CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES RELATIVES AUX POLYNÔMES ET SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Par

J. KARAMATA et M. TOMIĆ

1. L'objet de cette Note est de montrer qu'on peut obtenir par des considérations géométriques élémentaires toute une série de propositions relatives aux polynômes et aux séries trigonométriques. L'idée fondamentale qui fait la base de ces considérations se trouve exposée dans la Note précédente de M. Tomić [1]). Toutefois, nous allons ici la faire mieux ressortir en montrant qu'on peut déduire directement des figures géométriques non seulement les deux théorèmes de Fejér [2]), traités dans ladite Note, mais en même temps d'autres se rapportant aux limites de variation et aux zéros de ces polynômes.

Ainsi, nous traiterons aux N°s 2 - 4 et 8 le cas où les coefficients sont simplement monotones, et dont nous tirons en particulier des résultats de la forme suivante:

Théorème 1. *Lorsque les coefficients* a_ν *décroissent c. à d.*

$$a_\nu \geqslant a_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin(\alpha\nu + \beta)x,$$

on a, quelque soit α *et* β,

[1]) M. Tomić, Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. Publ. Inst. Mat. Beograd, T. 2 (1948), p. 146—154.

[2]) L. Fejér, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Transact. Amer. Mat. Soc. 39 (1936), p. 18-59.

$$-a_0 \frac{\sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}x} \leq S_{\alpha,\beta}(x) \leq a_0 \frac{\cos^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}x}, \qquad 0<x<\pi.$$

Aux N°s 5 et 6 sont traités les théorèmes analogues mais qui se rapportent aux polynômes trigonométriques a coefficients deux fois monotones, c. à d. convexes.

Enfin, pour montrer toute l'efficacité de ce genre de considérations, nous démontrerons au № 7 le théorème suivant[3]):

Soit

$$(1) \qquad a_n \geqslant a_{n+1}, \qquad n=1,2,3,\ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

et

$$s(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sin \nu x;$$

ils existent alors dans tout intervalle $(0,\varepsilon)$, *quelque petit soit* $\varepsilon>0$, *des valeurs de* x *telles que* $s(x)$ *soit positif.*

Nous obtenons d'ailleurs un théorème bien plus général (Théorème 8), dont un cas particulier est l'extension suivante du théorème mentionné:

Théorème 2. *Les conditions (1) étant satisfaites, ils existent toujours deux nombres positifs* η *et* ε, *tels que*

$$s(x) \geqslant \eta x \quad \textit{pour tout} \quad 0<x<\varepsilon.$$

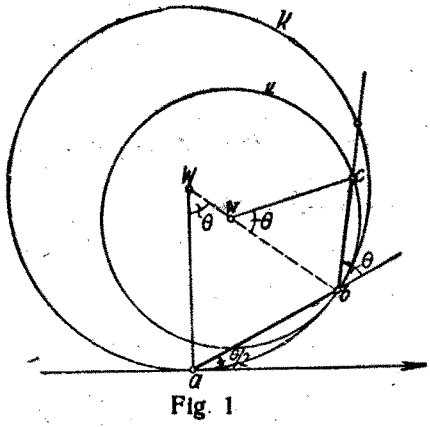

Fig. 1

2. Le principe de la méthode repose sur la remarque géométrique suivante.

Soient a, b et c les affixes de trois points dans le plan de la variable complexe, tels que

$$\operatorname{arc}(c-b) = \Theta + \operatorname{arc}(b-a).$$

Lorsqu'on fait passer par les points a et b, resp. b et c les cercles K, resp. k, dont les centres W, resp. w sont situés sur la bissectrice de l'angle $\sphericalangle abc$, de manière que les angles au centre soient

[3]) L. Fejér, loc. cit. 2, p. 87.

$$\sphericalangle aWb = \sphericalangle bwc = \Theta,$$

alors le cercle k est entièrement situé dans le cercle K, en le touchant au point b toutes les fois que

$$|c-b| < |b-a|,$$

quelque soit Θ, $\qquad 0 < \Theta < 2\pi.$

Les cercles k et K se confondent lorsque

$$|c-b| = |b-a|.$$

Cette proposition ressort immédiatement de la fig. 1; d'ailleurs en désignant par R, resp. r les rayons des cercles K, resp. k on a

$$r \leqq R \quad \text{toutes les fois que } |c-b| \leqq |b-a|,$$

puisque

$$R = \frac{|b-a|}{2} \operatorname{cosec} \Theta/2 \quad \text{et} \quad r = \frac{|c-b|}{2} \operatorname{cosec} \Theta/2.$$

