PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 58 (72), (1995), 167–192
Slobodan Aljančić memorial volume

# ОБ ОЦЕНКАХ СМЕШАННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ

**М.К. Потапов, Б.В. Симонов, Б. Лакович**

**Abstract.** Functions having mixed generalized Weyl's derivatives are considered. Some upper and lower estimates for the module of smoothness of such derivatives by means of function's proper module of smoothness are given.

**Резюме.** Рассматриваются функции, имеющие смешанные обобщенные производные в смисле Вейля. Для модулей гладкости этих производных приведены оценки сверху и снизу через модули гладкости самой функции.

## 1. Обозначения

Пусть $L_p$ $(1 < p < \infty)$ пространство всех измеримых функций двух переменных $f = f(x_1, x_2), 2\pi$-периодических по каждому переменному, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^p dx_1 dx_2\right)^{1/p} < \infty;$$

$L_p^0$ $(1 < p < \infty)$ множество функций $f(x_1, x_2)$ из $L_p$, для которых

$$\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0 \qquad \text{для почти всех } x_2$$

$$\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0 \qquad \text{для почти всех } x_1.$$

$\omega_{\alpha_i}(f;\delta_i)_p$ $(i = 1,2)$ частный модуль гладкости (в метрике $L_p$) порядка $\alpha_i$ $(\alpha_i > 0)$ по переменной $x_i$ функции $f(x_1,x_2) \in L_p$:

$$\omega_{\alpha_1}(f;\delta_1)_p = \sup_{|h_1|\le\delta_1} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1} f\|_p = \sup_{|h_1|\le\delta_1} \left\| \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1} \binom{\alpha_1}{k_1} f(x_1 + (\alpha_1 - k_1)h_1, x_2) \right\|_p$$

---

AMS *Subject Classification* (1991): Primary 42A16

$$\omega_{\alpha_2}(f;\delta_2)_p = \sup_{|h_2|\le\delta_2}\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2} f\|_p = \sup_{|h_2|\le\delta_2}\left\|\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2}\binom{\alpha_2}{k_2} f(x_1, x_2+(\alpha_2-k_2)h_2)\right\|_p$$

где $\binom{\alpha_i}{k_i} = \alpha_i(\alpha_i-1)\ldots(\alpha_i-k_i+1)/k!$ $(i=1,2)$; $\omega_{\alpha_1\alpha_2}(f;\delta_1,\delta_2)_p$ - смешанный модуль гладкости (в метрике $L_p$) порядка $\alpha_1,\alpha_2$ $(\alpha_1>0,\alpha_2>0)$ по переменным $x_1,x_2$ соответственно функции $f(x_1,x_2)\in L_p$:

$$\omega_{\alpha_1\alpha_2}(f;\delta_1,\delta_2) = \sup_{|h_1|\le\delta_1,|h_2|\le\delta_2}\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2} f)\|_p.$$

Всюду ниже мы не будем различать эквивалентные функции (отличающиеся на множестве двумерной меры нуль). Пусть

$$S_{n\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2)\mathcal{D}_n(t_1)dt_1,$$

$$S_{\infty m}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,x_2+t_2)\mathcal{D}_m(t_2)dt_2,$$

$$S_{nm}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)\mathcal{D}_n(t_1)\mathcal{D}_m(t_2)dt_1dt_2,$$

$$\mathcal{D}_m(x) = \frac{\sin(m+1/2)x}{2\sin x/2}.$$

Рассмотрим функцию $f\in L_p$. Тогда ее ряд Фурье может быть записан в виде

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(a_{n_1n_2}^{(1)}\cos n_1x_1\cos n_2x_2$$
$$+a_{n_1n_2}^{(2)}\sin n_1x_1\cos n_2x_2 + a_{n_1n_2}^{(3)}\cos n_1x_1\sin n_2x_2 + a_{n_1n_2}^{(4)}\sin n_1x_1\sin n_2x_2)$$
$$\equiv\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A_{n_1n_2}(x_1,x_2). \tag{1}$$

Обозначим

$$b_{n_1n_2} = a_{n_1n_2}^{(1)} + a_{n_1n_2}^{(2)} + a_{n_1n_2}^{(3)} + a_{n_1n_2}^{(4)},\ \ n_1,n_2=1,2,\ldots;$$

$$\Delta_{m_1m_2} = \sum_{n_1=[2^{m_1-1}]}^{2^{m_1}-1}\ \sum_{n_2=[2^{m_2-1}]}^{2^{m_2}-1} A_{n_1n_2}(x_1,x_2),\ \ m_1,m_2=0,1,\ldots,$$

где $[2^{m_i-1}]=0$ для $m_i=0$ и $[2^{m_i-1}]=2^{m_i-1}$ для $m_i=1,2,\ldots$.

