PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 59 (73), 1996, 153–160

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБОБЩЕННО РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Й. Микеш, Ж. Радулович

Communicated by Mileva Prvanović

Резюме. Для многих римановых пространств было показано, что не допускают нетривиальные геодезические и нетривиальные голоморфно-проективные отображения или преобразования. Однако зти результаты часто повторялись в явном, а часто в неявном виде.

В первой части показываем, что некоторые пространства, которые изучали П. Венци, Л. Николеску, Д. Флориа, совпадают с пространствами Й. Микеша. Поэтому результаты указанных выше авторов для геодезических отображений некоторых специальных пространств вытекают из работы Й. Микеша. Далее выделяются специальные обобщенно рекуррентные пространства, не допускающие нетривиальные геодезические и голоморфно-проективные отображения.

Настоящая статья посвящена изучению геодезических и голоморфно-проективных отображений специальных классов римановых пространств V_n. Сначала даем анализ существования ранее исследуемых пространств, а затем выделяем новые классы римановых пространств, которые не допускают нетривиальные геодезические и нетривиальные голоморфно-проективные отображения. Исследования носят локальный характер, рассматриваемые геометрические объекты считаем достаточно гладкими.

1. В 1953 г. Такено и Икеда [**1**] доказали, что центрально симметрические пространства V_4 непостоянной кривизны не допускают нетривиальные геодезические отображения (НГО). Этот результат был в 1954 г. обобщен Синюковым [**2**] для симметрических (S_n^1) и рекуррентных (K_n^1) пространств, которые, как известно, характеризуются соответственно

AMS Subject Classification (1991): Primary 53B55

условиями на тензор Римана $R^h_{ijk,l} = 0$, $R^h_{ijk,l} = \varphi R^h_{ijk}$, где φ_l – некоторый ненулевой вектор; запятой обозначаем ковариантную производную в V_n.

Несколько авторов этот результат обобщило для проективно симметрических (WS^1_n) и проективно рекуррентных (WK^1_n) пространств, которые характеризуются условиями: $W^h_{ijk,l} = 0$, $W^h_{ijk,l} = \varphi_l W^h_{ijk}$, где $W^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}\right)$ – тензор проективной кривизны Вейля, $R_{ij} \equiv R^\alpha_{ij\alpha}$ – тензор Риччи, δ^h_i – символы Кронекера. Однако можно доказать (см. например [**3**]), что $WS^1_n \equiv S^1_n$ и $WK^1_n \equiv K^1_n \cup$ ППК, где ППК – пространства постоянной кривизны. В работе [**3**] доказано, что НГО не допускают полусимметрические пространства, в которых имеет место

$$W^h_{ijk,lm} = a_{lm} W^h_{ijk} + b_m W^h_{ijk}, \tag{1}$$

где a_{lm} и b_m – некоторые тензоры.

Венци [**4**] доказал, что НГО не допускают пространства, в которых выполняются условия (1) при $b_m = 0$. Николеску [**5**], [**6**] и Флореа [**7**] рассматривали ГО пространства, которые охватываются условиями

$$T^h_{ijk,lm} = a_{lm} T^h_{ijk}, \tag{2}$$

где $T^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} + \alpha(\delta^h_k g_{ij,} - \delta^h_j g_{ik})$ и α – некоторый инвариант, a_{lm} – некоторый тензор.

Указанные пространства Венци, Николеску и Флореа являются полусимметрическими пространствами, удовлетворяющими условиям (1). Таким образом, приведенные результаты вытекают из [**3**].

Сначала докажем, что пространства Венци [**4**], удовлетворяющие условиям (1) при $b_m = 0$, являются также полусимметрическими. Для этого проальтернируем (1) по l и m. В силу предположения, получим

$$W^h_{ijk,[lm]} = 0, \tag{3}$$

где $[lm]$ обозначает альтернирование по l и m.

