INÉGALITÉS RELATIVES AUX QUOTIENTS ET À LA DIFFÉRENCE DE $\int fg$ ET $\int f \int g$

Par

J. KARAMATA

1. Dans le livre de G. Pólya et G. Szegö[1]) se trouvent les généralisations suivantes de certaines inégalités dues à P. Schweitzer[2]) et J. Kürschák[3]).

Lorsque les deux suites de nombres

$$a_\nu \textit{ et } b_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots\ldots n,$$

satisfont les conditions

$$0 < a \leqslant a_\nu \leqslant A = \lambda a$$

et

$$0 < b \leqslant b_\nu \leqslant B = \mu b \qquad \nu = 1, 2, \ldots\ldots n.$$

alors

$$1 \geqslant \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} a^2_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} b^2_\nu\right)} \geqslant \frac{4\,a\,A\,b\,B}{(ab+AB)^2} = \frac{4\lambda\mu}{(1+\lambda\mu)^2}; \tag{1}$$

ainsi que l'inégalité relative aux fonctions:

---

1) G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin (1925) T. I. Abschnitt II, Aufgaben 92 u. 93, p. 57.

Voir de même K. Knopp, Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte. Math. Zeit. 39, p. 768—776 (1935).

2) P. Schweitzer. Eine Ungleichung über das arithmetische Mittel. Math. és Phys. Lapok, 23, p. 257—261 (1914); où se trouve le cas particulier de l'inégalité (1) lorsque $a_\nu b_\nu = 1$ pour tout $\nu = 1, 2, \ldots n$.

3) J. Kürschák, Gestellte Aufgabe, Math. és Phys. Lapok, 23, p. 378 (1914); où se trouve le cas particulier de l'inégalité (2) lorsque $a = A$ et $b = B$, c. à d. lorsque $\lambda = \mu$.

Lorsque les deux fonctions f(t) et g(t) sont intégrables dans l'intervalle (0,1) et satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} 0 < a \leqslant f(t) \leqslant A = \lambda a \\ 0 < b \leqslant g(t) \leqslant B = \mu b, \end{aligned} \qquad \textit{pour tout } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

alors

$$(2) \qquad 1 \geqslant \frac{\left(\int\limits_0^1 f(t) g(t)\, dt \right)^2}{\int\limits_0^1 f^2(t)\, dt \int\limits_0^1 g^2(t)\, dt} \geqslant \frac{4\, a\, A\, b\, B}{(ab + AB)^2} = \frac{4 \lambda \mu}{(1 + \lambda \mu)^2}.$$

Les inégalités de gauche dans (1) et (2) étant celles de Cauchy-Schwarz, elles sont évidemment valables quelque soient les suites a_ν et b_ν, respectivement les fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

Nous nous proposons dans cette Note d'établir des inégalités analogues, mais où les suites et fonctions qui y figurent se trouvent au premier degré. A cet effet nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Lorsque les fonctions f(t) et g(t) sont intégrables dans l'intervalle* (0,1) *satisfaisant les conditions*

$$(3) \qquad 0 < a \leqslant f(t) \leqslant A = \lambda a,$$

et $\qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$

$$(4) \qquad 0 < b \leqslant g(t) \leqslant B = \mu b$$

alors

$$(5) \qquad 1/K^2 \leqslant \frac{\int\limits_0^1 f(t) g(t)\, dt}{\int\limits_0^1 f(t)\, dt \int\limits_0^1 g(t)\, dt} \leqslant K^2,$$

où

$$(6) \qquad K = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{AB}}{\sqrt{aB} + \sqrt{Ab}} = \frac{1 + \sqrt{\lambda \mu}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}} \geqslant 1.$$

L'on peut établir cette double inégalité directement en démontrant d'abord l'inégalité analogue se rapportant aux suites de nombres, à savoir:

Lorsque les deux suites de nombres

$$a_\nu \textit{ et } b_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

satisfont les conditions

$$0 < a \leqslant a_\nu \leqslant A = \lambda a \quad \textit{et} \quad 0 < b \leqslant b_\nu \leqslant B = \mu b, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

alors

$$1/K^2 \leqslant \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu} \leqslant K^2,$$

où la constante K est donnée par l'égalité (6).