Пусть $M_{k_1k_2}$ — класс функции $f\in L_p^0$, коэффициенты Фурье которых неотрицательны и для данных неотрицательных чисел $k_1$ и $k_2$ удовлетворяют условиям: $(i=1,2,3,4;\ \ n_1,n_2=1,2,3,\ldots)$

$$\Delta_{n_1n_2}^{(1,0)}a_{n_1n_2}^{(i)}n_1^{k_1}n_2^{k_2} = a_{n_1n_2}^{(i)}n_1^{k_1}n_2^{k_2} - a_{n_1+1\ n_2}^{(i)}(n_1+1)^{k_1}n_2^{k_2}\ge 0,$$

$$\Delta^{(0,1)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1} n_2^{k_2} = a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1} n_2^{k_2} - a^{(i)}_{n_1\ n_2+1} n_1^{k_1} (n_2+1)^{k_2} \geq 0,$$
$$\Delta^{(1,1)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1} n_2^{k_2} = \Delta^{(1,0)} (\Delta^{(0,1)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1} n_2^{k_2}) \geq 0,$$

$$a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1} n_2^{k_2} \to 0 \ \ (n_1 \to \infty, n_2 \to \infty);$$

$\Lambda$ — класс функции $f \in L_p^0$, коэффициенты которых неотрицательны и равны нулю, если $n_1 \neq 2^{m_1}$ или если $n_2 \neq 2^{m_2}$, $m_1, m_2 = 0, 1, \ldots$.

Через $\alpha(t_1, t_2)$ обозначается некоторая неотрицательная функция, которая измерима на $[0, 2\pi]^2$, суммируема на $[\delta_1, 2\pi] \times [\delta_2, 2\pi]$ для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 2\pi)$, $\int_\pi^{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 > 0$ удовлетворяет $(\tau, \sigma)$-условию, то есть существуют положительные числа $\tau$, $\sigma$ такие, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_1^\tau t_2^\sigma dt_1 dt_2 < \infty.$$

Пусть $\tau = k_1 \theta, \sigma = k_2 \theta$, где $0 < k_1, k_2, \theta < \infty$. Тогда

$$\lambda = \Bigg\{ \lambda_{n_1 n_2} = \Bigg( \int_{1/n_1}^{2\pi} \int_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$
$$+ n_1^{k_1 \theta} \int_0^{1/n_1} \int_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_1^{k_1 \theta} dt_1 dt_2 + n_2^{k_2 \theta} \int_{1/n_1}^{2\pi} \int_0^{1/n_2} \alpha(t_1, t_2) t_2^{k_2 \theta} dt_1 dt_2$$
$$+ n_1^{k_1 \theta} n_2^{k_2 \theta} \int_0^{1/n_1} \int_0^{1/n_2} \alpha(t_1, t_2) t_1^{k_1 \theta} t_2^{k_2 \theta} dt_1 dt_2 \Bigg)^{1/\theta}, n_1, n_2 = 1, 2, \ldots \Bigg\}$$

последовательность положительных чисел, построенная по фукции $\alpha(t_1, t_2)$; $\sigma(\lambda, f)$ - преобразованный с помощью этой последовательности ряд (1), то есть

$$\sigma(\lambda, f) \equiv \sum_{n_1=1}^\infty \sum_{n_2=1}^\infty \lambda_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2).$$

Введем класс функцiји $M^{(\theta)}_{k_1 k_2}$ следующим образом: если $0 < \theta \leq 1$, то положим $M^{(\theta)}_{k_1 k_2} = M_{k_1 k_2}$; если $\theta > 1$, то $M^{(\theta)}_{k_1 k_2}$ — класс функций $f(x_1, x_2) \in L_p^0$, коэффициенты Фурье которых неотрицательны и для данных положительных чисел $k_1, k_2, \theta$ и последовательности $\{\lambda_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяют условиям: $(i = 1, 2, 3, 4; n_1, n_2 = 1, 2, \ldots)$

$$\Delta^{(1,0)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1(\theta+1)} n_2^{k_2(\theta+1)} / \lambda^\theta_{n_1 n_2} \geq 0,$$

$$\Delta^{(0,1)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1(\theta+1)} n_2^{k_2(\theta+1)} / \lambda^{\theta}_{n_1 n_2} \geq 0,$$

$$\Delta^{(1,1)} a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1(\theta+1)} n_2^{k_2(\theta+1)} / \lambda^{\theta}_{n_1 n_2} \geq 0,$$

$$a^{(i)}_{n_1 n_2} n_1^{k_1(\theta+1)} n_2^{k_2(\theta+1)} / \lambda^{\theta}_{n_1 n_2} \to 0 \ \ (n_1 \to \infty, n_2 \to \infty).$$

Заметим, что в случае $\theta > 1$ класс $M^{(\theta)}_{k_1 k_2}$ состоит не только из констант и справедливо вложение $M^{(\theta)}_{k_1 k_2} \subset M_{k_1 k_2}$.

