SUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par

T. PÉYOVITCH

Soit donné le système d'équations[1])

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e^{x_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où a_{ik} sont des constantes ou des fonctions de t. Dans cette note nous allons *donner certains cas d'intégrations du système (1) par des quadratures.*

1. Considérons tout d'abord le système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \ldots + a_n e^{x_n}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \ldots + a_n e^{x_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \ldots + a_n e^{x_n}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des constantes. Le système (2) lui-même donne immédiatement

[1]) Nous avons étudié ce système d'équations à plusieurs reprises (*Comptes rendus*, t. 208, № 13, 1939, Paris *Revue scientifique*, № 3258, octobre 1946, Paris. *Publications de l'Institut mathématique*, t. I, 1947, Belgrade).

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_2}{dt}=\ldots=\frac{dx_n}{dt},$$

d'où l'on a

(3) $x_1=x_n+\log C_1,\quad x_2=x_n+\log C_2,\ldots,\quad x_{n-1}=x_n+\log C_{n-1}.$

Si l'on porte les valeurs x_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, données par les équations (3), dans la dernière des équations (2), on obtient l'équation

(a) $$\frac{dx_n}{dt}=(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)e^{x_n},$$

dont l'intégrale générale est

$$-e^{-x_n}=(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n,$$

ou

$$e^{x_n}=-\frac{1}{(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n},$$

ou enfin

$$x_n=(2k+1)\pi i-\log[(C_1a_1+C_2a_2+\ldots\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n].$$

Eu égard aux équations (3), le système (2) admet l'intégrale générale

$$(4)\begin{cases}x_1=(2k+1)\pi i+\log C_1-\log[(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n],\\ x_2=(2k+1)\pi i+\log C_2-\log[(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n=(2k+1)\pi i-\log[(C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n)t+C_n].\end{cases}$$

Il est évident que les solutions ci-dessus satisfont aux conditions

$$\lim_{t\to\infty}x_i=-\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{dx_i}{dt}=0,\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas

$$C_1a_1+C_2a_2+\ldots+C_{n-1}a_{n-1}+a_n=0,$$

les solutions (4) se ramènent aux constantes.

Il faut remarquer que le système (2), par le changement de fonctions

$$a_ie^{x_i}=e^{u_i},$$

se ramène au système

$$\frac{du_1}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2} + \ldots + e^{u_n},$$

$$\frac{du_2}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2} + \ldots + e^{u_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{du_n}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2} + \ldots + e^{u_n},$$

qui peut-être intégré immédiatement par des quadratures.

2. Considérons maintenant le système (2), où a_l sont des fonctions quelconques de t. Dans ce cas l'intégrale générale de l'équation (a) est

$$x_n = (2k+1)\pi i - \log\left[\int_{t_0}^{t}(C_1a_1 + C_2a_2 + \ldots + C_{n-1}a_{n-1} + a_n)dt + C_n\right].$$

Par conséquent, nous avons l'intégrale générale du système (2), où a_l sont des fonctions de t

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = (2k+1)\pi i + \log C_1 - \log\left[\int_{t_0}^{t}(C_1a_1 + C_2a_2 + \ldots + C_{n-1}a_{n-1} + a_n)dt + C_n\right], \\ x_2 = (2k+1)\pi i + \log C_2 - \log\left[\int_{t_0}^{t}(C_1a_1 + C_2a_2 + \ldots + C_{n-1}a_{n-1} + a_n)dt + C_n\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = (2k+1)\pi i - \log\left[\int_{t_0}^{t}(C_1a_1 + C_2a_2 + \ldots + C_{n-1}a_{n-1} + a_n)dt + C_n\right]. \end{cases}$$

Si l'intégrale

$$(6)\qquad \int_{t_0}^{t}(C_1a_1 + C_2a_2 + \ldots + C_{n-1}a_{n-1} + a_n)dt$$

augmente indéfiniment pour $t \to \infty$, les solutions (5) satisfont à la condition

$$\lim_{t \to \infty} x_i = -\infty.$$

Si l'intégrale (6) est bornée pour $t \to \infty$, les solutions (5) se ramènent aux constantes pour $t \to \infty$.