Свернув (3) с g^{ij} (компоненты матрицы обратной к $\|g_{ij}\|$), убедимся что тензор Риччи удовлетворяет условию $R_{ij,[lm]} = 0$. Но тогда из (3) вытекает соотношение $R^h_{ijk,[lm]} = 0$, которое характеризует полусимметрические пространства, что требовалось доказать.

Далее покажем, что пространства Флореа (2) удовлетворяют условиям (1) при $b_m = 0$. Очевидно, соотношения (2) можно записать в форме:

$$R^{h-}_{ijk,lm} = a_{lm} R^h_{ijk} + b_{lm}\left(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik,}\right), \tag{4}$$

где $b_{lm} \equiv a_{lm} - \alpha_{,lm}$. Свертывая (4) по индексам h и k, находим

$$R_{ij,lm} = a_{lm} R_{ij} + (n-1) b_{lm} g_{ij}. \tag{5}$$

Учитывая определение тензора проективной кривизны Вейля и формулы (5), получим формулы (1) при $b_m = 0$.

2. Отметим, что большая часть выделенных ранее пространств V_n, не допускающих нетривиальные геодезические отображения (НГО), являлись полусимметрическими или Риччи полусимметрическими, а те которые допускают НГО, являются пространствами $V_n(0)$, введенными нами в [**11**], [**14**].

Пространством $V_n(0)$ нами названо [**11**], [**14**] риманово пространство V_n допускающее НГО, при котором справедлива система уравнений

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k}; \qquad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} \tag{6}$$

относительно неизвестных невырожденного симметрического тензора a_{ij}, ненулевого вектора λ_i и инварианта μ (этот инвариант по необходимости – постоянная). Здесь запятой обозначена ковариантная производная в V_n, g_{ij} – метрический тензор, (ij) – симметрирование по указанным индексам.

Известно [**11**], [**14**], что римановы пространства V_n, допускающие НГО, являются пространствами $V_n(0)$, если выполняется одно из условий:
(а) $R_{ij} = 0$, где R_{ij} – тензор Риччи;
(б) $T_{i,[lm]} = 0$, где T_i $(\neq 0)$ – некоторый вектор;
(в) $T_{ij,[lm]} = 0$, где T_{ij} $(\neq \overset{0}{T} g_{ij})$ – некоторый вектор второй валентности; $\overset{\sigma}{T}$ – здесь и в дальнейшем некоторые инварианты (такие соотношения выполняются в приводимых, келеровых и неэйнштейновых Риччи полусимметрических $(R_{ij,[lm]} = 0; R_{ij} \neq \overset{0}{T} g_{ij})$ пространствах);
(г) $T_{hijk,[lm]} = 0$, где T_{hijk} $(\neq \overset{0}{T} g_{hi}g_{jk} + \overset{1}{T} g_{hj}g_{ik} + \overset{2}{T} g_{hk}g_{ij})$ – некоторый тензор, при $n > 4$ и при $n = 4$, если T обладает алгебраическими свойствами тензора Римана;
(д)

$$(A^h_{[i}\delta^k_{j]} - A^k_{[i}\delta^h_{j]})_{,[lm]} = R^h_{[\gamma}\delta^k_{\delta]} S^{\gamma\delta}_{ijlm}; \qquad \mathrm{Rank}\,\|A^h_i - A^\alpha_\alpha / n \delta^h_i\| > 2 \tag{7}$$

где $A^h_i \equiv \overset{0}{T}\delta^h_i + \overset{1}{T} R^h_i + \overset{2}{T} R^h_j R^j_i + \dots + \overset{s}{T} R^h_{j_1} R^{j_1}_{j_2} \cdots R^{j_{s-1}}_i$; $R^h_i \equiv R_{\alpha i} g^{\alpha h}$, $S^{\alpha\delta}_{ijlm}$ – производный тензор указанной валентности.