Расмотрим еще последовательность положительных чисел $\{\mu(n_1, n_2)\}$:

$$\mu(0,0) = \int\limits_1^{2\pi} \int\limits_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2, \quad \mu(0,n_2) = \int\limits_1^{2\pi} \int\limits_{2^{-n_2}}^{2^{-(n_2-1)}} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2,$$

$$\mu(n_1,0) = \int\limits_{2^{-n_1}}^{2\pi} \int\limits_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2, \quad \mu(n_1,n_2) = \int\limits_{2^{-n_1}}^{2^{-(n_1-1)}} \int\limits_{2^{-n_2}}^{2^{-(n_2-1)}} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2,$$
$$n_1, n_2 = 1, 2, \ldots .$$

Если $F(\delta_1,\delta_2) \geq 0$ и $G(\delta_1,\delta_2) \geq 0$ для всех $\delta_i \in (0, 2\pi]$ $(i = 1, 2)$, то запись $F(\delta_1,\delta_2) \ll G(\delta_1,\delta_2)$ означает, что существует положительная постоянная $c$, не зависящая от $\delta_1, \delta_2$ и такая, что $F(\delta_1,\delta_2) \leq cG(\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(\delta_1,\delta_2) \ll G(\delta_1,\delta_2)$ и $G(\delta_1,\delta_2) \ll F(\delta_1,\delta_2)$, то будем писать $F(\delta_1,\delta_2) \asymp G(\delta_1,\delta_2)$.

## 2. Формулировка основных утверждений

Для сокращения записи введем следующее обозначение:

$$\Phi(\delta_1,\delta_2) = \Bigg\{ \int\limits_0^{\delta_1} \int\limits_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2) \omega^{\theta}_{k_1+\beta_1 \ k_2+\beta_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2$$
$$+ \delta_2^{\beta_2\theta} \int\limits_0^{\delta_1} \int\limits_{\delta_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) t_2^{-\beta_2\theta} \omega^{\theta}_{k_1+\beta_1 \ k_2+\beta_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2$$
$$+ \delta_1^{\beta_1\theta} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi} \int\limits_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2) t_1^{-\beta_1\theta} \omega^{\theta}_{k_1+\beta_1 \ k_2+\beta_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2$$
$$+ \delta_1^{\beta_1\theta} \delta_2^{\beta_2\theta} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi} \int\limits_{\delta_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) t_1^{-\beta_1\theta} t_2^{-\beta_2\theta} \omega^{\theta}_{k_1+\beta_1 \ k_2+\beta_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \Bigg\}^{1/\theta}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\max(2,p)\le\theta<\infty$ *и для некоторых положительных чисел* $k_1,k_2$ *функция* $\alpha(t_1,t_2)$ *удовлетворяет* $(\tau,\sigma)$*-условию со значением* $\tau=k_1\theta$, $\sigma=k_2\theta$. *Если для функции* $f(x_1,x_2)\in L_p$ *ряд* $\sigma(\lambda,f)$ *есть ряд Фурье некоторой функции* $\varphi(x_1,x_2)\in L_p$, *то* $\Phi(\delta_1,\delta_2)\ll\omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p$.

Теорема 2. *Пусть* $0<\theta\le\min(p,2)$ *и для некоторых положительных чисел* $k_1$, $k_2$ *функция* $\alpha(t_1,t_2)$ *удовлетворяет* $(\tau,\sigma)$*-условию со значениями* $\tau=k_1\theta$, $\sigma=k_2\theta$, *а также условиям*

$$\int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\asymp\int\limits_{\delta_1/2}^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2/2}^{\delta_2}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$\asymp\delta_2^{-k_2\theta}\int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\delta_2}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2\asymp\delta_1^{-k_1\theta}\int\limits_{0}^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}dt_1dt_2$$

$$\asymp\delta_1^{-k_1\theta}\delta_2^{-k_2\theta}\int\limits_{0}^{\delta_1}\int\limits_{0}^{\delta_2}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2,\quad\forall\delta_1,\delta_2\in(0,\pi).\tag{2}$$

*Если для функции* $f(x_1,x_2)\in L_p$

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta}(f;t_1,t_2)_pdt_1dt_2<\infty\tag{3}$$

*то существует функция* $\varphi(x_1,x_2)\in L_p$ *с рядом Фурье* $\sigma(\lambda,f)$ *и*

$$\Phi(\delta_1,\delta_2)\gg\omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p.\tag{4}$$

Теорема 3. *Если функция* $f(x_1,x_2)\in M_{k_1k_2}^{(\theta)}\cap L_p$, *то*

а) *утверждение теоремы 1 справедливо при* $1<p\le\theta<\infty$;

б) *утверждение теоремы 2 справедливо при* $0<\theta\le p<\infty$.

Теорема 4. *Если функция* $f(x_1,x_2)\in\Lambda\cap L_p$, *то*

а) *утверждение теоремы 1 справедливо при* $2\le\theta<\infty$;

б) *утверждение теоремы 2 справедливо при* $0<\theta\le 2$.

Следствия. *Пусть функция* $\alpha(t_1,t_2)$ *для некоторых положительных чисел* $k_1$, $k_2$ *удовлетворяет* $(\tau,\sigma)$*-условию со значениями* $\tau=k_1\theta$, $\sigma=k_2\theta$, *а также условиям* (2).

а) *Если* $\theta=2$ *и* $f(x_1,x_2)\in L_p$, *то для существования функции* $\varphi(x_1,x_2)\in L_2$ *с рядом* $\sigma(\lambda,f)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{2}(f;t_1,t_2)_2dt_1dt_2<\infty,$$

*причем* $\forall \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ \Phi(\delta_1, \delta_2) \asymp \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; \delta_1, \delta_2)_2$.

