MÉTHODE DE D'ALEMBERT POUR INTÉGRER LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Par

M. N. SALTYKOW

1. La méthode de D'Alembert, aux facteurs intégrants[1]), est un procédé des plus avantageux pour l'intégration des équations linéaires différentielles ordinaires aux coefficients constants. En effet, il dispense d'appliquer la méthode de la variation des constantes arbitraires. Ladite méthode fournit les intégrales du système intégré, tandisque l'autre, la méthode classique de D'Alembert offre l'intégrale générale, en complétant celle d'Euler dans le cas des racines multiples de l'équation caractéristique.

Il s'agit, dans la présente Note, d'apporter l'extension analogue à la première méthode de D'Alembert pour former les intégrales du système à intégrer dans le cas des racines multiples de l'équation caractéristique.

2. Considérons, pour fixer les idées, le système des n équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \begin{cases} y'_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x), \\ (k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

les coefficients a_{kl} étant constants et $f_k(x)$ désignant une fonction quelconque de la variable indépendante x.

Introduisons $n-1$ facteurs constants arbitraires

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}.$$

[1]) *E. Vessiot*—Méthodes d'intégration élémentaires (Encyclopédie des Sciences Mathématiques Vol. 8, Fascicule 1, Paris 1910. p. 86).

Multipliant les équations (1), à partir de la seconde équation (1), respectivement par ces facteurs, faisons la somme

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i + F(x), \tag{2}$$

où l'on vient de poser

$$\left\{\begin{aligned} & u \equiv y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k y_{k+1}, \\ & s_i \equiv a_{1i} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k a_{k+1}, i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ & F(x) \equiv f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k f_{k+1}(x). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On va définir les valeurs arbitraires des facteurs μ_k de manière qu'ils vérifient les conditions

$$s_{i+1} = s_1 \mu_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

L'équation (2) devient alors linéaire par rapport à u,

$$\frac{du}{dx} = s_1 u + F(x). \tag{5}$$

Les équations (4) donnent, grâce aux formules (3), des valeurs bien déterminées aux facteurs μ_i et aux constantes s_{i+1}. En effet, l'ensemble de la première formule (3) et de (4) donne, pour définir les n quantités

$$s_1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1},$$

n équations linéaires que l'on écrit aisément de la manière suivante:

$$\left\{\begin{aligned} & a_{11} - s_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1,1} \mu_k = 0, \\ & a_{1i} + (a_{ii} - s_1)\mu_{i-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1,i}^{(i-1)} \mu_k = 0, \\ & \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

l'indice supérieur $(i-1)$ auprès dusymbole $\sum$ indiquant l'absence du terme correspondant à la valeur $i-1$ de l'indice variable k.

Cela posé, l'ensemble des n équations (6) sert à définir les n valeurs inconnues

$$s_1\ \mu_1.\ \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}.$$

Les n équations (6), étant linéares par rapport aux $n-1$ dernières inconnues μ_k, le résultat de leur élimination fournit l'équation pour définir s_1

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s_1 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-s_1 & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn}-s_1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation caractérisique obtenue (7) ne diffère de celle de la théorie classique que par la permutation des lignes et des colonnes du déterminant figurant au premier membre de ladite équation. À chaque racine distincte de l'équation (7) correspondent les valeurs bien déterminées des $n-1$ coefficients μ_k, définies par les $n-1$ équations du système (6) correspondant à la racine en question; la $n-i$-ème équation de ce système devient une conséquence algébrique des autres équations du même système, grâce à la relation (7). Supposons, pour fixer les idées et pour rendre le calcul plus symétrique, que la première équation (6) soit la conséquence des autres, de sorte que le système en question devient

$$(8)\qquad \left.\begin{array}{lll} (a_{22}-s_1)\mu_1 + a_{32}\mu_2 + & \ldots & + a_{n2}\mu_{n-1} + a_{12} = 0, \\ a_{23}\mu_1 + (a_{33}-s_1)\mu_2 + & \ldots & + a_{n3}\mu_{n-1} + a_{13} = 0, \\ . \quad . & \ldots & . \quad . \\ . \quad . & \ldots & . \quad . \\ a_{2n}\mu_1 + a_{3n}\mu_2 \quad + & \ldots & (a_{nn}-s_1)\mu_{n-1} + a_{1n} = 0. \end{array}\right\}$$

Il en résulte

$$(9)\qquad \mu_k = -\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

où l'on a posé

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{22}-s_1 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{23} & a_{33}-s_1 & \dots & a_{n3} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn}-s_1 \end{vmatrix},$$

Δ_k désignant le déterminant que l'on tire de Δ, en y remplaçant les éléments de la k-iéme colonne par des termes connus des équatons (8), de sorte que chaque racine μ_k représente une fonction de s_1.