Условия интегрируемости уравнений (6) и их дифференциальные продолжения имеют вид [**11**]:

$$a_{\alpha(i}R^\alpha_{j)kl} = 0; \tag{8_0}$$
$$a_{\alpha(i}R^\alpha_{j)kl,l_1} + \lambda_{(i}R_{j)l_1lk} = 0; \tag{8_1}$$
$$\dots$$
$$a_{\alpha(i}R^\alpha_{j)kl,l_1\dots l_m} + \lambda_{(i}\overset{m}{T}_{j)kll_1l_2\dots l_m} = 0, \tag{8_m}$$

где $R_{hijk} \equiv g_{h\alpha} R^{\alpha}_{ijk}$;

$$\overset{m}{T}_{ijkl_1l_2\dots l_m} \equiv \sum_{s=1}^{m} R_{kjil_s,l_1\dots l_{s-1}l_{s+1}\dots l_m}. \tag{9}$$

Легко убедиться в справедливости следующих лемм:

Лемма 1. *Имеем* $\overset{m}{T}_{ijkl_1l_2\dots l_m} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $R_{hijk,l_1l_2\dots m} = 0$.

Лемма 2. *Имеем* $g^{kl_1}\overset{m}{T}_{ijkl_1l_2\dots l_m} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $R_{ij,l_1l_2\dots l_{m-1}} = 0$.

Доказательство этих лемм сводится к многократному альтернированию соответствующих равенств, при этом учитываются тождества Риччи тензора Римана.

Имеет место

Теорема 1. *Не существует неплоских пространств* $V_n(0)$, *в которых выполняется рекуррентное условие:*

$$R^h_{ijk,l_1l_2\dots l_m} = R^h_{i\alpha\beta} S^{\alpha\beta}_{jkl_1l_2\dots l_m}, \quad (m \geq 1), \tag{10}$$

где S *– некоторый тензор.*

Доказательство. Пусть существуют неплоские пространства $V_n(0)$, в которых справедливы формулы (10). В таких пространствах выполняются условия (6) и (8). Сначала рассмотрим случай, когда $m = 1$. Свернем (10) с a_{sh}, а затем просимметрируем по s и i; учитывая (8_0) и (8_1), получим $\lambda_{(s}R_{i)l_1l_k} = 0$. Так как $\lambda_s \neq 0$, то $R_{hijk} = 0$, что является противоречием предположению, что $V_n(0)$ не является плоским. Таким образом, теорема 1 справедлива для $m = 1$.

Предположив, что теорема верна для $m-1$ $(m > 1)$, покажем, что она верна и для m. Свернем выражение (9) с a_{sh}, а затем просимметрируем по s и i. На основании (8_0) и (8_m) легко убедиться, что $\overset{m}{T}_{jkll_1l_2\dots l_m} = 0$. Из леммы 1 следует, что $R_{hijk,l_1l_2\dots l_m} = 0$. Это условие гарантирует выполнение соотношений (10) при $m-1$. В силу нашего предположения на основании теоремы 1 при $m-1$ таких пространств не существует, следовательно теорема справедлива и для m. Теорема доказана.

Далее имеет место

Теорема 2. *Не существует неэйнштейновых пространств* $V_n(0)$, *в которых имеет место условие:*

$$R_{h[i,j]l_1l_2\dots l_m} = R^{\alpha}_{\beta ij} S^{\beta}_{\alpha hl_1l_2\dots l_m} \quad (m \geq 1). \tag{11}$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, но вместо условий (8) используются модифицированные соотношения, полученные из (8) путем их свертывания с g^{ll_1} и того, что

$$R_{hij\alpha,\beta}g^{\alpha\beta} = R_{j[h,i]}.$$

3. Аналогичные теоремы имеют место и для нетривиальных голоморфно-проективных отображений (НГПО) келеровых пространств K_n.

Четномерное пространство называется келеровым K_n, если в нем наряду с метрическим тензором g_{ij} существует структура F_i^h, удовлетворяющая условиям:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h; \quad F_{(ij)} = 0; \quad F_{i,j}^h = 0, \quad \text{где} \quad F_{ij} \equiv g_{i\alpha}F_j^\alpha.$$

При $e = -1$ K_n называется эллиптическим, а при $e = +1$ – гиперболическим.