3. Considérons à présent la somme

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, e^{\nu\Theta i}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \; s_{-1} = 0,$$

et les points correspondants d'affixes

$$s_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Puisque l'angle extérieur entre deux des segments consécutifs $\overline{s_{n-1}, s_n}$ et $\overline{s_n, s_{n+1}}$ est toujours égal à Θ, c. à d.

$$arc\,(s_{n+1} - s_n) = \Theta + arc\,(s_n - s_{n-1}) = (n+1)\,\Theta,$$

on peut appliquer la proposition précédente successivement à chacun des segments

$$\overline{s_{n-1}, s_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

À cet effet, désignons par K_n le cercle de centre w_n et de rayon R_n correspondant au segment $\overline{s_{n-1}, s_n}$, c. à d. tel que

$$\sphericalangle s_{n-1} w_n s_n = \Theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \; s_{-1} = 0,$$

et

$$R_n = \overline{s_{n-1}, w_n} = \overline{s_n, w_n} = |w_n - s_n| =$$
$$= \frac{|s_n - s_{n-1}|}{2} \operatorname{cosec} \Theta/2 =$$
$$= \frac{a_n}{2} \operatorname{cosec} \Theta/2,$$

alors *la suite des coefficients* a_n *étant non croissante, c. à d.*

$$a_{n-1} \geqslant a_n > 0, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots,$$

chacun des cercles K_n *sera entièrement contenu dans le cercle précédent* K_{n-1}, *en le touchant au point* s_{n-1}; *les deux cercles se confondent lorsque* $a_{n-1} = a_n$.

De cette proposition il ressort immédiatement le

Théorème 3. *Soit*

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu \Theta i}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec

$$s_{-1} = 0 \quad et \quad 0 < \Theta < 2\pi,$$

lorsque

$$a_{\nu-1} \geqslant a_\nu \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

tous les points d'affixes

$$s_n, \qquad n = q, q+1, \ldots,$$

sont situés à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle K_q *de centre*

$$w_q = s_{q-1} + \frac{a_q}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Theta}{2} e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}\right) i} e^{(q-1)\Theta i}$$

$$(2) \qquad = \sum_{\nu=0}^{q-1} a_\nu e^{\nu \Theta i} + i \frac{a_q}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Theta}{2} e^{\frac{2q-1}{2} \Theta i},$$

et de rayon

$$R_q = \frac{a_q}{2} \operatorname{coses} \frac{\Theta}{2}.$$

En particulier, tous les points d'affixes

$$s_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

sont situés à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle K_0, *de centre*

$$w_0 = \frac{a_0}{2} + i\frac{a_0}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}$$

et de rayon

$$R_0 = \frac{a_0}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2}.$$

4. Du fait que le cercle K_0 passe par l'origine O (v. fig. 2) et se trouve entièrement situé d'un côté de la tangente OT,

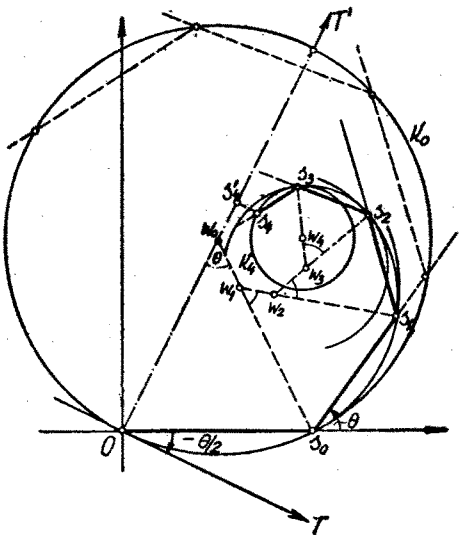

fig. 2.

qui fait avec l'axe réel un angle égal à $-\Theta/2$, il résulte, en vertu du théorème 3, que la projection s'_n de s_n sur la perpendiculaire OT' à la tangente OT se trouve sur le segment $\overline{0,2w_0}$. En d'autres termes, on a

$$o \leq J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_n\right\} \leq 2R_0 = a_0 \operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2}, \quad o < \Theta < 2\pi.$$

Or,

$$J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_n\right\} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin(2\nu+1)\frac{\Theta}{2};$$

il en résulte, donc, le

Théorème 4. *Lorsque*

(3) $$a_{\nu-1} \geqslant a_\nu \geqslant o, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

le polynôme trigonométrique

$$s_n(\Theta) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin(2\nu+1)\frac{\Theta}{2}$$

satisfait aux inégalités

(4) $$o \leqq s_n(\Theta) \leqq a_o \operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2} \quad \textit{pour} \quad o < \Theta < 2\pi.$$

La première des inégalités (4) est celle donnée par Fejér.