Autant il y a de racines distinctes de l'équation caractéristique (7), autant il y aura de systèmes de valeurs μ_k représentées par les formules (9) et que l'on va désigner par μ_{kv}, l'indice v correspondant aux racines distinctes de l'équation (7).

Il y a deux cas à distinguer, selon que toutes les racines de l'équation (7) sont distinctes ou qu'elles admettent des racines multiples.

Désignons dans la première hypothèse par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de l'équation caractéristique (7) par rapport à s_1. Pour chacune des racines de l'équation algébrique (7), l'équation différentielle (5) produit une intégrale du système (1) que l'on désignera symboliquement, pour abréger l'écriture, par

$$\varphi_r(y_1, y_2, \dots, y_n, x, \alpha_r) = C_r, \tag{10}$$

où l'on a posé

$$\varphi_r \equiv (y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{kr}\, y_{k+1})\, e^{-\alpha_r x} - \int e^{\alpha_r x} F_r(x)\, dx, \tag{11}$$

C_r étant des constantes arbitraires et $F_n(x)$ la valeur correspondante de $F(x)$.

Cela posé, si l'équation caractéristique (7) admet n racines distinctes, il existe n formules (10) offrant les n intégrales distinctes du système donné (1).

3. Or, supposons que l'équation (7) admette des racines multiples. Dans cette hypothèse la méthode de différentiation,

par rapport au paramètre, que D'Alembert avait appliquée à la formule de l'intégrale particulière d'Euler pour en tirer l'intégrale générale, est encore applicable dans le cas considéré.

Supposons, en effet, que l'équation caractéristique (7) n'admette que m $(m<n)$ racines distinctes

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$$

de sorte que le système étudié (1) possède m intégrales, écrites brièvement et profitant des notations précédentes de la manière suivante

$$\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_i) = C_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Les fonctions φ_i jouissent, d'après leur définition même, de la propriété que leurs dérivées par rapport à la variable indépendante x s'évanouissent indentiquement en vertu des équations données (1).

Si α_l est la racine double de l'équation caractéristique (7), faisons varier les coefficients des équations données (1) de telle manière que la racine double de l'équation (7) soit remplacée par deux racines simples α_l et $\alpha_l + \Delta\alpha_l$ du nouveau système envisagé. Alors, outre l'intégrale

$$\varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l) = C_l, \tag{13}$$

le nouveau système considéré admettera une seconde intégrale

$$\varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l + \Delta\alpha_l) = \overline{C}'_l.$$

Le système étudié étant linéaire, il va sans dire que la fonction

$$\varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l + \Delta\alpha_l) - \varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l)$$

ainsi que la fonction

$$\frac{\varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l + \Delta\alpha_l) - \varphi_l(y_1, y_2, \ldots, y_n, x, \alpha_l)}{\Delta\alpha_l}$$

jouissent des mêmes propriétés citées que la fonction φ_l, vis-à-vis du système remplaçant (1) sous l'hypothèse faite sur ses coefficients. Passons à la limite en faisant tendre $\Delta\alpha_l$ vers zéro. Alors le système suppléant, que l'on avait introduit, coïncide

avec le système primitif (1) et celui-ci, outre l'intégrale (3), possèdera une nouvelle intégrale de la forme

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} = C_i', \tag{14}$$

C_i' désignant une nouvelle constante arbitraire distincte de C_i. Si la racine α_i de l'équation caractéristique (7) était triple, le système donné (1) admetterait, outre les intégrales (13) et (14), la nouvelle intégrale

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_i^2} = C_i'',$$

C_i'' désignant une nouvelle constante arbitraire distincte des C_i et C_i'.

En procédant de cette manière on complètera jusqu'à n le nombre d'intégrales distinctes du système étudié. Il suffit dans ce but de différentier par rapport à α_i chacune des fonctions d'une unité moins de fois, que le degré de multiplicité des racines considérées.