б) *Если* $\theta = p$ *и* $f(x_1, x_2) \in M^{\theta}_{k_1k_2} \cap L_p$, *то для существования функции* $\varphi(x_1, x_2) \in L_p$ *с рядом* $\sigma(\lambda, f)$ *необходимо и достатачно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\omega^{p}_{k_1k_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 < \infty,$$

*причем* $\forall \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\quad \Phi(\delta_1, \delta_2) \asymp \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; \delta_1, \delta_2)_p$.

в) *Если* $\theta = 2$ *и* $f(x_1, x_2) \in \Lambda \cap L_p$, *то для существования функции* $\varphi(x_1, x_2) \in L_p$ *с рядом Фурье* $\sigma(\lambda, f)$ *необходимо и достатачно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\omega^{2}_{k_1k_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 < \infty,$$

*причем* $\forall \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\quad \Phi(\delta_1, \delta_2) \asymp \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; \delta_1, \delta_2)_p$.

## 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. [**1**] *Если* $0 < \theta \le \min(p, 2)$ *и для функции* $f(x_1, x_2) \in L_p$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 < \infty,$$

*то существует функция* $\varphi(x_1, x_2) \in L_p$ *с рядом* $\sigma(\lambda, f)$.

Лемма 2. [**2**] *Пусть* $f(x_1, x_2) \in L^0_p$, $1 < p < \infty$, *и имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1n_2}(x_1, x_2)$. *Тогда*

$$\|f\|_p \asymp \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\langle \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} \Delta^2_{m_1m_2} \right\rangle^{p/2} dx_1 dx_2\right)^{1/p}.$$

Лемма 3. [**2**] *Пусть* $f(x_1, x_2) \in L^0_p$, $1 < p < \infty$, *и имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} A_{n_1n_2}(x_1, x_2)$, *а последовательность чисел* $\{\lambda_{n_1n_2}\}$ *такова, что* $|\lambda_{n_1n_2}| \le M$ *и*

$$\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} |\lambda_{m_1n_2} - \lambda_{m_1+1\ n_2}| \le M, \quad \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{n_1m_2} - \lambda_{n_1\ m_2+1}| \le M,$$

$$\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{m_1m_2} - \lambda_{m_1+1\ m_2} - \lambda_{m_1\ m_2+1} + \lambda_{m_1+1\ m_2+1}| \le M$$

*для всех* $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ *есть ряд Фурье некоторой функции* $\varphi(x_1, x_2) \in L_p^0$, *причем* $\|\varphi\|_p \leq C\|f\|_p$, *где постоянная* $C$ *не зависит от функции* $f(x_1, x_2)$.

Лемма 4. [**3, 4, 5**] *Пусть* $f(x_1, x_2) \in L_p$, $1 < p < \infty$, *и имеет ряд Фурье* (1). *Тогда*

а) $$\omega_{\beta_1\beta_2}(f; \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2})_p \asymp m_1^{-\beta_1} m_2^{-\beta_2} \left\| S_{m_1 m_2}^{(\beta_1,\beta_2)}(f; x_1, x_2) \right\|_p$$
$$+ m_1^{-\beta_1} \left\| S_{m_1 \infty}^{(\beta_1,0)}(f; x_1, x_2) - S_{m_1 m_2}^{(\beta_1,0)}(f; x_1, x_2) \right\|_p$$
$$+ m_2^{-\beta_2} \left\| S_{\infty m_2}^{(0,\beta_2)}(f; x_1, x_2) - S_{m_1 m_2}^{(0,\beta_2)}(f; x_1, x_2) \right\|_p$$
$$+ \left\| f(x_1, x_2) + S_{m_1 m_2}(f; x_1, x_2) - S_{m_1 \infty}(f; x_1, x_2) - S_{\infty m_2}(f; x_1, x_2) \right\|_p$$
$$\asymp \left\| \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p + m_1^{-\beta_1} m_2^{-\beta_2} \left\| \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} n_1^{\beta_1} n_2^{\beta_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p$$
$$+ m_1^{-\beta_1} \left\| \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} n_1^{\beta_1} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p + m_2^{-\beta_2} \left\| \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2} n_2^{\beta_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p.$$

б) *Если* $f(x_1, x_2) \in M_{\tau\sigma}$, *то*

$$\omega_{\beta_1\beta_2}(f; \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2})_p \asymp \left\{ \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} b_{n_1 n_2}^p n_1^{p-2} n_2^{p-2} \right.$$
$$+ m_1^{-\beta_1 p} m_2^{-\beta_2 p} \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} b_{n_1 n_2}^p n_1^{\beta_1 p + p - 2} n_2^{\beta_2 p + p - 2}$$
$$+ m_1^{-\beta_1 p} \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} n_1^{\beta_1 p + p - 2} n_2^{p-2} b_{n_1 n_2}^p$$
$$\left. + m_2^{-\beta_2 p} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2} n_1^{p-2} n_2^{\beta_2 p + p - 2} b_{n_1 n_2}^p \right\}^{1/p}.$$