D'après la fig. 2 il est clair, d'autre part, que les limites de l'inégalité (4) peuvent être effectivement atteintes, ou approchées d'aussi près qu'on le veut, tant que dans les hypothèses (3) il ne se présente que le signe d'égalité; mais, dès qu'il se présente un indice q tel que

$$a_{q-1} > a_q,$$

le cercle K_q devient plus petit que le cercle K_o, et à partir de cet indice les limites données par (4) ne peuvent plus être atteintes pour

$$o < \varepsilon \leqslant \Theta \leqslant 2\pi - \varepsilon.$$

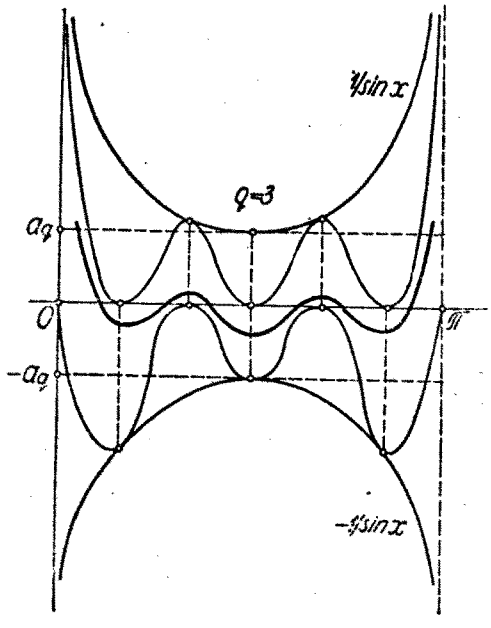

fig. 3.

Si l'on exprime que le point s_n est situé dans ou sur la circonférence du cercle K_q, pour $n \geqslant q$, c. à d. si l'on exprime que la projection s'_n de s_n sur OT' est située sur le segment obtenu en projetant le cercle K_q sur OT', l'on en déduit la double inégalité

$$J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} w_q\right\} - \frac{a_q}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2} \leqq J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_n\right\}$$

$$\leqslant J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} w_q\right\} + \frac{a_q}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2}, \quad n \geqslant q,$$

d'où il résulte

$$J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_{q-1}\right\} - \frac{a_q}{2}\,\frac{1-\cos q\Theta}{\sin\Theta/2} \leqq J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_n\right\}$$

$$\leqslant J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i} s_{q-1}\right\} + \frac{a_q}{2}\,\frac{1+\cos q\Theta}{\sin\Theta/2},$$

c. à d.

$$-a_q\frac{\sin^2 q\Theta/2}{\sin\Theta/2} \leqslant J\left\{e^{\frac{\Theta}{2}i}(s_n - s_{q-1})\right\} \leqslant a_q\frac{\cos^2 q\Theta/2}{\sin\Theta/2}, \qquad o < \Theta < 2\pi.$$

En posant dans cette inégalité $x = \Theta/2$, l'on en déduit le

Théorème 5. *Soit*

$$a_{\nu-1} \geqslant a_\nu \geqslant o, \qquad \nu = q+1,\ q+2, \ldots,$$

alors le polynôme trigonométrique

$$s_{q,n}(x) = \sum_{\nu=q}^{n} a_\nu \sin(2\nu+1)x = a_q \sin(2q+1)x + a_{q+1}\sin(2q+3)x + \ldots$$

satisfait à la double inégalité

$$-a_q\frac{\sin^2 qx}{\sin x} \leqq s_{q,n}(x) \leqq a_q\frac{\cos^2 qx}{\sin x}, \quad \textit{pour } o < x < \pi.$$

Comme corollaire de ce théorème il résulte (v. fig. 3):

Le polynôme trigonométrique $s_{q,n}(x)$ a au moins $2q$ zéros x_k, $k = 1, 2, \ldots 2q$, dans l'intervalle (o, π) tels que

$$\frac{k-1}{2q} \leqq x_k \leqq \frac{k}{2q}, \quad k = 1, 2, \ldots 2q.$$

Cette dernière proposition est un cas particulier d'un théorème de Fejér[4]) où $2q$ se trouve remplacé par un entier quelconque.

[4]) loc. cit. 2, p. 42.