4. Prenons, par exemple, le système des trois équations citées par V. A. Stekloff, dans son Traité sur l'intégration des équations différentielles, en russe (Nr. 53 p. 355),

$$y_1' = -y_3, \quad y_2' = -2y_1 - 2y_3, \quad y_3' = -y_1 - y_2.$$

L'équation caractéristique devient

$$(S_1 + 2)(S_1 - 1)^2 = 0.$$

Quant au système linéaire (6), il se présente maintenant sous la forme

$$S_1 \mu_1 + \mu_2 = 0, \quad 2\mu_1 + S_1 \mu_2 + 1 = 0.$$

Il en résulte

$$\mu_1 = \frac{1}{S_1^2 - 2}, \qquad \mu_2 = -\frac{S_1}{S_1^2 - 2}.$$

En posant $S_1 = -2$, on obtient

$$\mu_{11} = \frac{1}{2}, \qquad \mu_{21} = 1,$$

et l'intégrale correspondante du système donné (15) devient

$$\varphi_1 \equiv \left(y_1 + y \frac{1}{2} y_2 + y_3 \right) e^{2x} = C_1 .$$

Or, on trouve pour φ_2 les expressions

$$\varphi_2 \equiv \left(y_1 + \frac{1}{S_1^2 - 2} y_2 - \frac{S_1}{S_1^2 - 2} y_3 \right) e^{-S_1 x},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial S_1} \equiv \left[-\frac{2S_1}{(S_1^2-2)^2} y_2 + \frac{S_1^2+2}{(S_1^2-2)^2} y_3 - x \left(y_2 + \frac{1}{S_1^2 - 2} y_2 - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{S_1}{S_1^2 - 2} y_3 \right] e^{-S_1 x} .$$

En y substituant la valeur $S_1 = 1$, on en tire les deux dernières intégrales du système (15) sous la forme

$$(y_1 - y_2 + y_3)\, e^{-x} = C_2 ,$$
$$[2y_2 - 3y_3 + x(y_1 - y_2 + y_3)]\, e^{-x} = C_2' ,$$

C_2 et C_2' désignant deux nouvelles constantes arbitraires distinctes.

5. Appliquons la théorie exposée à une équation linéaire d'un ordre quelconque aux coefficients constants

$$(16) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' \, a_n y = f(x),$$

$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ étant des constantes et $f(x)$ une fonction quelconque de la variable indépedante x. V. A. Stekloff profite, dans son Traité cité (Nr. 46, p. p. 343-345) d'une manière tout-à-fait originale, de l'idée de D'Alembert pour intégrer l'équation étudiée (16).

Dans les lignes suivantes il s'agit de réduire le problème posé à celui du Nr. 2. Transformons à cet effet l'équation (16) en un système linéaire de la forme (1). Posons dans ce but, en introduisant $n-1$ fonctions auxiliaires $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$,

$$y' = y_1 ,$$
$$y_1' = y_2 ,$$
$$y_2' = y_3 ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_{n-2}' = y_{n-1} ,$$
$$y_{n-1}' = -a_n y - a_{n-1} y_1 - a_{n-2} y_3 - \cdots - a_1 y_{n-1} + f(x).$$

Les coefficients du système (1) admettent actuellement les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}=0, & a_{21}=0, & \ldots, & a_{n-1,1}=0, & a_{n1}=-a_n, \\
a_{12}=1, & a_{22}=0, & \ldots, & a_{n-1,2}=0, & a_{n2}=-a_{n-1}, \\
a_{13}=0, & a_{23}=1, & \ldots, & a_{n-1,3}=0, & a_{n3}=-a_{n-2}, \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a_{1,n-1}=0, & a_{2,n-1}=0, & \ldots, & a_{n-1,n-1}=0, & a_{n,n-1}=-a_2, \\
a_{1n}=0, & a_{2n}=0, & \ldots, & a_{n-1,n}=1, & a_{nn}=-a_1.
\end{array}$$

Les équations (6) pour définir les facteurs μ_k deviennent

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l}
-s_1-a_n\mu_{n-1}=0, \\
1-s_1\mu_1-a_{n-1}\mu_{n-1}=0, \\
\qquad \mu_1-s_1\mu_2-a_{n-2}\mu_{n-1}=0, \\
\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad\qquad \mu_{n-2}-(a_1+s_1)\mu_{n-1}=0.
\end{array}\right.$$