Вопросам НГПО келеровых пространств было посвящено много работ. В [**8**], [**10**], [**11**], [**13**] выделены K_n, не допускающие НГПО. В [**11**] нами введен аналог пространств $V_n(0)$ для эллиптических келеровых пространств – пространства $K_n[0]$. В [**16**] пространства $K_n[0]$ введены и для гиперболических K_n.

Пространство K_n нами названо [**11**], [**16**] пространством $K_n[0]$, если оно допускает НГПО, при котором основные уравнения НГПО имеют форму

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} + e\bar{\lambda}_{(i}F_{j)k}; \quad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \tag{12}$$

где μ-константа, a_{ij}-симеметрический невырожденный тензор, удовлетворяющий условиям $\alpha_{\alpha\beta}F_i^\alpha F_j^\beta = -ea_{ij}$, λ_i-ненулевой вектор.

Келеровы пространства K_n, допускающие НГПО, являются пространствами $K_n[0]$, если в них выполняется одно из условий:

1. $T_{i,[lm]} = 0$, где $T_i\,(\neq 0)$ некоторый вектор;
2. $T_{ij,[lm]} = 0$, где $T_{ij}\,(\neq \overset{1}{T}g_{ij} + \overset{2}{T}F_{ij})$ – некоторый тензор;
3. $T_{hijk,[lm]} = 0$, где $T_{hijk}\,(\neq \overset{0}{T}(g_{h[j}g_{k]i} + eF_{h[j}F_{k]i} - 2eF_{hi}F_{jk}))$ – тензор, удовлетворяющий алгебраическим свойствам тензора голоморфно-проективной кривизны;
4. пространства, в которых выполняются условия (7), причем $A_i^h - A_\alpha^\alpha/n\delta_i^h \neq 0$.

В частности, указанные условия выполняются в полусимметрических непостоянной кривизны и неэйнштейновых Риччи полусимметрических пространствах.

Условия интегрируемости уравнений (12) и их дифференциальные продолжения имеют вид:

$$a_{\alpha(i}R_{j)kl}^\alpha = 0; \tag{13_0}$$

$$a_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)kl,l_1} + \lambda_{(i}R_{j)kll_1} - e\bar{\lambda}_{(i}F^{\alpha}_{j)}R_{\alpha kll_1} = 0; \qquad (13_1)$$

$$\cdots$$

$$a_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)kl,l_1\cdots l_m}\lambda_{(i}\overset{m}{T}_{j)kll_1\cdots l_m} - \bar{\lambda}_{(i}F^{\alpha}_{j)}\overset{m}{T}_{\alpha kll_1\cdots l_m} = 0, \qquad (13_m)$$

где тензор $\overset{m}{T}$ определяется формулами (9). Эти формулы подобны соотношениям (8).

Убедимся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3. *Не существует неплоских келеровых пространств $K_n[0]$, для которых справедливы условия (10).*

Доказательство. Пусть существуют неплоские пространства в которых справедливы формулы (10). В таких пространствах выполняются условия (12) и (13). Сначала рассмотрим случай, когда $m = 1$. Свернем (10) с a_{sh}, а затем просимметрируем по s и i; учитывая (13_0) и (13_1), получим

$$\lambda_{(s}R_{i)l_1lk} - e\bar{\lambda}_{(s}F^{\alpha}_{i)}R_{\alpha l_1lk} = 0. \qquad (14)$$

Пусть векторы λ_i и $\bar{\lambda}_i$ неколлинеарны. Тогда $R_{hijk} = \lambda_h S_{ijk} + \bar{\lambda}_h\bar{S}_{ijk}$, где S, $\bar{S}$ – некоторые тензоры. Подставив последнее в (14) убедимся, что $S_{ijk} = 0$. Следовательно $R_{hijk} = \bar{\lambda}_h\bar{S}_{ijk}$. Отсюда вытекает $R_{hijk} = 0$, что является противоречием неплоскости $K_n[0]$. В случае, когда $\bar{\lambda}_i = \rho\lambda_i$, из (14) следует $R_{il_1lk} - e\rho F^{\alpha}_{i}R_{\alpha l_1lk} = 0$. Проальтернируем это выражение по индексам i и l_1; получим $R_{hijk} = 0$. Таким образом, теорема 3 справедлива для $m = 1$.