D'ailleurs, le cas général peut de même s'obtenir, d'une manière analogue, en partant de la somme

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu e^{2\nu\Theta i}, \quad b_\nu \geqslant b_{\nu-1},$$

qui se trouve dans le cercle de centre

$$w_0 = \frac{b_0}{2}(1 + i \operatorname{cotg} \Theta),$$

et de rayon

$$R_0 = \frac{b_0}{2} \operatorname{cosec} \Theta.$$

Donc, m étant un nombre quelconque, $e^{(m+1)\Theta i} S_n$ se trouve dans le cercle de centre $e^{(m+1)\Theta i} w_0$ et de rayon R_0. Par suite

$$J\left\{e^{(m+1)\Theta i} w_0\right\} - R_0 \leqq J\left\{e^{(m+1)\Theta i} S_n\right\} \leqq J\left\{e^{(m+1)\Theta i} w_0\right\} + R_0,$$

et cette inégalité, après un calcul simple, se réduit à

$$-b_0 \frac{\sin^2 m\Theta/2}{\sin \Theta} \leqq \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \sin(m + 2\nu + 1)\Theta \leqq b_0 \frac{\cos^2 m\Theta/2}{\sin \Theta}.$$

On en déduit, d'une manière semblable, que *le polynôme trigonométrique*

$$b_0 \sin(m+1)\Theta + b_1 \sin(m+3)\Theta + b_2 \sin(m+5)\Theta + \ldots$$

possède au moins un zéro dans chacun des intervalles

$$\left(\frac{k-1}{m}\pi, \quad \frac{k}{m}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots [m],$$

quelque soit le nombre $m > 0$.

5. Considérons à présent la spirale formée par les centres w_ν des cercles K_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Elle aura la même propriété que la spirale formée par les points d'affixes s_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, c. à d. on pourrait de même lui appliquer le théorème 3, lorsque les longueurs des segments $\overline{w_{\nu-1}, w_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, forment une suite non croissante.

Puisque les longueurs de ces segments sont égales à

$$|w_{\nu-1} - w_\nu| = R_{\nu-1} - R_\nu = \frac{a_{\nu-1} - a_\nu}{2} \operatorname{cosec} \Theta/2,$$

la suite

$$|w_{\nu-1} - w_\nu|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

sera non croissante lorsque

$$a_{\nu-1} - a_\nu \geqslant a_\nu - a_{\nu+1}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

c. à d. lorsque la suite a_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, sera convexe.

Dans ce cas, les cercles

$$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots\ldots \kappa_n,$$

qui correspondent aux segments

$$\overline{w_0, w_1}, \quad \overline{w_1, w_2}, \ldots\ldots \overline{w_{n+1}, w_n}$$

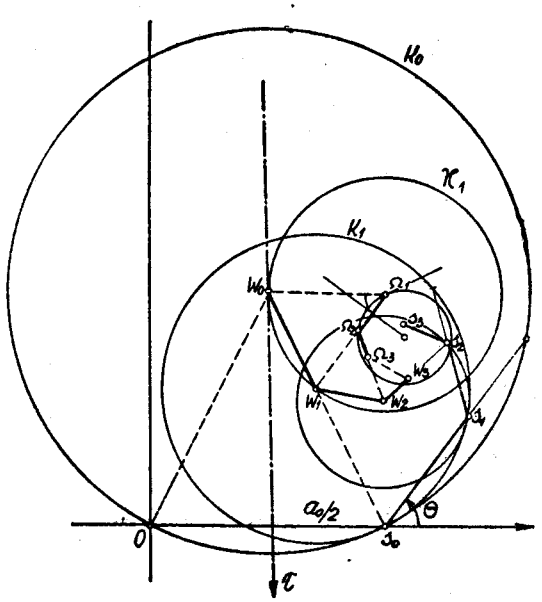

fig. 4.

sont chacun situés à l'intérieur du précédent, et pour que le dernier point d'affixe s_n se trouve de même à l'intérieur ou bien sur la circonférence du dernier cercle κ_n, il faut, en outre, que (v. fig. 4)

$$\overline{w_{n-1},\ w_n} \geqslant \overline{w_n,\ s_n}$$

c. à d. que

$$a_{n-1} - a_n \geqslant a_n.$$

En d'autres termes, il faut que la suite

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1},\ a_n,\ 0,$$

soit convexe.