On en tire l'équation en s_1 sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix}
-s_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_n \\
1 & -s_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{n-1} \\
0 & 1 & -s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{n-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -(a_1+s_1)
\end{vmatrix}=0.$$

Développant le déterminant du premier membre de l'équation précédente par rapport aux éléments de la dernière colonne, on obtient l'équation en s_1 sous la forme classique

$$(18)\qquad s^n+a_1s_1^{n-1}+a_2s_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s_1+a_n=0.$$

À chaque racine α_ν de cette équation correspondent des valeurs définies $\mu_{k\nu}$ des facteurs μ_k. Supposons, d'abord, que les racines

de l'équation (18) soient distinctes; on obtient alors le système de n intégrales premières de l'équation étudiée (19),

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, x, \alpha_\nu) = C_\nu, \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où les variables auxiliaires, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, sont remplacées par les dérivées correspondantes de la fonction inconnue y.

Or, si l'équation caractéristique (18) admettait des racines multiples, les intégrales (19) n'auraient lieu que relativement aux racines distinctes de l'équation (18). Les autres intégrales premières, qui manquent, seront définies au moyen des dérivées des fonctions φ_ν correspondant aux racines multiples de (18).

6. Considérons, par exemple, l'équation empruntée au Traité cité de V. A. Stekloff (№ 41, p. 241),

$$(20)\qquad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$$

dont l'équation caractéristique admet 2 comme racine triple. Le système (17) donne, pour définir les deux facteurs μ_1 et μ_2, les équations

$$-s_1 + 8\mu_2 = 0,$$

$$1 - s_1\mu_1 - 12\mu_2 = 0.$$

Il en résulte

$$\mu_2 = \frac{1}{8}s_1, \qquad \mu_1 = \frac{1}{s_1} - \frac{3}{2}.$$

On a, par conséquent, pour définir les trois intégrales premières de l'équation (20), la fonction φ et les deux dérivées de celle-ci prises par rapport à s_1, à savoir

$$\varphi \equiv \left[y + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{3}{2}\right)y' + \frac{1}{8}s_1 y''\right]e^{-s_1 x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \equiv \left\{-\frac{1}{s_1^2}y' + \frac{1}{8}y'' - x\left[y + \left(\frac{1}{s_1} \quad \frac{3}{2}\right)y' + \frac{1}{8}s_1 y''\right\}e^{-s_1 x},\right.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} \equiv \left\{\frac{2}{s_1^3}y' + x\left(\frac{2}{s_1^2}y' - \frac{1}{4}y''\right) + x^2\left[y + \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\right)y' + \frac{1}{8}s_1 y''\right\}e^{-s_1 x}.\right.$$

En y substituant la valeur $s_1 = 2$, les trois intégrales premières de l'équation (20) deviennent

$$\varphi_1 \equiv \left(y - y' + \frac{1}{4}y''\right)e^{-2x} = C_1,$$

$$\varphi_2 \equiv \left[-\frac{1}{4}\left(y' - \frac{1}{2}y''\right) - x\left(y - y' + \frac{1}{4}y''\right)\right]e^{-2x} = C_1',$$

$$\varphi_3 \equiv \left[\frac{1}{4}y' + \frac{1}{2}x\left(y' - \frac{1}{2}y''\right) + x^2\left(y - y' + \frac{1}{4}y''\right)\right]e^{-2x} = C_1'',$$

C_1, C_1' et C_1'' désignant trois constantes arbitraires distinctes. En éliminant entre ces trois intégrales les variables y' et y'', on obtient l'intégrale générale de l'équation (20) sous la forme

$$y = (C + C'x + C''x^2)e^{2x},$$

C, C' et C'' désignant trois constantes arbitraires distinctes qui s'expriment en anciennes constantes de la manière suivante

$$C \equiv C_1 - 2C_1' + 2C_1'', \quad C' \equiv -2C_1 + 4C_1', \quad C'' \equiv 2C_1.$$

7. La méthode étudiée peut être appliquée aux équations linéaires, sans avoir besoin de les ramener au préalable à un système de forme canonique, en profitant de la méthode Eulerienne, comme c'est exposé, par exemple, au „Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique" par M. J. Hadamard (t. I. p. p. 579—583).

Bornons nous, d'abord, au cas particulier du système suivant des deux équations linéaires aux seconds membres

$$(21) \qquad \begin{cases} y' + z' = 2z + \cos x, \\ 3y' + z' = y + 9z - 3x^2, \end{cases}$$

y et z désignant deux fonctions inconnues de la variable indépendante x.