Предположив что она справедлива для $m - 1$ $(m > 1)$, покажем что теорема 3 верна и для m. Свернем (10) с a_{sh}, а затем просимметрируем по s и i. Учитывая (13_0) и (13_m) получим

$$\lambda_{(s}\overset{m}{T}_{i)jkl_1\cdots l_m} - e\bar{\lambda}_{(s}F^{\alpha}_{i)}\overset{m}{T}_{\alpha jkl_1\cdots l_m} = 0. \qquad (15)$$

Рассмотрим случай, когда λ_i и $\bar{\lambda}_i$ неколлинеарны. Легко показать, что из (15) следует $\overset{m}{T}_{ijkl_1\cdots l_m} = \bar{\lambda}_i S_{jkl_1\cdots l_m}$, где S – некоторый тензор. Проальтернировав последнее по i и l_1, легко получить

$$2R_{hijk,l_2\cdots l_m} + \sum_{s=2}^{m} R_{hijk,l_sl_2\cdots l_{s-1}l_{s+1}\cdots l_m} = \bar{\lambda}_{[h}S_{i]jkl_2\cdots l_m}. \qquad (16)$$

Свернув (16) с $F^h_pF^i_q$, учитывая тождество $R_{hijk} = -eR_{\alpha\beta jk}F^{\alpha}_{h}F^{\beta}_{i}$, получим $\bar{\lambda}_{[h}S_{i]jkl_2\cdots l_m} + \lambda_{[h}F^{\alpha}_{i]}S_{\alpha jkl_2\cdots l_m} = 0$. Отсюда $S_{ijkl_2\cdots l_m} = \bar{\lambda}_i\bar{S}_{jkl_2\cdots l_m}$, где $\bar{S}$ – некоторый тензор. Тогда (16) принимает вид

$$2R_{hijk,l_2l_3\cdots l_m} + \sum_{s=2}^{m} R_{hijk,l_sl_2\cdots l_{s-1}l_{s+1}\cdots l_m} = 0.$$

Из этого условия можно установить, что

$$R_{hijk,l_1l_2\cdots l_{m-1}} = 0. \tag{17}$$

Для этого случая, очевидно, теорема 3 справедлива.

Рассмотрим случай, когда $\bar{\lambda}_i = \rho\lambda_i$. Тогда по необходимости $e = 1$ и из (15) получим

$$\overset{m}{T}_{ijkl_1\cdots l_m} - \rho F_i^{\alpha}\overset{m}{T}_{\alpha jkl_1\cdots l_m} = 0.$$

Легко видеть, что либо $\overset{m}{T} = 0$ либо $\rho = \pm 1$. Первый случай, на основании леммы 1 приводит к (17). Рассмотрим второй случай когда $\rho = \pm 1$, т.е.

$$\overset{m}{T}_{ijkl_1\cdots l_m} \pm F_i^{\alpha}\overset{m}{T}_{\alpha jkl_1\cdots l_m} = 0. \tag{18}$$

После альтернирования (18) по i и l_1, получим

$$2R_{hijk,l_2\cdots l_m} + \sum_{s=2}^{m} R_{hijk,l_sl_2\cdots l_{s-1}l_{s+1}\cdots} \pm \sum_{s=2}^{m} R_{hijk,\alpha l_2\cdots l_{s-1}l_{s+1}\cdots l_m}F_{ls}^{\alpha} = 0.$$

Поочередным альтернированием этого соотношения убедимся что ковариантное дифференцирование тензора Римана до $m-1$ порядка включительно не зависит от порядка дифференцирования. Таким образом,

$$(m+1)R_{hijk,l_2l_3\cdots l_m} \pm \sum_{s=2}^{m} R_{hijk,\alpha l_2\cdots l_{s-1}l_{s+1}\cdots l_m}F_{l_s}^{\alpha} = 0.$$

Отсюда можно показать справедливость (17). На этом, как нетрудно видеть, доказательство теоремы 3 полностью завершается.