3. Considérons maintenant le système

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = a_1 e^{u_1} + a_2 e^{u_2} + \ldots + a_n e^{u_n} + f_1, \\ \dfrac{du_2}{dt} = a_1 e^{u_1} + a_2 e^{u_1} + \ldots + a_n e^{u_n} + f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dt} = a_1 e^{u_1} + a_2 e^{u_2} + \ldots + a_n e^{u_n} + f_n, \end{cases}$$

où a_i et f_i sont des fonctions quelconques de t. Si l'on pose

$$\frac{du_i}{dt} - f_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad u_i = x_i + \int f_i\, dt, \qquad e^{u_i} = e^{\int f_i dt} e^{x_i}$$

le système (7) devient

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = b_1 e^{x_1} + b_2 e^{x_2} + \ldots + b_n e^{x_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b_1 e^{x_1} + b_2 e^{x_2} + \ldots + b_n e^{x_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = b_1 e^{x_1} + b_2 e^{x_2} + \ldots + b_n e^{x_n}, \end{cases}$$

avec

$$b_i = a_i e^{\int f_i dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Le système (8), comme on voit, peut être intégré immédiatement par des quadratures.

Par conséquent, le système (7), où a_i et f_i sont des fonctions quelconques de t, peut s'intégrer par des quadratures.

Il faut remarquer que le système

$$(9) \qquad \frac{du_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e^{u_k} + f_i$$

se transforme, par le changement de fonctions

$$\frac{du_l}{dt} - f_l = \frac{dx_l}{dt}, \qquad u_l = x_l + \int f_l dt,$$

en système

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} b_{lk} e^{x_k}, \tag{10}$$

avec

$$b_{lk} = a_{lk} e^{\int f_k dt}.$$

Cela veut dire que la résolution du système (9) se ramène à la solution du système (10).

4. Reprenons le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}e^{x_1} + a_{12}e^{x_2} + \ldots + a_{1n}e^{x_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}e^{x_1} + a_{22}e^{x_2} + \ldots + a_{2n}e^{x_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}e^{x_1} + a_{n2}e^{x_2} + \ldots + a_{nn}e^{x_n}, \end{cases} \tag{11}$$

où a_{lk} sont des constantes arbitraires.

Multiplions les équations ci-dessus respectivement par $a_{11}e^{x_2}$, $a_{22}e^{x_2}, \ldots, a_{nn}e^{x_n}$; on aura

$$a_{11}e^{x_1}\frac{dx_1}{dt} = a_{11}e^{x_1}(a_{11}e^{x_1} + a_{12}e^{x_2} + \ldots + a_{1n}e^{x_n}),$$

$$a_{22}e^{x_2}\frac{dx_2}{dt} = a_{22}e^{x_2}(a_{21}e^{x_1} + a_{22}e^{x_2} + \ldots + a_{2n}e^{x_n}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a_{nn}e^{x_n}\frac{dx_n}{dt} = a_{nn}e^{x_n}(a_{n1}e^{x_1} + a_{n2}e^{x_2} + \ldots + a_{nn}e^{x_n}).$$

En additionnant les équations précédentes, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} e^{x_i} \frac{dx_i}{dt} = a_{11} e^{x_1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} e^{x_k} \right) + a_{22} e^{x_2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k} e^{x_k} \right) +$$

$$+ \ldots + a_{nn} e^{x_n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} e^{x_k} \right).$$

Cherchons les conditions qui doivent exister entre les coefficients a_{ik} pour que la dernière équation puisse être écrite sous la forme

$$(12) \qquad a_{11} e^{x_1} \frac{dx_1}{dt} + a_{22} e^{x_2} \frac{dx_2}{dt} + \ldots + a_{nn} e^{x_n} \frac{dx_n}{dt} =$$

$$= (a_{11} e^{x_1} + a_{22} e^{x_2} + \ldots + a_{nn} e^{x_n})^2.$$

Ceci aura lieu si l'on a

$$a_{11} e^{x_1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} e^{x_k} \right) + a_{22} e^{x_2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k} e^{x_k} \right) +$$

$$+ \ldots + a_{nn} e^{x_n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} e^{x_k} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} e^{x_i} \right)^2$$

d'où l'on a

$$(b) \qquad a_{ii} a_{ik} + a_{ki} a_{kk} = 2 a_{ii} a_{kk}^{1})$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad k = i+1, \quad i+2, \ldots, n).$$