в) *Если* $f(x_1, x_2) \in \Lambda$ , *то*

$$\omega_{\beta_1\beta_2}(f; 2^{-m_1}, 2^{-m_2})_p \asymp \left\{ 2^{-2(m_1\beta_1 + m_2\beta_2)} \sum_{n_1=0}^{m_1} \sum_{n_2=0}^{m_2} 2^{2(n_1\beta_1 + n_2\beta_2)} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \right.$$
$$+ 2^{-2m_1\beta_1} \sum_{n_1=0}^{m_1} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} 2^{n_1\beta_1} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 + \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2+1}^{\infty} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2$$
$$\left. + 2^{-2m_2\beta_2} \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{m_2} 2^{2n_2\beta_2} b_{2^{n_1} 2^{n_2}}^2 \right\}^{1/2}.$$

Лемма 5. [**6**] *Пусть функция $\alpha(t)$ измерима на $[0,2\pi]$, суммируема на $[\delta,2\pi]$ для любого $\delta\in(0,2\pi)$ и удовлетворяет $\sigma$-условию, то есть существует положительное число $\sigma$ такое, что $\int_0^{2\pi}\alpha(t)t^\sigma dt<\infty$. Тогда последовательность чисел*

$$\lambda_n=\left\{\int\limits_{1/n}^{2\pi}\alpha(t)dt+n^{k\theta}\int\limits_0^{1/n}\alpha(t)t^{k\theta}dt\right\}^{1/\theta},\quad n=1,2,\dots,$$

*где $\sigma=k\theta$ $(0<k,\ \theta<\infty)$, имеет следующие свойства:*

*а)* $\lambda_n\le\lambda_{n+1}$*;* *б)* $\lambda_{2n}\ll\lambda_n$*;* *в)* $\dfrac{\lambda_n}{n^k}\ge\dfrac{\lambda_{n+1}}{(n+1)^k}$.

Лемма 6. [**7**] *Пусть на $[a,b]$ задана последовательность измеримых функций $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots$. Если существует такая постоянная $k$, что при всех $n$ и $t$ будет $|\varphi_n(t)|<k$ и если при всяком $c$ $(a\le c\le b)$ $\lim_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(t)dt=0$, то для любой суммируемой на $[a,b]$ фукнции $f(t)$*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\varphi_n(t)dt=0.$$

Лемма 7. *Пусть функция $\alpha(t)$ измерима на $[0,2\pi]$, суммируема на $[\delta,2\pi]$ для любого $\delta\in(0,2\pi)$ и удовлетворяет $\sigma$-условию, то есть существует положительное число $\sigma$ такое что $\int_0^{2\pi}\alpha(t)t^\sigma dt<\infty$.*

*Тогда для любого $\delta\in(0,2\pi)$*

$$\left(\int\limits_\delta^{2\pi}\alpha(t)dt+\delta^{-\sigma}\int\limits_0^\delta\alpha(t)t^\sigma dt\right)'=-\sigma\delta^{-\sigma-1}\int\limits_0^\delta\alpha(t)t^\sigma dt.$$

*Доказательство.* Возьмем любую точку $\delta\in(0,2\pi)$ и зафиксируем ее. Далее, возьмем последовательность чисел $\{\Delta\delta_n\}$ такую, что $\Delta\delta_n>0,\ \delta+\Delta\delta_n\in(0,2\pi)\ (n=1,2,\dots),\ \lim\limits_{n\to\infty}\Delta\delta_n=0$. Обозначим

$$\lambda(\delta)=\int\limits_\delta^{2\pi}\alpha(t)dt+\delta^{-\sigma}\int\limits_0^\delta\alpha(t)t^\sigma dt.$$

Рассмотрим

$$\frac{\lambda(\delta+\Delta\delta_n)-\lambda(\delta)}{\Delta\delta_n}=\frac{1}{\Delta\delta_n}\left(-\int\limits_\delta^{\delta+\Delta\delta_n}\alpha(t)dt+\delta^{-\sigma}\int\limits_\delta^{\delta+\Delta\delta_n}\alpha(t)t^\sigma dt\right)$$

$$+\frac{1}{\Delta\delta_n}[(\delta+\Delta\delta_n)^{-\sigma}-\delta^{-\sigma}]\int\limits_0^{\delta+\Delta\delta_n}\alpha(t)t^\sigma dt = A_n(1)+A_n(2).$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}A_n(2) = -\sigma\delta^{-\sigma-1}\int\limits_0^{\delta}\alpha(t)t^\sigma dt.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(t) = \chi_{(\delta,\delta+\Delta\delta_n)}(t)\left(\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\sigma - 1\right)\frac{1}{\Delta\delta_n}.$$

Тогда

$$A_n(1) = \int\limits_\delta^{2\pi}\chi_n(t)\alpha(t)dt,$$

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)| &= \chi_{(\delta,\delta+\Delta\delta_n)}(t)\frac{t^\sigma-\delta^\sigma}{\delta^\sigma\Delta\delta_n} = (\delta<\xi<t<\delta+\Delta\delta_n)\\ &= \sigma\xi^{\sigma-1}\frac{t-\sigma}{(\delta^\sigma\Delta\delta_n)\chi_{(\delta,\delta+\Delta\delta_n)}(t)}.\end{aligned}$$