Cette condition étant remplie, le point s_n sera donc situé à l'intérieur ou sur la circonférence d'un quelconque des cercles κ_q, $q=1, 2, \ldots n$, dont le rayon ρ_q est égal à

$$\rho_q = \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \operatorname{cosec}^2 \Theta/2, \quad q = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \tag{5}$$

et dont l'affixe Ω_q du centre est donné par

$$\Omega_q = w_q + \rho_q e^{\left((q-1)\Theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}\right) i} = w_q + \rho_q e^{q\Theta i}.$$

De cette dernière relation il ressort que le segment $\overline{w_q, \Omega_q}$ est parallèle au segment $\overline{s_{q-1},\ s_q}$ et d'après (2) et (5) que

$$\Omega_q = s_{q-1} + i\frac{a_q}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Theta}{2} e^{(2q-1)\frac{\Theta}{2} i} + \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{\Theta}{2} e^{q\Theta i}. \tag{6}$$

Le rayon $\overline{w_0,\ \Omega_1}$ du cercle κ_1 étant parallèle à l'axe réel, la tangente $\overline{w_0,\ \tau}$ sera parallèle à l'axe imaginaire, de sorte que le cercle κ_1 lui-même est entièrement situé à droite de cette tangente (v. fig. 4).

En projettant donc le cercle κ_1 sur l'axe réel et en exprimant que le point s_n est à l'intérieur ou sur la circonférence, l'on obtient

$$a_0/2 \leqslant R\{s_n\} \leqslant 2\rho_1 + a_0/2,$$

c. à d.

$$a_0/2 \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\Theta \leqslant \frac{a_0 - a_1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\Theta}{2} + a_0/2,$$

ou enfin

$$0 \leqslant \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu\Theta \leqslant \frac{a_0 - a_1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\Theta}{2}.$$

On obtient, ainsi, le

Théorème 6. *Lorsque la suite des coefficients* a_ν *satisfait aux conditions*

(7) $\quad a_\nu - 2a_{\nu-1} + a_{\nu-2} \geqslant 0, \quad \nu = 2, 3, 4, \ldots n+1, n+2,$[5])

avec $\quad a_{n+1} = a_{n+2} = 0,$

alors le polynôme trigonométrique

$$c_n(\Theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu\Theta$$

satisfait aux inégalités

$$0 \leqslant c_n(\Theta) \leqslant \frac{a_0 - a_1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\Theta}{2} \qquad \textit{pour } 0 < \Theta < 2\pi.$$

6. Lorsqu'on exprime que le point s_n se trouve dans ou sur la circonférence du cercle κ_q, c. à d. que la projection de s_n sur l'axe réel se trouve sur le segment obtenu en projettant le cercle κ_q, l'on obtient la double inégalité

$$R\{\Omega_q\} - \rho_q \leqslant R\{s_n\} \leqslant R\{\Omega_q\} + \rho_q,$$

c. à d., d'après (5) et (6),

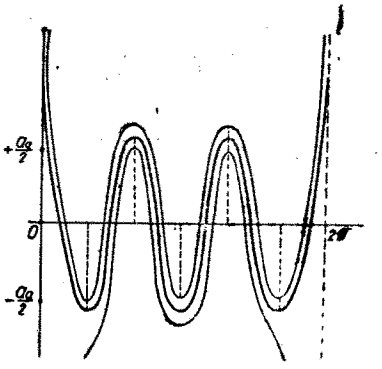

fig. 5.

$$R\{s_{q-1}\} - \frac{a_q}{2} \frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2} + \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \frac{\cos q\Theta}{\sin^2\Theta/2} -$$

$$- \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \frac{1}{\sin^2\Theta/2} \leqslant R\{s_n\} \leqslant R\{s_{q-1}\} - \frac{a_q}{2} \frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2} +$$

$$+ \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \frac{\cos q\Theta}{\sin^2\Theta/2} + \frac{a_{q-1} - a_q}{4} \frac{1}{\sin^2\Theta/2},$$

---

[5]) Ces conditions imposent à la suite a_ν qu'elle soit positive, décroissante et convexe, puisque elles se réduisent à

$$a_0 - a_1 \geqslant a_1 - a_2 \geqslant \ldots\ldots a_{n-1} - a_n \geqslant a_n \geqslant 0.$$

d'où l'on déduit

$$-\frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2}-\frac{a_{q-1}-a_q}{2}\frac{\sin^2 q\Theta/2}{\sin^2\Theta/2}\leqslant R\{s_n-s_{q-1}\}\leqslant$$

$$-\frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2}+\frac{a_{q-1}-a_q}{2}\frac{\cos^2 q\Theta/2}{\sin^2\Theta/2}.$$