La somme de la première équation (21) et de la seconde équation, dont les deux membres sont multipliés par un facteur constant indéterminé μ, produit

$$(22) \qquad (1+3\mu)y' + (1+\mu)z' = \mu y + (2+9\mu)z + F(x),$$

où l'on a posé

$$F(x) \equiv \cos x - 3\mu x^2.$$

Introduisons un second facteur constant indéterminé λ, en posant

$$(23) \qquad 1 + \mu = \lambda(1+3\mu), \qquad 1 + 9\mu = \lambda\mu.$$

Ces deux conditions nous serviront pour définir les deux valeurs indéterminées de μ et λ.

Grâce aux relations (23), et en introduisant la nouvelle fonction inconnue

$$u = y + \lambda z,$$

l'équation (22) se réduit à une équation linéaire

$$u' = \frac{\mu}{1+3\mu} u + \frac{1}{1+3\mu} F(x). \tag{24}$$

Or, les relations (23), en en éliminant λ, donnent pour définir μ

$$13\mu^2 + 7\mu + 1 = 0, \qquad \mu_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{3}}{26}.$$

1 en résulte

$$\lambda_{1,2} = 2 \mp i\sqrt{3}.$$

Substituant les valeurs obtenues de μ et λ en l'équation (24), on obtient deux équations

$$u_i' = \frac{\mu_i}{1+3\mu_i} u_i + \frac{1}{1+3\mu_i} F_i(x),$$
$$(i = 1, 2).$$

Il en résulte deux intégrales

$$(y + \lambda_i z) e^{-\frac{\mu_i}{1+3\mu_i} x} - \frac{1}{1+3\mu_i} \int e^{-\frac{\mu_i}{1+3\mu_i} x} F_i(x)\, dx = C_1,$$
$$(i = 1, 2)$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires distinctes.

8. Considérons, à présent, le système d'équations traité au Cours cité précédemment de M. J. Hadamard, tout en supposant que les seconds membres des équations représentent des fonctions quelconques:

$$\begin{cases} a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y + b_0 z'' + b_1 z' + b_2 z = f(x), \\ a_0' y'' + a_1' y' + a_2' y + b_0' z'' + b_1' z' + b_2' z = \varphi(x), \end{cases} \tag{25}$$

les coefficients a et b étant des constantes, $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignant des fonctions quelconques de la variable indépendante x.

Remplaçons le système (25) par l'ensemble de quatre équations du premier ordre

$$(26)\qquad \begin{cases} y' - y_1 = 0, \\ z' - z_1 = 0, \\ a_0 y_1' + b_0 z_1' + a_1 y_1 + b_1 z_1 + a_2 y + b_2 z = f(x), \\ a_0 y_1' + b_0 z_1' + a_1' y_1 + b_1' z_1 + a_2' y + b_2' z = \varphi(x), \end{cases}$$

y, et z, étant des fonctions auxiliaires introduites.

La somme de la première équation (26) et des autres, dont les deux membres sont multipliés respectivement par les facteurs indéterminés μ, μ_1 et μ_2, produit l'équation

$$(27)\qquad (y + \mu z + \lambda y_1 + \nu z_1)' = k(y + \mu z + \lambda y_1 + \nu z_1) + F(x),$$

où l'on vient de poser

$$(28)\qquad \begin{cases} a_0\mu_1 + a_0'\mu_2 = \lambda, \\ b_0\mu_1 + b_0'\mu_2 = \nu, \\ a_2\mu_1 + a_2'\mu_2 = -k, \\ b_2\mu_1 + b_2'\mu_2 = -k\mu, \\ a_1\mu_1 + a_1'\mu_2 - 1 = k\lambda, \\ b_1\mu_1 + b_1'\mu_2 - \mu = -k\nu, \\ \mu_1 f(x) + \mu_2\varphi(x) = F(x). \end{cases}$$