Dans ce cas l'intégration de l'équation (12) donne

$$- \frac{1}{a_{11} e^{x_1} + a_{22} e^{x_2} + \ldots + a_{nn} e^{x_n}} = t + C,$$

ou

$$(13) \qquad a_{11} e^{x_1} + a_{22} e^{x_2} + \ldots + a_{nn} e^{x_n} = - \frac{1}{t+C},$$

d'où il résulte

$$(14) \quad a_{11} e^{x_1} \frac{dx_1}{dt} + a_{22} e^{x_2} \frac{dx_2}{dt} + \ldots + a_{nn} e^{x_n} \frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{(t+C)^2}.$$

Les équations (13) et (14) donnent

[1]) Si tous les coefficients a_{ik} du système (11) sont égaux à 1, c'est-à-dire si l'on a $a_{ik} = 1$, cette condition est satisfaite.

$$\lim_{t\to\infty}\left|a_{11}e^{x_1}+a_{22}e^{x_2}+\ldots+a_{nn}e^{x_n}\right|=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|[\log(a_{11}e^{x_1}+a_{22}e^{x_2}+\ldots+a_{nn}e^{x_n})]'\right|=0.$$

5. Comme cas particulier, prenons le système de deux équations

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}e^{x_1}+a_{12}e^{x_2},\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}e^{x_1}+a_{22}e^{x_2},\end{aligned}$$

où a_{ik} sont des constantes.

Après le changement de fonctions

$$\text{(c)}\qquad e^{x_i}=y_i,\quad \frac{dx_i}{dt}=\frac{1}{y_i}\frac{dy_i}{dt},$$

on aura

$$\text{(16)}\qquad \begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1(a_{11}y_1+a_{12}y_2),\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_2(a_{21}y_1+a_{22}y_2).\end{cases}$$

Si les coefficients a_{ik} du système ci-dessus satisfont à la condition (b), c'est-à-dire si l'on a

$$\text{(d)}\qquad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=2a_{11}a_{22},$$

le système (16) donne

$$a_{11}y_1'+a_{22}y_2'=(a_{11}y_1+a_{22}y_2)^2,$$

d'où l'on a

$$\text{(17)}\qquad a_{11}y_1+a_{22}y_2=-\frac{1}{t+C_1}.$$

Portons la valeur y_1, tirée de cette équation, dans la dernière des équations (16), on obtient l'équation de Bernouilli

$$\frac{dy_2}{dt}=\left(a_{22}-\frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}}\right)y_2^2-\frac{a_{21}}{a_{11}(t+C_1)}y_2,$$

dont l'intégrale générale est

$$\text{(18)}\qquad y_2=-\frac{1}{C_2(t+C_1)^{\frac{a_{21}}{a_{11}}}+a_{22}(t+C_1)},$$

d'où l'on a, d'après (17),

$$(19)\qquad y_1 = -\frac{1}{a_{11}(t+C_1)} + \frac{a_{22}}{a_{11}C_2(t+C_1)^{\frac{a_{21}}{a_{11}}} + a_{11}a_{22}(t+C_1)}.$$

Les équations (18) et (19) donnent

$$\lim_{t\to\infty} y_i = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{dy_i}{dt} = 0, \quad (i=1, 2).$$

Les solutions correspondantes pour x_i du système (15) sont, d'après (c),

$$\lim_{t\to\infty} x_i = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad (i=1, 2).$$

Par conséquent, le système (15), sous la condition (d), peut-être intégré par des quadratures.