Puisque

$$R\{s_n-s_{q-1}\}=R\left\{\sum_{\nu=q}^{n}a_\nu e^{\nu\Theta i}\right\}=\sum_{\nu=q}^{n}a_\nu\cos\nu\Theta,$$

et que dans cette expression ne figure pas le coefficient a_{q-1}, dans les membres extrêmes de l'inégalité précédente on peut le choisir aussi petit que possible. Or, d'après les conditions (7) il faut que

$$a_{q-1}-a_q\geqslant a_q-a_{q+1}.$$

On peut, donc, dans ces expressions poser tout au plus

$$a_{q-1}-a_q=a_q-a_{q+1},$$

et l'on obtient ainsi le

Théorème 7. *Lorsque la suite des coefficients a_ν satisfait aux conditions*

$$\Delta^2 a_\nu\geqslant 0,\qquad \nu=q+2,\ q+3,\ \ldots\ldots n,\ n+1,\ n+2,$$

avec

$$a_{n+1}=a_{n+2}=0,$$

alors en posant

$$(8)\qquad w_q(\Theta)=-\frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2}-\frac{a_{q-1}-a_q}{2}\frac{\sin^2 q\Theta/2}{\sin^2\Theta/2},$$

$$(9)\qquad W_q(\Theta)=-\frac{a_q}{2}\frac{\sin(2q-1)\Theta/2}{\sin\Theta/2}+\frac{a_{q-1}-a_q}{2}\frac{\cos^2 q\Theta/2}{\sin^2\Theta/2}=$$

$$=w_q(\Theta)+\frac{a_{q-1}-a_q}{2\sin^2\Theta/2},$$

et

$$c_{q,n}(\Theta)=\sum_{\nu=q}^{n}a_\nu\cos\nu\Theta,$$

on a la double inégalité

(10) $$w_q(\Theta) \leqslant c_{q,n}(\Theta) \leqslant W_q(\Theta) \quad \textit{pour } 0 < \Theta < 2\pi.$$

Puisque

$$\frac{\sin(2q-1)x}{\sin x} = \frac{\sin^2 qx}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2(q-1)x}{\sin^2 x},$$

on peut écrire les fonctions (8) et (9) encore sous la forme

$$2w_q(2x) = a_q \frac{\sin^2(q-1)x}{\sin^2 x} - a_{q-1}\frac{\sin^2 qx}{\sin^2 x}$$

et

$$2W_q(2x) = a_{q-1}\frac{\cos^2 qx}{\sin^2 x} - a_q \frac{\cos^2(q-1)x}{\sin^2 x}.$$

En remarquant que

$$2w_q\left(\frac{2\pi k}{q}\right) = a_q > 0, \quad k = 1, 2, \ldots\ldots q-1,$$

et que

$$2W_q\left(\frac{2k\pi+\pi}{q}\right) = -a_q < 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots q-1,$$

il résulte de l'inégalité (10) le corollaire suivant (v. fig. 5[6]):

Lorsque la suite des coefficients

$$a_q, a_{q+1}, \ldots\ldots 0, 0,$$

est convexe, le polynôme trigonométrique

$$c_{q,n}(\Theta) = a_q \cos q\Theta + a_{q+1}\cos(q+1)\Theta + \ldots + a_n \cos n\Theta$$

a dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ *au moins* $2q$ *zéros* x_k, $k = 1, 2, \ldots 2q$ *tels que*

$$\frac{k-1}{q}\pi < x_k < \frac{k}{q}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots 2q.^{7})$$

7. Quant à l'extension du théorème 2, cité au № 1, on peut lui donner la forme suivante:

Théorème 8. *Soit*

(11) $$a_{\nu-1} \geqslant a_\nu \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

[6]) $2w_q(0) = 2w_q(2\pi) = (q-1)^2 a_q - q^2 a_{q-1} < 0.$

[7]) loc. cit. 2, p. 45.

lorsque

$$\lim_{n\to\infty} a_n < 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}), \tag{12}$$

condition qui est toujours satisfaite lorsque

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) \to \infty, \\ \textit{ou bien lorsque} \\ \qquad a_n \to 0, \qquad n\to\infty, \end{array}\right. \tag{13}$$

alors il existe un indice k, à partir duquel la suite

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu - \frac{(2n+1)^2}{8} a_{n+1} \tag{14}$$

reste positive, c. à d. telle que

$$A_n > 0 \quad \textit{pour tout } n \geqslant k. \tag{15}$$

Dans ce cas, il existe deux nombres positifs η et ε, indépendants de n, et tels que