Nous allons toutefois la déduire du théorème plus général suivant:

Théorème II. *Soient les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ intégrables dans l'intervalle* (0, 1) *et*

$$\begin{aligned} &(7) \qquad 0 < a \leqslant f(t) \leqslant A, \\ &(8) \qquad\quad\; b \leqslant g(t) \leqslant B, \end{aligned} \quad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

en posant

$$G = \int_0^1 g(t)\, dt,$$

on a

$$(9) \qquad h(G) \int_0^1 f(t)\, dt \leqslant \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \leqslant H(G) \int_0^1 f(t)\, dt,$$

où l'on a posé

$$(10) \qquad H(x) = H(a, A, x) = \frac{ab(B-x) + AB(x-b)}{a(B-x) + A(x-b)}$$

et

$$(11) \qquad h(x) = H(A, a, x) = \frac{Ab(B-x) + AB(x-b)}{A(B-x) + a(x-b)},$$

c. à d. $h(x)$ s'obtient de $H(x)$ en y permutant a avec A.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général qui se trouve dans ma Note citée sous[4]).

M. A. Bilimović a donné une démonstration directe très simple de ce théorème qui repose sur des considérations géométriques et que je vais reproduire ici.

Démonstration du théorème II. En construisant dans un système d'axes rectangulaires tyz, la fonction $y=f(t)$ dans le plan ty et la fonction $z=g(t)$ dans le plan tz, il est clair, d'après figure ci-jointe, que le volume V du corps

$$0,\ 1,\ f(0),\ f(1),\ g(0),\ g(1),\ gf(0),\ gf(1)$$

est donné par

$$V=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

D'autre part, en désignant par F la surface $0,\ 1,\ f(0), f(1)$, et par G la surface $0,\ 1,\ g(0),\ g(1)$, c. à d. en posant

$$F=\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad G=\int_0^1 g(t)\,dt,$$

il s'ensuit, d'après les inégalités (7) et (8) et la considération de la figure, d'une part, que

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} V=bF+(G-b)y_1 & \text{avec} \quad a\leqslant y_1\leqslant A, \\ \text{et, d'autre part,} & \\ V=BF-(B-G)y_2 & \text{avec} \quad a\leqslant y_2\leqslant A.^{5)} \end{array}\right.$$

[4]) J. Karamata, Complément au premier théorème de la moyenne. Bull. de l'Acad. des Sciences Mat. et Nat. Belgrade, *A*. T. I. p. 97-106 (1933), et (en serbe) „Glas" de l'Acad. r. serbe (CLIV) I 77, p. 119-144 (1933),

[5]) Ces relations, c. à. d.

$$V-bF=(G-b)y_1 \text{ et } BF-V=(B-G)y_2.$$

s'obtiennent d'ailleurs directement par l'application du premier théorème de la moyenne, puisque

$$V-bF=\int_0^1\{g(t)-b\}f(t)\,dt=y_1\int_0^1\{g(t)-b\}\,dt=(G-b)\,y_1$$

et

$$BF-V=\int_0^1\{B-g(t)\}f(t)\,dt=y_2\int_0^1\{B-g(t)\}\,dt=(B-G)\,y_2.$$

De ces inégalités l'on tire

$$\frac{V-bF}{BF-V}=\frac{G-b}{B-G}\cdot\frac{y_1}{y_2}$$

et puisque, d'après (7),

$$a/A \leqslant y_1/y_2 \leqslant A/a,$$

l'on en déduit les deux inégalités suivantes:

$$\frac{V-bF}{BF-V} \geqslant \frac{G-b}{B-G}\cdot\frac{a}{A}, \quad \text{et} \quad \frac{V-bF}{BF-V} \leqslant \frac{G-b}{B-G}\cdot\frac{A}{a}.$$

