_1+bv_1) = \text{const.},$$

b représentant la grandeur constante

(7) 
$$b = \frac{k-1}{2gk} \cdot \frac{w_1^2}{v_1^2}.$$

Les frottements intérieurs ne sont plus ici négligeables. La transformation est irréversible et l'entropie ne peut qu'augmenter. C'est pour cette raison que la transformation s'effectuera jusqu'à un point  $(p_{gr}, v_{rg})$  du diagramme p, v tel que la tangente en ce point pour la coubre (6) coïncide avec la tangente à la coubre adiabatique passant par le même point. Le point  $(p_{gr}, v_{gr})$  doit représenter l'état du gaz à la sortie du tuyau (section II,  $p_{gr} = p_2$ ,) et les pressions  $p_1$  et  $p_2$  dans les sections I et II seront liées par [3]

(8) 
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_1}{c_1} \sqrt{\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{w_1}{c_1}\right)^2}.$$

Si nous posons

$$(9) p_2 = ap_0,$$

où a représente une quantité inconnue, et si nous remplaçons  $w_1$  et  $C_1$  par les valeurs de (3) et (5), l'equation (8) deviendra

$$\frac{ap_{0}}{p_{1}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} \cdot \sqrt{\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]},$$

$$a^{2} \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{2} = \frac{4}{k^{2}-1} \left[ \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

$$\frac{k^{2}-1}{4} \cdot a^{2} \left( \frac{p_{1}}{p_{0}} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} = \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1$$

L'équation (10) peut être résolue par rapport à  $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$  graphiquement en traçant les

$$y = \frac{k^2 - 1}{4} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \text{ et } z = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1.$$

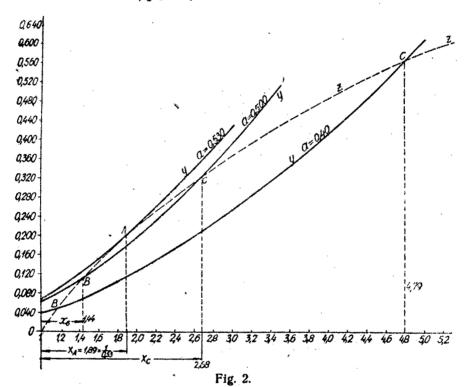
La figure 2 montre que les coubres y et z ne se coupent pas du tout pour a>0.530, d'où la conclusion, d'après (9), que la pression  $p_2$  ne peut jamais atteindre la valeur  $0.530p_0$ . Pour a=0.530 les courbes y et z sont tangentes au point A dont l'abscisse est

$$x_A = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)_A = 1,89 = \frac{1}{0,530},$$
 d'où  $p_1 = 0,530p_0$ .

On a donc  $p_1 - p_2$  pour a = 0.530, ce qui correspond' à une longueur infiniment petite du tuyau.

Enfin, pour a < 0.530 les courbes y et z se coupent en deux points B et C (fig. 2) d'abscisses

$$x_B = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)_B < \frac{1}{0.530}$$
, d'où  $(p_1)_B > 0.530 p_0$  et  $x_C = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)_C > \frac{1}{0.530}$ , d'où  $(p_1)_C < 0.530 p_0$ .



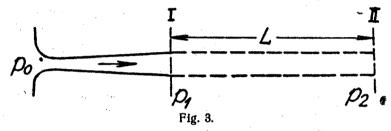
On a, par exemple,

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)_B = 1,44$$
 ou  $(p_1)_B = 0,69 p_0$  et  $\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = 2,68$   
ou  $(p_1)_C = 0,37 p_0$  pour  $a = 0,500$ ; pour  $a = 0,400$  on  $a\left(\frac{p_0}{p_1}\right)_B = 1,17$  ou  $(p_1)_B = 0,85 p_0$  et  $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)_C = 4,79$  ou  $(p_1)_C = 0,21 p_0$ .

Le point C correspond au cas de l'écoulemnt du gaz d'après la figure 3.