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\Theta \geqslant \eta\Theta \tag{16}$$

pour tout $n \geqslant k$ et $0 \leqslant \Theta \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. D'après (14)

$$A_n - A_{n-1} = \frac{(2n+1)^2}{8}(a_n - a_{n+1});$$

on peut donc mettre cette suite sous la forme

$$A_n = \frac{1}{8}\left\{-a_1 + \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu+1)^2 (a_\nu - a_{\nu+1})\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{4\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(a_\nu + a_{\nu+1}) - a_{n+1}\right\}.$$

Il en résulte qu'elle ne décroit pas lorsque la suite a_n satisfait à la condition (11), et d'où l'on déduit immédiatement la première affirmation (15).

Remarquons simplement que lorsque l'une des deux conditions (13) est satisfaite, on peut prendre pour k, dans le premier cas, le plus petit entier tel que

$$\sum_{\nu=1}^{k} \nu(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) \geqslant a_1,$$

et, dans le second cas, d'après (14), le plus petit entier tel que

$$a_k \leqslant \frac{8}{9} a_1,$$

ou bien, lorsque ce $k \geqslant 2$, le plus petit entier tel que

$$a_k \leqslant \frac{8}{25}(a_1 + 2a_2),$$

ou bien, en général, lorsque $k > p$, le plus petit entier tel que

$$a_k \leqslant \frac{8}{(2p+1)^2}(a_1 + 2a_2 + \ldots \ldots + pa_p) =$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{(2p+1)^2}\right) \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots\ldots + pa_p}{1 + 2 + \ldots\ldots + p}.$$

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité (16).

La suite a_ν étant, d'après (11), supposée positive et non croissante, les points d'affixes

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\Theta i}$$

se trouvent, d'après le théorème 3, à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle K_{k+1} pour tout $n \geqslant k$.

Donc, en projettant ce point sur l'axe imaginaire et en exprimant que sa projection se trouve sur la projection du cercle K_{k+1}, lorsque $n \geqslant k$, l'on obtient l'inégalité

$$J\{s_n\} \geqslant J\{w_{k+1}\} - \frac{1}{2} a_{k+1} \operatorname{cosec} \Theta/2,$$

c. à. d d'après (2),

$$J\{s_n\} \geqslant J\{s_k\} + \frac{a_{k+1}}{2}\,\frac{\cos(2k+1)\Theta/2}{\sin\Theta/2} - \frac{a_{k+1}}{2}\,\frac{1}{\sin\Theta/2} =$$

$$\geqslant J\{s_k\} - a_{k+1}\,\frac{\sin^2(2k+1)\Theta/4}{\sin\Theta/2}.$$

Par suite, on a pour tout $n \geqslant k$,

$$(17) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\Theta \geqslant \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\Theta - a_{k+1}\,\frac{\sin^2(2k+1)\Theta/4}{\sin\Theta/2}.$$

Or,

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\Theta - a_{k+1}\frac{\sin^2(2k+1)\Theta/4}{\sin\Theta/2} \sim \left\{\sum_{\nu=1}^{k} \nu a_\nu - \frac{1}{8}a_{k+1}(2k+1)^2\right\}\Theta =$$

$$\sim A_k\Theta \quad \text{lorsque } \Theta \to 0,$$

A_k étant la suite (14).

Donc, la condition (12) étant supposée remplie, il existe un k fini tel que

$$A_k > 0,$$

par suite, il existera toujours un $\eta > 0$ et un $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \sin\nu\Theta - a_{k+1}\,\frac{\sin^2(2k+1)\Theta/4}{\sin\Theta/2} > \eta\varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant \Theta \leqslant \varepsilon,$$

ce qui, d'après l'inégalité (17), démontre le théorème 8.

8. Remarquons, enfin, qu'en nous arrêtant au premier cercle K_0, l'inégalité (17) complétée se réduit à

$$\frac{a_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{4} \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin\nu\Theta \geqslant -\frac{a_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{4} \quad \text{lorsque } 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi,$$

d'où l'on conclut que, *lorsque la suite des coefficients a_ν décroît, le polynôme trigonométrique*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\Theta$$

reste borné inférieurement pour tout Θ de l'intervalle $(0, \pi)$ quelque soit n.

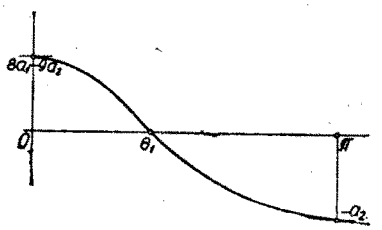

fig. 6.