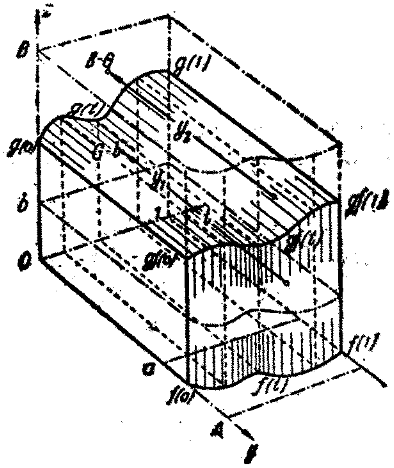

Fig. 1

En résolvant ces inégalités par rapport à V/F, il s'ensuit

$$h(G)=\frac{Ab(B-G)+aB(G-b)}{A(B-G)+a(G-b)} \leqslant \frac{V}{F} \leqslant \frac{ab(B-G)+AB(G-b)}{a(B-G)+b(G-b)}=H(G),$$

qui représentent les inégalités (9) avec (10) et (11).

Remarquons que, b, B et G étant des constantes données, les limites données par les expressions $H(G)$ et $h(G)$ dans ces inégalités sont les plus précises possibles, pour qu'elles restent valables, queleque soit la fonction $g(t)$ telle que

$$b \leqslant g(t) \leqslant B \qquad \text{et} \qquad G=\int_0^1 g(t)\,dt.$$

Démonstration du Théorème I. Le théorème II est valable quelque soient $b<B$; pour en déduire le théorème I supposons que

$$0<b<B,$$

et considérons les fonctions

$$k(x) = h(x)/x \text{ et } K(x) = H(x)/x.$$

D'après le théorème II on a

$$(13) \qquad k(G) \leqslant \frac{\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt}{\int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt} \leqslant K(G),$$

avec

$$K(x) = \frac{ab\,(B-x) + AB\,(x-b)}{x\,\{a\,(B-x) + A\,(x-b)\}} = 1 + \frac{(A-a)\,(B-x)\,(x-b)}{x\,\{a\,(B-x) + A\,(x-b)\}},$$

et

$$k(x) = \frac{Ab\,(B-x) + aB\,(x-b)}{x\,\{A\,(B-x) + a\,(x-b)\}} = 1 - \frac{(A-a)\,(B-x)\,(x-b)}{x\,\{A\,(B-x) + a(x-b)\}}.$$

Puisque

$$b \leqslant G = \int_0^1 g(t)\, dt \leqslant B,$$

il suffit de considérer ces fonctions dans l'intervalle (b, B); d'ailleurs la considération de la fonction $K(x) = K(a, A, x)$ suffit, puisque $k(x)$ s'obtient de $K(x)$ en permutant a et A, c. à d.

$$k(x) = K(A, a, x).$$

Du fait que

$$K(b) = K(B) = 1,$$

et

$$k(b) = k(B) = 1,$$

et puisque

$$K'(x) = \frac{A-a}{x^2} \, \frac{ab\,(B-x)^2 - AB\,(x-b)^2}{\{a\,(B-x) + A\,(x-b)\}^2},$$

il s'ensuit que la fonction $K(x)$ a un seul maximum au point

$$x_M = \frac{\sqrt{aB}+\sqrt{Ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{AB}}\sqrt{bB},$$

avec

$$b < x_M < \sqrt{bB} < B,$$

et que la fonction $k(x)$ a un seul minimum au point

$$x_m = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{AB}}{\sqrt{aB}+\sqrt{Ab}}\sqrt{bB} = bB/x_M,$$

avec

$$b < \sqrt{bB} < x_m < B.$$

Ces valeurs, maximum et minimum, étant

$$\underset{b<x<B}{Max}\{K(x)\} = K(x_M) = \left(\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{AB}}{\sqrt{aB}+\sqrt{Ab}}\right)^2 > 1,$$

et

$$\underset{b<x<B}{Min}\{k(x)\} = k(x_m) = 1/K(x_M) < 1.$$

Il en résulte que les inégalités (13) seront à fortiori satisfaites lorsqu'on y aura remplacé

$$k(G) \qquad \text{et} \qquad K(G)$$

respectivement par

$$k(x_m) \qquad \text{et} \qquad K(x_M),$$

ce qui donne les inégalités (5) avec la limite (6) du théorème I, qui se trouve ainsi démontré.

2. Dans les théorèmes I et II on a considéré les limites du quotient

$$Q(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \Big/ \int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt,$$

des intégrales des fonctions f et g; or, les questions semblables se présentent lorsqu'à la place de ce quotient on considère la différence, c. à d.

$$D(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt,$$

expression qui, de ce point de vue, a été étudiée par G. Grüss[6] et E. Landau[7]).

Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ étant de carrés sommables dans $(0, 1)$, E. Landau a montré que

$$|D(f, g)| \leqslant \sqrt{D(f, f)\, D(g, g)},$$

d'où il a déduit l'inégalité

$$|D(f, g)| \leqslant \sqrt{(A-F)(F-a)(B-G)(G-b)}, \tag{14}$$

lorsque les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ satisfont aux conditions

$$a \leqslant f(t) \leqslant A \quad \text{et} \quad b \leqslant g(t) \leqslant B, \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

et où l'on a posé

$$F = \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{et} \quad G = \int_0^1 g(t)\, dt.$$

Cette dernière inégalité peut en quelque sorte s'améliorer de la manière suivante.

L'expression dans le second membre de l'inégalité (14) est la moyenne géométrique des quantités

$$\frac{(A-F)(F-a)}{A-a}(B-b) \qquad \text{et} \qquad \frac{(B-G)(G-b)}{B-b}(A-a);$$

elle est donc comprise entre le plus petit et le plus grand de ces deux nombres.

---

[6]) G. Grüss, Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) g(x)\, dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x) dx,$$

Math. Zeit. 39, p. 215-226 (1934).

[7]) E. Landau, Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüss, Math. Zeit 39, p. 742-744 (1935); voir de même

E. Landau, Über mehrfach monotone Folgen, Prace Mat. — Fiz. XLIV, p. 337-351 (1936).

K. Knopp, loc. cit. [1]).

Or, en partant des relations (12), c. à d. de

$$\frac{\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt - bF}{G-b} = y_1, \qquad \text{avec} \qquad a \leqslant y_1 \leqslant A,$$

$$\frac{BF - \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt}{B-G} = y_2, \qquad \text{avec} \qquad a \leqslant y_2 \leqslant A,$$

ou bien des relations analogues, obtenues en permutant les fonctions $f(t)$ et $g(t)$, à savoir

$$\frac{\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt - AG}{F-a} = z_1, \qquad \text{avec} \qquad b \leqslant z_1 \leqslant B,$$

$$\frac{AG - \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt}{A-F} = z_2, \qquad \text{avec} \qquad b \leqslant z_2 \leqslant B,$$

il en résulte, après soustraction et un calcul simple, que

$$D(f,\, g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \int_0^1 g(t)\,dt =$$

$$(15) \qquad = \frac{(B-G)(G-b)}{B-b}(y_1 - y_2) =$$

$$= \frac{(A-F)(F-a)}{A-a}(z_1 - z_2).$$

Puisque

$$|y_1 - y_2| \leqslant A - a$$

et

$$|z_1 - z_2| \leqslant B - b$$

il s'ensuit que l'inégalité (14) peut être remplacée par les inégalités suivantes:

$$|D(f,\,g)|\leqslant\frac{(A-F)(F-a)}{A-a}(B-b),$$

$$|D(f,\,g)|\leqslant\frac{(B-G)(G-b)}{B-b}(A-a).$$

L'une de ces deux inégalités est certainement plus précise que l'inégalité (14), puisque son second membre est égal à la moyenne géométrique des seconds membres de ces inégalités.

3. Ainsi, en supposant les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ continues dans l'intervalle (0, 1), les relations (15) peuvent être mises sous la forme des théorèmes de la moyenne, à savoir:

Il existe toujours, dans l'intervalle (0, 1), *deux nombres* t_1 *et* t_2, *ainsi que* t'_1 *et* t'_2, *tels que l'on ait*

$$D(f,\,g)=\frac{(B-G)(G-b)}{B-b}\{f(t_1)-f(t_2)\}, \qquad 0\leqslant t_{1,\,2}\leqslant 1$$
$$=\frac{(A-F)(F-a)}{A-a}\{g(t'_1)-g(t'_2)\}, \qquad 0\leqslant t'_{1,\,2}\leqslant 1.$$

Or, dans le même ordre d'idées réside un résultat obtenu par G. Kowalewski[8]) concernant l'expression $D(f,\,g)$.