Если $\sigma\geq 1$, то $|\varphi_n(t)|\leq\dfrac{\sigma(2\pi/\delta)^\sigma}{2\pi}$. Если $0<\sigma<1$, то $|\varphi_n(t)|\leq\sigma\delta^{-2\sigma+1}$. Таким образом, для любого $n=1,2,\dots$ имеем

$$|\varphi_n(t)|<\sigma\max\left(\frac{(2\pi/\delta)^\sigma}{2\pi},\delta^{-2\sigma+1}\right)+1.$$

Пусть $c$ таково, что $\delta<c\leq 2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int\limits_\delta^c\varphi_n(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\left(\delta^{-\sigma}\int\limits_\delta^{\delta+\Delta\delta_n}t^\sigma dt - \int\limits_\delta^{\delta+\Delta\delta_n}dt\right)\frac{1}{\Delta\delta_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sigma+1)^{-1}\delta^{-\sigma}[(\delta+\Delta\delta_n)^{\sigma+1}-\delta^{\sigma+1}]}{\Delta\delta_n}-1=0,\end{aligned}$$

то есть последовательность $\varphi_n(t)$ удовлетворяет условиям леммы 6, в соответствии с которой $\lim_{n\to\infty}A_n(1)=0$. Далее, возьмем последовательность чисел $\{\Delta\delta_n\}$ такую, что $\Delta\delta_n<0$, $\delta+\Delta\delta_n\in\Big(\delta/2,\delta\Big)$ $(n=1,2,\dots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta\delta_n=0$. Тогда оценки для $|\varphi_n(t)|$ будут следующими: если $\sigma\geq 1$, то $|\varphi_n(t)|\leq\sigma/\delta$; если же $0<\sigma<1$, то $|\varphi_n(t)|\leq\sigma 2^{1-\sigma}/\delta$. Таким образом, в этом случае для любого $n=1,2,\dots$ имеем

$$|\varphi_n(t)|<\sigma\delta^{-1}\max(1,2^{1-\sigma})+1.$$

Пусть $c$ таково, что $\delta/2 \le c < \delta$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\delta}^{c}\varphi_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\left(\delta^{-\sigma}\int\limits_{\delta}^{\delta+\Delta\delta_n} t^{\sigma}dt - \int\limits_{\delta}^{\delta+\Delta\delta_n} dt\right)\frac{1}{\Delta\delta_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta\delta_n}\left[\frac{\delta^{-\sigma}}{\sigma+1}((\delta+\Delta\delta_n)^{\sigma+1} - \delta^{\sigma+1}) - \Delta\delta_n\right] = 0.$$

Применяя лемму 6, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(1) = 0$.

Тем самым доказано, что $\lambda'(\delta) = -\sigma\delta^{-\sigma-1}\int\limits_0^{\delta}\alpha(t)t^{\sigma}dt$.

Лемма 8. *Последовательность чисел* $\{\lambda_{n_1n_2}\}$ *имеет следующие свойства: для любых* $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$

а) $\lambda_{n_1n_2} \le \lambda_{n_1\, n_2+1}, \quad \lambda_{n_1n_2} \le \lambda_{n_1+1\, n_2}$;

б) $\dfrac{\lambda_{n_1n_2}}{{n_1}^{k_1}} \ge \dfrac{\lambda_{n_1+1\, n_2}}{(n_1+1)^{k_1}}, \quad \dfrac{\lambda_{n_1n_2}}{{n_2}^{k_2}} \ge \dfrac{\lambda_{n_1\, n_2+1}}{(n_2+1)^{k_2}}$,

в) $\lambda_{2n_1n_2} \ll \lambda_{n_1n_2}, \quad \lambda_{n_12n_2} \ll \lambda_{n_1n_2}$;

г) $\dfrac{\lambda_{m_1m_2}}{\lambda_{2^{n_1}2^{n_2}}} \le M, \quad \dfrac{\lambda_{2^{n_1}2^{n_2}}}{\lambda_{m_1m_2}} \le M, \quad 2^{n_1-1} \le m_1 < 2^{n_1}, \quad 2^{n_2-1} \le m_2 < 2^{n_2}$;

д) $$\lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1}|\lambda_{m_1m_2} - \lambda_{m_1+1\, m_2} - \lambda_{m_1\, m_2+1} + \lambda_{m_1+1\, m_2+1}| \le M,$$

$$\lambda_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1}|\lambda^{-1}_{m_1m_2} - \lambda^{-1}_{m_1+1\, m_2} - \lambda^{-1}_{m_1\, m_2+1} + \lambda^{-1}_{m_1+1\, m_2+1}| \le M;$$

е) $$\lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}|\lambda_{m_1m_2} - \lambda_{m_1+1\, m_2}| \le M,$$

$$\lambda_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}|\lambda^{-1}_{m_1m_2} - \lambda^{-1}_{m_1+1\, m_2}| \le M, \ \ 2^{n_2-1} \le m_2 < 2^{n_2};$$