D'autre part, lorsqu'on s'arrète au second cercle K_1, l'inégalité (17) prend la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\Theta \geqslant (a_1 - a_2) \sin \Theta - \frac{1}{2} a_2 \operatorname{tg} \Theta/4 =$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{4} \left\{ 4(a_1 - a_2) \cos^2 \frac{\Theta}{2} + 4(a_1 - a_2) \cos \frac{\Theta}{2} - a_2 \right\},$$

pour $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$.

Puisque le diagramme de la fonction

$$4(a_1 - a_2) \cos^2 \frac{\Theta}{2} + 4(a_1 - a_2) \cos \frac{\Theta}{2} - a_2$$

a la forme de la figure 6, lorsque

$$8a_1 - 9a_2 > 0,$$

il en résulte que, quelque soit n,

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\Theta > 0 \quad \text{pour } 0 < \Theta < \Theta_1,$$

où Θ_1 est donné par

$$\cos \frac{\Theta_1}{2} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - a_2}}{2\sqrt{a_1 - a_2}}, \quad \text{avec } a_2 < \frac{8}{9} a_1.$$

Enfin, en partant de l'inégalité (17), complétée par la limite supérieure, l'on obtient, en y posant $q = k + 1$,

$$-a_q \frac{\sin^2 (2q-1)\Theta/4}{\sin \Theta/2} \leqslant \sum_{\nu=q}^{n} a_\nu \sin \nu\Theta \leqslant a_q \frac{\cos^2 (2q-1)\Theta/4}{\sin \Theta/2}, \; 0 < \Theta < \pi.$$

De cette double inégalité l'on tire, de la même manière qu'aux Nos 2—6, la proposition suivante[5]):

Lorsque

$$a_\nu \geqslant a_{\nu+1}, \qquad \nu = q,\ q+1, \ldots\ldots n-1,$$

le polynôme en sinus

$$a_q \sin q\Theta + a_{q+1} \sin (q+1)\Theta + \ldots\ldots + a_n \sin n\Theta$$

a au moins $q-1$ *zéros dans l'intervalle* $\left(0, \frac{q-1}{q-1/2}\pi\right)$, *qui sont séparés par les nombres*

$$t_k = \frac{k}{q-1/2}\pi, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots q-1.$$

Communiqué le 19-XI-1947.

ГЕОМЕТРИСКА ПОСМАТРАЊА ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ЗБИРОВА

Од

Ј. КАРАМАТЕ и М. ТОМИЋА

У овом раду аутори износе низ примена методе коју је М. Томић дао у претходном раду: „Геометриски доказ и уопштења извесних теорема Fejér-а и Kakey-а“, а која се оснива на геометриској интерпретацији збира

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\Theta i}, \qquad a_\nu \geqslant a_{\nu+1}.$$

Непосредном применом ове геометриске интерпретације на тригонометриске полиноме и редове добивају се веома прецизне границе између којих могу варирати ови полиноми, на пр.:

Ако низ коефициената a_ν *опада, тј.*

$$a_{\nu-1} \geqslant \alpha_\nu, \qquad \nu = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots n,$$

[5]) loc. cit. 2, p. 47—48.

тригонометриски полином

$$S_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin(\alpha\nu+\beta)x$$

налази се између граница

$$-a_0 \frac{\sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}x} \leqslant S_{\alpha,\beta}(x) \leqslant a_0 \frac{\cos^2\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}x}, \text{ за } 0<x<\pi.$$

Из ових резултата следи као непосредна последица низ Fejér-ових теорема (в. расправу, цит.[2]), које се односе на позитивитет и број нула тригонометриских полинома са монотоним коефициентима (№ 2—4 и 8)

Аналогни само прецизнији резултати се добивају ако је низ коефициената конвексан (№ 5 - 6).

Напослетку, да би ефикасност ове методе још више истакли, аутори дају (у № 7) уопштење другог једног Fejér-ова става, који се односи на синусне тригонометриске редове, а које гласи:

Ако је

$$a_{n-1} \geqslant a_n \to 0 \qquad \text{кад } n \to \infty,$$

и

$$s(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x,$$

увек постоје таква два позитивна броја, η *и* ε *да је*

$$s(x) \geqslant \eta x \qquad \text{за свако } 0 < x < \varepsilon.$$

Ови су резултати били предмет предавања J. Карамата у Лозани 1947.