Il faut remarquer que le système (15), écrit sous la forme

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}e^{x_1} + a_{22}e^{x_2}}{a_{11}e^{x_1} + a_{12}e^{x_2}},$$

où a_{ik} sont des constantes quelconques, par la transformation

(e) $$e^{x_2} = ue^{x_1},$$

devient

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{(a_{21}-a_{11})u + (a_{22}-a_{12})u^2}{a_{11}+a_{12}u},$$

où les variables se séparent. L'intégration de l'équation ci-dessus donne

$$a_{11}(a_{22}-a_{12})\log u + (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})\log[(a_{22}-a_{12})u + a_{21}-a_{11}] = (a_{21}-a_{11})(a_{22}-a_{12})x_1 + C_1,$$

ou, d'après (e),

$$a_{11}(a_{22}-a_{12})(x_2-x_1) + (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})\log[(a_{22}-a_{12})e^{x_2-x_1} + a_{21}-a_{11}] = (a_{21}-a_{11})(a_{22}-a_{12})x_1 + C_1.$$

Par conséquent, on peut toujours dans le système (15), où a_{ik} sont des constantes quelconques, obtenir une relation entre x_1, x_2 et une constante arbitraire C_1, c'est-à-dire on peut obtenir les courbes intégrales du système (15).

6. Nous allons donner maintenant quelques cas spéciaux du système de deux équations du type (15) pouvant être intégrées par des quadratures.

1°. Le système

$$\frac{dx}{dt} = ae^y + b, \quad \frac{dy}{dt} = ce^x + d, \tag{20}$$

a, b, c, d étant des constantes, donne immédiatement

$$\frac{dx}{ae^y + b} = \frac{dy}{ce^x + d},$$

d'où l'on a les courbes intégrales

$$ce^x + dx = ae^y + by + C_1.$$

Il est facile de voir que le système (20), par le changement des fonctions

$$e^x = \xi, \quad e^y = \eta,$$

devient le système

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi(a\eta + b), \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta(c\xi + d),$$

étudié par Volterra[1]).

Remarquons que le système (20), après la transformation

$$\frac{dx}{dt} - b = \frac{du}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} - d = \frac{dv}{dt},$$

$$x = bt + u, \quad y = dt + v, \tag{21}$$

devient

$$\frac{du}{dt} = ae^{dt}e^v, \quad \frac{dv}{dt} = ce^{bt}e^u. \tag{22}$$

Soit $b = d$; on aura

$$\frac{du}{dv} = \frac{ae^v}{ce^u},$$

d'où

$$ce^u - ae^v = C_1.$$

[1]) Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano 8 (1930). Malheureusemt nous n'avons pas ce Journal à Belgrade.

Portons la valeur

$$ce^u = ae^v + C_1$$

dans la dernière des équations (22), et l'on aura

$$\frac{dv}{dt} = e^{bt}(ae^v + C_1),$$

où les variables se séparent.

Par conséquent, nous avons les solutions du système (22), avec $b = d$ et $C_1 = 0$,

$$(23) \quad \begin{cases} u = (2k+1)\pi i - \log\left(\frac{c}{b}e^{bt} + cC_2\right), \\ v = (2k+1)\pi i - \log\left(\frac{a}{b}e^{bt} + aC_2\right), \end{cases}$$

C_2 est une constante d'intégration. Les solutions (23), pour $b > 0$, satisfont aux relations

$$\lim_{t\to\infty} u = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} v = -\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{v}{t} = -b$$

Les équations (21) et (23) donnent les solutions du système (20) avec $b = d$, $C_1 = 0$.

2° Prenons le système

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(pe^x + qe^y) + \alpha, \\ \frac{dy}{dt} = b(pe^x + qe^y) + \beta, \end{cases}$$

a, b, p, q, α, β étant des constantes. Par le changement de fonctions

$$\frac{dx}{dt} - \alpha = \frac{du}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} - \beta = \frac{dv}{dt}$$

$$(25) \qquad x = \alpha t + u, \quad y = \beta t + v,$$

le système (24) devient

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = a(pe^{\alpha t}e^u + qe^{\beta t}e^v), \\ \frac{dv}{dt} = b(pe^{\alpha t}e^u + qe^{\beta t}e^v), \end{cases}$$

d'où l'on a

$$\frac{du}{dv} = \frac{a}{b}, \quad bu - av = b \log C_1:$$

Portons la valeur

$$u = \frac{a}{b} v + \log C_1$$

dans la dernière des équations (26), et l'on aura

$$\frac{dv}{dt} = b(pC_1 e^{\alpha t} e^{\frac{a}{b} v} + qe^{\beta t} e^{v}).$$

Dans cette équation les variables se séparent

a) si $a = b$ et b) si $\alpha = \beta$.