En résumé, nous arrivons aux conclusions suivantes: Cas de la fig. 1

 $p_2 < 0.530 p_0$  et  $p_1 > 0.530 p_0$  (point B sur la fig. 2)



Cas de la fig. 3

 $p_2 < 0.530 p_0$  et  $p_1 < 0.530 p_0$  ainsi que  $p_1 < p_2$  (point C sur la fig 2).

Dans le cas de la fig. 1 les pressions  $p_1$  et  $p_2$  s'écartent d'autant plus de la valeur  $0.530 p_0$  que la lonqueur L du tuyau cylindrique est plus grande; quand L tend vers 0,  $p_1$  et  $p_2$  tendent vers la valeur commune  $0.530 p_0$ .

## ПРИЛОГ ИЗУЧАВАЊУ ПРОТИЦАЊА СТВАРНИХ ГАСОВА

## Од Д. МИЛОСАВЉЕВИЋА

Посматрајмо истицање гаса из суда, где владају притисак  $p_0 \frac{kg}{m^2}$  и апсолутна температура  $T_0$ , кроз добро заокругљен отвор (сл. 1). Познато је [1] да притисак на излазу отвора може опасти само до вредности  $p_m$  дате под (1).

Циљ нам је да испитамо какве ће појаве наступити кад се на отвор кроз који се врши истицање наглави цилиндрична цев произвољне дужине L (сл. 1), тј. да испитамо које ће вредности имати притисак  $p_1$  на крају отвора и почетку цеви (пресек I), као и притисак  $p_2$  на крају цилиндричне цеви (пресек II), при чему је узето да је спољашни притисак  $p_3$  знатно мањи од  $p_m$ .

При кретању све до пресека I делићи гаса врше адијабатски процес, јер се појаве трења могу апстраховати због малог пређеног пута. Стога су брзина  $w_1$  и температура  $T_1$ за пресек I дате изразима<sup>1</sup>) (3) и (4). Ако се са  $C_1$  означи брзина звука у средини пресека I добива се, с обзиром на (4), једначина (5).

Промена стања гаса при протицању кроз цилиндричну цев дата је једначином³) (6). За време протицања гаса кроз цев дужине L појаве трења не могу се занемарити. Процес је неповратан; ентропија може само расти. Стога ће промена стања гаса ићи само до т. зв. граничне тачке  $(p_{gr}, v_{gr})$  дијаграма p, v, у којој се тангента за криву (6) поклапа са тангентом за адијабату кроз ову тачку. Гранична тачка претставља стање гаса на излазу цеви (пресек II,  $p_{gr} = p_2$ ), те притисци пресека I и II задовољавају једначину³) (8).

Ако се стави  $p_2 = a \cdot p_0$ , где је a засад непозната количина, и ако се  $w_1$  и  $c_1$  смене вредностима из (3) и (5), добиће једначина (8) облик (10).

Једначина (10) може се решити по  $\frac{p_0}{p_1}$  графички, цртањем кривих

$$y = \frac{k^2 = 1}{4} \cdot a^2 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}}$$
 w  $z = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1$ .

При томе могу наступити ова три случаја:

- 1) a > 0.530; криве у и z се уопште не секу.
- 2) a = 0,530; криве у и z се додирују у тачки A (сл. 2). Тада је  $p_1 = p_2$ , што одговара случају када је L = 0.
- 3) a < 0.530; криве y и z се секу у двема тачкама B и C (сл. 2).

На основу горњег излагања долазимо до закључка да постоји увек  $p_2 < 0.530\,p_0$  и  $p_1 > 0.530\cdot p_0$  за сл. 1 (тачка B на сл. 2) или  $p_1 < 0.530\cdot p_0$  и  $p_1 < p_2$  за сл. 3 (тачка C на сл. 2).

<sup>1)</sup> Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Band III, erste Häffle, S. 968 Braunschweig, 1926.

<sup>2)</sup> Saint-Venant et Wantzel, Mémoires et expériences sur l'écoulement de l'air, Journ. ec. polyt. 27, 85, 1839

<sup>3)</sup> W. Schüle, Technische Thermodynamik, Band I, erster Teil-S. 327-330, Berlin, 1930