ж) $$\lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1}|\lambda_{m_1m_2} - \lambda_{m_1\, m_2+1} \le M,$$

$$\lambda_{2^{n_1}2^{n_2}}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1}|\lambda^{-1}_{m_1m_2} - \lambda^{-1}_{m_1\, m_2+1}| \le M, \ \ 2^{n_1-1} \le m_1 < 2^{n_1}.$$

*Доказательство.* Покажем справедливость пункта а). Используя лемму 5, имеем

$$\lambda^{\theta}_{n_1 n_2} = \int\limits_{1/n_1}^{2\pi} \left[ \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_{0}^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2 \right] dt_1$$

$$+ n_1^{k_1\theta} \int\limits_{0}^{1/n_1} t_1^{k_1\theta} \left[ \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_{0}^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2 \right] dt_1 \le$$

$$\le \int\limits_{1+1/n_1}^{2\pi} \left[ \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_{0}^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2 \right] dt_1$$

$$+ (n_1+1)^{k_1\theta} \int\limits_{0}^{1+1/n_1} t_1^{k_1\theta} \left[ \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_{0}^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2 \right] dt_1$$

$$= \lambda^{\theta}_{n_1+1\ n_2}.$$

Аналогично проверяются остальные неравенства пунктов а), б), в), г). Проверим пункт д). Пусть $\theta \ne 1$. Для простоты записи введем следующее обозначение

$$\beta(t_1,n_2) = \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_{0}^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2.$$

Используя теорему Лагранжа, которую мы можем применить в силу справедливости леммы 7, а также свойства последовательности $\{\lambda_{n_1 n_2}\}$ из пунктов а), в), г) этой леммы, будем иметь:

$$|(\lambda_{m_1 m_2} - \lambda_{m_1+1\ m_2}) - (\lambda_{m_1\ m_2+1} - \lambda_{m_1+1\ m_2+1})|$$

$$= \Bigg| \Bigg[ \left( \int\limits_{1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1,m_2)dt_1 + m_1^{k_1\theta} \int\limits_{0}^{1/m_1} \beta(t_1,m_2)t_1^{k_1\theta}dt_1 \right)^{1/\theta}$$

$$- \left( \int\limits_{1+1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1,m_2)dt_1 + (m_1+1)^{k_1\theta} \int\limits_{0}^{1+1/m_1} \beta(t_1,m_2)t_1^{k_1\theta}dt_1 \right)^{1/\theta} \Bigg]$$

$$- \Bigg[ \left( \int\limits_{1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1,m_2+1)dt_1 + m_1^{k_1\theta} \int\limits_{0}^{1/m_1} \beta(t_1,m_2+1)t_1^{k_1\theta}dt_1 \right)^{1/\theta}$$

$$- \left( \int_{1+1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1, m_2+1)dt_1 + (m_1+1)^{k_1\theta} \int_0^{1+1/m_1} \beta(t_1, m_2+1) t_1^{k_1\theta} dt_1 \right)^{1/\theta} \Bigg] \Bigg|$$

$$= \Big( \frac{1}{m_2+1} < \xi_{m_2} < \frac{1}{m_2} \Big)$$

$$= \Big( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_2+1} \Big) \Bigg| \frac{1}{\theta} \left( \int_{1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1})dt_1 + m_1^{k_1\theta} \int_0^{1/m_1} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1}) t_1^{k_1\theta} dt_1 \right)^{1/\theta-1}$$

$$\Bigg[ \int_{1/m_1}^{2\pi} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}(-k_2\theta) \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} dt_2 dt_1$$

$$+ m_1^{k_1\theta} \int_0^{1/m_1} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}(-k_2\theta) \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} t_1^{k_1\theta} dt_2 dt_1 \Bigg]$$

$$- \frac{1}{\theta} \left( \int_{1+1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1})dt_1 + (m_1+1)^{k_1\theta} \int_0^{1+1/m_1} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1}) t_1^{k_1\theta} dt_1 \right)^{1/\theta-1}$$

$$\Bigg[ \int_{1+1/m_1}^{2\pi} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}(-k_2\theta) \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} dt_2 dt_1$$

$$+ (m_1+1)^{k_1\theta} \int_0^{1+1/m_1} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}(-k_2\theta) \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} t_1^{k_1\theta} dt_2 dt_1 \Bigg] \Bigg|$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) = a_1(a_2-b_2) + b_2(a_1-b_1)$$

$$= k_2 \Big( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_2+1} \Big) \Bigg| \left( \int_{1/m_1}^{2\pi} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1})dt_1 + m_1^{k_1\theta} \int_0^{1/m_1} \beta(t_1, \xi_{m_2}^{-1}) t_1^{k_1\theta} dt_1 \right)^{1/\theta-1}$$

$$\Bigg\{ \Bigg[ \int_{1/m_1}^{2\pi} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1} \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} dt_2 dt_1 + m_1^{k_1\theta} \int_0^{1/m_1} \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1} \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} t_1^{k_1\theta} dt_1 dt_2 \Bigg]$$

$$- \xi_{m_2}^{-k_2\theta-1} \Bigg[ \int_{1+1/m_1}^{2\pi} \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} dt_2 dt_1$$