Dans la première des Notes citées, Kowalewski démontre le théorème suivant:

Soit

$$f_k(t), \qquad k=1,\,2,\ldots\ldots n,$$

un système de n *fonctions continues dans l'intervalle* (0, 1), *il existent, dans cet intervalle* n *valeurs* t_ν *de* t,

$$0\leqslant t_\nu\leqslant 1, \qquad \nu=1,\,2,\ldots\ldots n,$$

et n *nombres positifs* p_ν, *dont la somme est égale à l'unité,*

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu=1,\ p_\nu\geqslant 0, \qquad \nu=1,\,2,\ldots\ldots n,$$

[8]) G. Kowalewski, Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen, Zeitschrf. für Math. und Phys. 42, p. 153 (1897) et 43, p. 118 (1898).

tel que les n relations

$$f_k(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f_k(t_\nu), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

aient lieu simultanément.

En posant dans ce théorème, avec $n = 3$,

$$f_1(t) = f(t), \; f_2(t) = g(t) \quad \text{et} \quad f_3(t) = f(t)\,g(t),$$

Kowalewski en déduit, dans la seconde des Notes citées, qu'il existent toujours trois quantités positives telles que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad p_{1,2,3} \geqslant 0,$$

et trois valeurs de t de l'intervalle (0, 1), c. à d.,

$$0 \leqslant t_{1,2,3} \leqslant 1,$$

de manière que

$$D(f, g) = \sum_{\nu,\mu}^{1,2,3} p_\nu p_\mu \{f(t_\nu) - f(t_\mu)\}\{g(t_\nu) - g(t_\mu)\}. \tag{16}$$

Or, dans cette relation les trois quantités $p_{1,2,3}$ et un des trois nombres $t_{1,2,3}$ sont superflus. On peut, en effet, réduire le second membre de la relation (16) à un seul terme, de manière qu'elle prenne la forme suivante

$$D(f, g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \int_0^1 g(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\{f(t_1) - f(t_2)\}\{g(t_1) - g(t_2)\}, \qquad 0 \leqslant t_{1,2} \leqslant 1. \tag{17}$$

En particulier, de cette relation on déduit immédiatement le résultat de G. Grüss[9], à savoir que

$$|D(f, g)| \leqslant \frac{1}{4}(A - a)(B - b).$$ [10]

Pour établir la relation (17), il suffit d'appliquer le théorème mentionné de G. Kowalewski à un couple de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

---

[9]) Voir loc cit.[5]) et [7]).

[10]) Voir la remarque à la fin de la Note.

En effet, en tenant compte de la relation

$$D(f,\ g)=\int_0^1 \{f(t)-F\}\{g(t)-G\}\,dt=$$

$$=\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt-FG,$$

et en posant

$$f_1(t)=\{f(t)\}-F\}\{g(t)-G\},\qquad f_2(t)=f(t),$$

ils existent, d'après le théorème de Kowalewski, deux constantes positives

$$p_1+p_2=1,\ p_{1,\,2}\geqslant 0,$$

et deux valeurs de t de l'intervalle (0, 1), c. à d.

$$0\leqslant t_{1,\,2}\leqslant 1,$$

telles que les relations

$$D(f,\ g)=\int_0^1 \{f(t)-F\}\{g(t)-G\}\,dt=$$

$$=p_1(fi-F)(g_1-G)+p_2(f_2-F)(g_2-G),$$

et

$$F=\int_0^1 f(t)\,dt=p_1f_1+p_2f_2,$$

aient lieu simultanément; pour abréger, on a posé dans ces relations

$$f_1=f(t_1),\ f_2=f(t_2),$$

et

$$g_1=g(t_1),\ g_2=g(t_2).$$

Or, en substituant dans la première de ces relations, c. à d. dans

$$D(f,\ g)=p_1f_1g_1+p_2f_2g_2-(p_1g_1+p_2g_2)\,F+FG-(p_1f_1+p_2f_2)\,G,$$

la valeur de F, donnée par la seconde, les deux derniers termes s'annulent et l'on en déduit

$$D(f,\ g) = p_1 f_1 g_1 + p_2 f_2 g_2 - (p_1 g_1 + p_2 g_2)(p_1 f_1 + p_2 f_2) =$$
$$= (p_1 + p_2)(p_1 f_1 g_1 + p_2 f_2 g_2) - (p_1 g_1 + p_2 g_2)(p_1 f_1 + p_2 f_2) =$$
$$= p_1 p_2 (f_1 g_1 + f_2 g_2 - f_1 g_2 - f_2 g_1) =$$
$$= p_1 p_2 (f_1 - f_2)(g_1 - g_2).$$