Si l'on introduit la nouvelle fonction inconnue

$$u = y + \mu z + \lambda y_1 + \nu z_1,$$

l'équation (27) s'écrira, grâce aux notations introduites, sous la forme d'une équation linéaire par rapport à la nouvelle variable u,

$$(29)\qquad u' = ku + F(x).$$

D'autre part, les formules (28) offrent un système de six équations pour définir les six coefficients indéterminés

$$(30)\qquad \mu,\ \lambda,\ \nu,\ k,\ \mu_1,\ \mu_2.$$

Les équations considérées étant linéaires par rapport aux cinq quantités

$$\mu_1,\ \mu_2,\ -\lambda,\ -\nu\ -\mu,$$

le résultat de leur élimination produit une équation en k

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_0' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_0' & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2' & 0 & 0 & 0 & -k \\ b_2 & b_2' & 0 & 0 & -k & 0 \\ a_1 & a_2' & -k & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_1' & 0 & -k & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de transformer cette équation de manière à la mettre sous la forme usuelle connue

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} a_0k^2 + a_1k + a_2 & b_0k^2 + b_1k + b_2 \\ a_0'k^2 + a_1'k + a_2' & b_0'k^2 + b_1'k + b_2' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation ainsi obtenue est du quatrième degré par rapport à k.

Tous les coefficients (30) admettent, donc, chacun quatre valeurs que l'on désignera par

$$\mu_i,\ \lambda_i,\ \nu_i,\ k_i,\ \mu_{1i},\ \mu_{2i},$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

de sorte que, si toutes les racines sont distinctes, on aura quatre équations distinctes de l'égalité (29) produisant les quatre intégrales

$$\varphi_i \equiv u_i e^{-k_i x} - \int e^{-k_i x} F_i(x)\,dx = C_1,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

C_1, C_2, C_3 et C_4 étant quatre constantes arbitraires, où les variables auxiliaires, y_1 et z_1, doivent être remplacées par les dérivées y' et z'.

Or, si l'équation (31) admet des racines multiples, on procédera, comme précédemment pour former par différentiation les intégrales qui manquent.

Д'АЛАМБЕРОВА МЕТОДА ИНТЕГРАЉЕЊА ОБИЧНИХ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Од
Н. САЛТИКОВА

Метода множитеља, које је Д'Аламбер увео за интеграљење система обичних диференцијалних једначина, нарочито је погодна за изналажење интеграла линеарних једначина, јер се у исто време примењује и на једначине са десним странама. Зато није више потребна за интеграљење дотичних једначина Лагранжева метода варијације произвољних константа.

Уочимо систем једначина

$$(1)\qquad \begin{cases} y'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i + f_k(x), \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

са сталним коефицијентима, где су $f_k(x)$ ма које функције независно променљиве x.

Измножимо ли дотичне једначине, почев од друге, сталним неодређеним множитељима

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1},$$

и саберимо ли резултате, добиће се једначина

$$(2)\qquad \frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i + F(x),$$

где су уведене ознаке

$$u \equiv y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k y_{k+1},$$

$$(3)\qquad s_i \equiv a_{1i} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k a_{k+1,i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$F(x) \equiv f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k f_{k+1}(x).$$

Одредићемо сад множитеље μ_k помоћу услова

$$s_{i+1} = s_1 \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Према томе једначина (2) постаје линеарна по u и за сваку вредност корена α_ν карактеристичне једначине по s_1, која потиче из првог услова (3) и једнакости (4), даје интеграл

$$\varphi_\nu \equiv \left(y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{k\nu}\, y_{k+1}\right) e^{-\alpha_\nu x} - \int e^{-\alpha_\nu x} F_\nu(x)\, dx = C_\nu, \tag{5}$$

где су $\mu_{k\nu}$ различите вредности μ_k које одговарају α_ν, а C_ν — произвољне константе.

Ако су сви корени карактеристичне једначине различити, обрасци (5) одређују n различитих интеграла система (1).

Поседује ли карактеристична једначина вишеструке корене, обрасци (5) не дају потпуни број различитих интеграла система (1), тада ћемо проширити поступак Д-Аламбера, којим је он попунио Ајлерову методу изналажења општег интеграла, на наше обрасце (5).

Заиста, лако је доказати да за случај вишеструких корена карактеристичне једначине добијамо, поред интеграла (5), још и интеграле

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \alpha_\nu} = C_\nu, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial \alpha_\nu^2} = C_\nu'', \ldots$$

у довољном броју да би укупан број различитих интеграла система (1) постао једнак броју n, при чему су C_ν'', C_ν'', ... произвољне константе.

Изложена метода лако се проширује на линеарне једначине вишег реда од првог и на оне системе једначина које нису доведени у нормални облик.