Par conséquent le système (26), c'est-à-dire le système (24) s'intègre par des quadratures si $a = b$ et si $\alpha = \beta$.

Remarquons enfin que le système (24), par le changement de fonctions

$$e^x = \xi, \qquad e^y = \eta,$$

se transforme en le système

$$\frac{d\xi}{dt} = [a(p\xi + q\eta) + \alpha]\xi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = [b(p\xi + q\eta) + \beta]\eta$$

étudié par Volterra[1]).

Il faut mentionner que le système (voir E. Kamke, loc. cit.),

$$\frac{du}{dt} = h(a - u)(c - u - v),$$

$$\frac{dv}{dt} = k(b - v)(c - u - v),$$

par le changement de fonctions

$$a - u = e^x, \quad b - v = e^y,$$

[1]) Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano 3 (1930). Voir aussi E. Kamke, Differentialgleichuugen, I, p: 621, 1943, Leipzig.

se transforme en le système

$$\frac{dx}{dt} = -h(e^x + e^y) + h(a+b-c),$$

$$\frac{dy}{dt} = -k(e^x + e^y) + k(a+b-c),$$

c'est-à-dire en le système de la forme (24), a, b, c, h et k étant des constantes.

3°. Prenons encore un système spécial de trois équations

$$\frac{dx}{dt} = e^y - e^z, \quad \frac{dy}{dt} = e^z - e^x, \quad \frac{dz}{dt} = e^x - e^y. \tag{27}$$

En additionnant les trois équations ci-dessus, on obtient

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0,$$

ou

$$x + y + z = C_1. \tag{28}$$

Multiplions les équations (27) respectivement par e^x, e^y, e^z, on aura, après addition,

$$e^x \frac{dx}{dt} + e^y \frac{dy}{dt} + e^z \frac{dz}{dt} = 0,$$

ou

$$e^x + e^y + e^z = C_2. \tag{29}$$

Les équations (28) et (29) donnent les courbes intégrales du système (27).

Remarquons que le système (27) se transforme, par le changement de fonctions

$$e^x = u, \quad e^y = v, \quad e^z = w,$$

en le système bien connu

$$\frac{du}{dt} = u(v-w), \quad \frac{dv}{dt} = v(w-u), \quad \frac{dw}{dt} = w(u-v).$$

7. Considérons enfin le système de la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}e^{x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}e^{x_1} + a_{22}e^{x_2}, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}e^{x_1} + a_{n2}e^{x_2} + \cdots + a_{nn}e^{x_n}, \end{cases}$$

où a_{ik} sont de fonctions arbitraires de t. Le système (30), par le changement de fonctions

$$e^{xi} = y_i,$$

devient

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1^2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{dy_n}{dt} = y_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n).$$

Il est facile à voir que l'intégration du système précédent se ramène aux intégrations succesives d'une suite d'équations de Bernouilli[1]).

Communiqué le 19-XI-1947.

---

[1]) En ce qui concerne l'étude du système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e^{x_k} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

il faut consulter aussi le Mémoire de Michel Petrovitch „Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques" (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. VI—VII, 1937—38, p: 290) et Addition au Mémoire précédent (Publications de l'Institut Mathématique, t. I, 1947, p: 1, Belgrade).

ИНТЕГРАЦИЈА ЈЕДНОГ СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

од

Т. ПЕЈОВИЋА

Систем једначина

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{x_k}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где су a_k константе или произвољне функције од t, може се интегралити помоћу квадратура.

Исто тако систем једначина

$$(2) \qquad \frac{du_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{u_k} + f_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где су a_k и f_i константе или произвољне функције од t, може се интегралити помоћу квадратура, јер се сменом

$$\frac{du_i}{dt} - f_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad u_i = \int f_i dt + x_i$$

систем (2) своди на систем облика (1).