En d'autres termes, l'on obtient

$$D(f,\ g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 g(t)\, dt =$$
$$= p_1 p_2 \{f(t_1) - f(t_2)\}\{g(t_1) - g(t_2)\},$$

avec

$$p_{1,2} \geqslant 0,\ p_1 + p_2 = 1 \text{ et } 0 \leqslant t_{1,2} \leqslant 1.$$

Puisque le maximum du produit $p_1 p_2$ est égal à $1/4$, lorsque $p_1 + p_2 = 1$, on peut remplacer dans la relation précédente, en raison de la continuité des fonctions $f(t)$ et $g(t)$, ce produit par $1/4$, ce qui démontre la relation (17).

R e m a r q u e. De la relation (16) de Kowalewski, on ne peut obtenir que la valeur $1/3$ à la place de la constante $1/4$, qui figure dans l'inégalité de Grüss.

En effet, en majorant les différences qui figurent dans le second membre de la relation (16) par $(A - a)(B - b)$, on en déduit

$$|D(f, g)| \leqslant (p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1)(A - a)(B - b),$$

avec

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ et } p_{1,2,3,} \geqslant 0.$$

Or, le maximum de la première de ces parenthèses est égal à $1/3$, vu que

$$p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 = \frac{1}{2}\{(p_1 + p_2 + p_3)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{1 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\},$$

et que le minimum de

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad \text{pour} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

est égal à $1/3$.

Présenté à la séance de l'Académie
serbe des Sciences le 10-IV-47

О НЕЈЕДНАЧИНАМА КОЈЕ СЕ ОДНОСЕ НА КОЛИЧНИК И РАЗЛИКУ ИНТЕГРАЛА $\int fg$ И $\int f \int g$

Од

J. КАРАМАТЕ

У вези са неједначинама од G. Pólya, G. Szegö, P. Schweitzer i J. Kürschák (в. цитате 1, 2, 3 расправе), а које се односе на количник интеграла квадрата функција, аутор даје, у првом делу расправе, аналогну неједначину, но у којој функције фигуришу на првом степену и то:

Став I. *Нека је у размаку* (0, 1)

$$0 < a \leqslant f(t) \leqslant A$$

и

$$0 < b \leqslant g(t) \leqslant B,$$

тада је

$$1/K^2 \leqslant \frac{\int\limits_0^1 f(t)\,g(t)\,dt}{\int\limits_0^1 f(t)\,dt \int\limits_0^1 g(t)\,dt} \leqslant K^2,$$

где је

$$K = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{AB}}{\sqrt{aB} + \sqrt{Ab}} > 1.$$

Овај се став добива као специјалан случај општијег става, који је аутор доказао у расправи цитираној под 4.

Аналогна неједначина, која се односи на разлику

$$D(f,\,g) = \int\limits_0^1 f(t)\,g(t)\,dt - \int\limits_0^1 f(t)\,dt \int\limits_0^1 g(t)\,dt$$

место на количник горњих интеграла, је Grüss-ова неједначина

$$|D(f,\,g)| \leqslant \frac{1}{4}(A-a)(B-b),$$

(в. расправе цитиране под 6 и 7).

У другом делу расправе аутор показује да се ова неједначина, у случају кад су функције f и g непрекидне, може написати и у облику става о средњим вредностима, наиме да у размаку (0,1) постоје увек два броја t_1 и t_2 таква да је

$$D(f,\ g)=\frac{1}{4}\{f(t_1)-f(t_2)\}\{g(t_1)-g(t_2)\},\ 0\leqslant t_{1,\,2}\leqslant 1.$$

Овим је аутор показао да се одговарајући став Г. Ковалевског (в. расправе цитиране под 8) може у многоме упростити, пошто се код истог јавља збир од три члана горњег облика и, место два, шест параметара.