Далее справедлива

Теорема 4. *Не существует неэйнштейновых келеровых пространств $K_n[0]$, в которых выполняются условия (11).*

Доказательство ввиду аналогии с предыдущим опускаем.

Справедлива

Теорема 5. *Полусимметрические непостоянной кривизны или неэйнштейновы Риччи полусимметрические или неплоские приводимые пространства V_n $(n > 2)$, в которых выполняются рекуррентные формулы (10) (либо (11), при $R_{ij} \neq Tg_{ij}$), не допускают ни нетривиальных геодезических отображений, ни нетривиальных проективных преобразований, ни нетривиальных голоморфно-проективных отображений, ни нетривиальных голоморфно-проективных преобразований.*

Доказательство теоремы 5 следует из того, что полусимметрические, Риччи полусимметрические, приводимые и другие римановы пространства, допускающие указанные отображения (или преобразования), как было ранее сказано, являются либо пространствами $V_n(0)$ либо $K_n[0]$. Согласно теоремам 1–4 таких пространств, в которых дополнительно выполняются условия (10) или (11), не существует.

Указанные теоремы обобщают результаты [**1**]–[**16**].

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Takeno, M. Ikeda, *Theory of the spherically symmteric spaces-times*, VII, *Space-times with corresponding geodesics*, J. Sci. Hiroshima Univ. **17** (1953), 75–81.
2. Н.С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, Москва, 1979.
3. Й. Микеш, *О геодезических отображениях полусимметрических римановых пространств*, Деп. в ВИНИТИ, 1977, № 3924–76
4. P. Venzi, *On geodesic mapping on Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Tensor. **32** (1978), 192–198.
5. L. Nicolescu, *Les espaces de Riemann en représentation subgeodesique*, Tensor **32** (1978), 182–187.
6. L. Nicolescu, *Asupra spatilor pseudo-Riemannienne in correspondenta geodesica*, Lucr. coloc. nat. geom. topol., Busteni, 27–30 iun, 1981, Bucuresti, 1983, pp 249–257.
7. D. Florea, *Spatii Riemann in correspondenta geodesica*, Stud. si cerc. mat. **40** (1988), 467–470.
8. M. Prvanović, *Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci recurrent Riemannian spaces*, Tensor **12** (1962), 219–226.
9. T. Sakaguchi, *On the holomorphically projective correspondence between Kählerian spaces preserving complex structure*, Hokhaido Math. J. **3** (1974), 203–212.
10. В.В. Домашев, Й. Микеш, *К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств*, Матем. заметки **28** (1978), 297–303.
11. Й. Микеш, *Геодезические и голоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств*, Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Одесса, 1979.
12. Й. Микеш, *О геодезических отображениях Риччи-2-симметрических римановых пространств*, Матем. заметки **28** (1980), 313–317.
13. И.Н. Курбатова, *О проблеме квазиголоморфно-проективных отображений K-пространств*, Деп. в ВИНИТИ, № 2429–79
14. J. Mikeš, *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 46 Topics in diff. geom., Debrecen (Hungary), 1984, 793–813.
15. В.С. Собчук, *О геодезическом отображении m-симметрических римановых пространств*, Тезисы сообщений, IX Всесоюзн. геометр. конф. Штиинца, Кишинев, 1988, 291.
16. J. Mikeš, *F-planar mappings and transformations*, Diff. Geom. Appl., Proc. Conf. 1986, Brno, Czechoslovakia, 245–254.

Josef Mikesh
Department of Mathematics
Faculty of Technology
Zlin
Czech Republik

Željko Radulović
Department of Mathematics
University of Odessa
Petra Velikogo 2
Odessa, Ukraine

(Received 11 10 1994)
(Revised 16 10 1995)