$$+ (m_1+1)^{k_1\theta} \int_0^{1+1/m_1} \int_0^{\xi_{m_2}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} t_1^{k_1\theta} dt_1 dt_2 \Bigg] \Bigg\}$$

$$+\,\xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}\Bigg[\int\limits_{1+1/m_1}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\xi_{m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2dt_1$$

$$+\,(m_1+1)^{k_1\theta}\int\limits_{0}^{1/1+m_1}\int\limits_{0}^{\xi_{m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}t_1^{k_1\theta}dt_2dt_1\Bigg]$$

$$\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{1/m_1}^{2\pi}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})dt_1+m_1^{k_1\theta}\int\limits_{0}^{1/m_1}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})t_1^{k_1\theta}dt_1\Bigg)^{1/\theta-1}$$

$$-\Bigg(\int\limits_{1+1/m_1}^{2\pi}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})dt_1+(m_1+1)^{k_1\theta}\int\limits_{0}^{1+1/m_1}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})t_1^{k_1\theta}dt_1\Bigg)^{1/\theta-1}\Bigg\}\Bigg|$$

$$\le\Big(\frac{1}{m_1}<\xi_{m_1}^{(1)},\ \xi_{m_2}^{(2)}<\frac{1}{m_1+1}\Big)\le$$

$$k_1\theta k_2\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_1+1}\Big)\Big(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_2+1}\Big)\Bigg(\int\limits_{1/m_1}^{2\pi}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})dt_1+m_1^{k_1\theta}\int\limits_{0}^{1/m_1}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})t_1^{k_1\theta}dt_1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\xi_{m_1}^{(1)-k_1\theta-1}\xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}\int\limits_{0}^{\xi_{m_1}^{(1)}}\int\limits_{0}^{\xi_{m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2$$

$$+\,k_1k_2\theta\Big|\frac{1}{\theta}-1\Big|\Big(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_1+1}\Big)\Big(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_2+1}\Big)\xi_{m_1}^{(2)-k_1\theta-1}\xi_{m_2}^{-k_2\theta-1}$$

$$\Bigg[\int\limits_{1+1/m_1}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\xi_{m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_2dt_1+(m_1+1)^{k_1\theta}\int\limits_{0}^{1+1/m_1}\int\limits_{0}^{\xi_{m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}t_1^{k_1\theta}dt_2dt_1\Bigg]$$

$$\Bigg(\int\limits_{\xi_{m_1}^{(2)}}^{2\pi}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})dt_1+\xi_{m_1}^{(2)-k_1\theta}\int\limits_{0}^{\xi_{m_1}^{(2)}}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})t_1^{k_1\theta}dt_1\Bigg)^{1/\theta-2}\int\limits_{0}^{\xi_{m_1}^{(2)}}\beta(t_1,\xi_{m_2}^{-1})t_1^{k_1\theta}dt_1$$

$$\ll\frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2}\lambda_{m_1m_2}.$$

При $\theta = 1$ выкладки упрощаются, так как $1/\theta - 1 = 0$. Тогда имеем

$$\lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{m_1 m_2} - \lambda_{m_1+1\, m_2} - \lambda_{m_1 m_2+1} + \lambda_{m_1+1\, m_2+1}|$$
$$\ll \lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} \frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2}\lambda_{m_1 m_2}$$
$$\ll \lambda^{-1}_{2^{n_1}2^{n_2}} \lambda_{2^{n_1}2^{n_2}} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} \frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2} \le M.$$

Первое неравенство пункта д) доказано. Второе неравенство этого пункта доказывается аналогично, только изменяются показатели степени: $\theta^{-1}$ заменяется на $-\theta^{-1}$.

Пункт д) доказан полностью. Нетрудно проверить справедливость пунктов е), ж). Лемма 8 доказана полностью.

## 4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим $\Phi^{\theta}(\delta_1, \delta_2) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Пусть $n_1$, $n_2$ — натуральные числа такие, что $2^{-n_i+1} \le \delta_i < 2^{-n_i}$, $i = 1, 2$. Оценим $I_4$. Применяя лемму 4 п. а), будем иметь

$$I_4 \ll \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{-\nu_1\theta(k_1+\beta_1)} 2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)} \mu(\nu_1+1, \nu_2+1) \Big\| S^{(k_1+\beta_1, k_2+\beta_2)}_{2^{\nu_1}-1\, 2^{\nu_2}-1}(f) \Big\|_p^{\theta}$$
$$+ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{-\nu_1\theta(k_1+\beta_1)} \mu(\nu_1+1, \nu_2+1) \Big\| S^{(k_1+\beta_1, 0)}_{2^{\nu_1}-1\, \infty}(f) - S^{(k_1+\beta_1, 0)}_{2^{\nu_1}-1\, 2^{\nu_2}-1}(f) \Big\|_p^{\theta}$$
$$+ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)} \mu(\nu_1+1, \nu_2+1) \Big\| S^{(0, k_2+\beta_2)}_{\infty\, 2^{\nu_2}-1}(f) - S^{(0, k_2+\beta_2)}_{2^{\nu_1}-1\, 2^{\nu_2}-1}(f) \Big\|_p^{\theta}$$
$$+ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \mu(\nu_1+1, \nu_2+1) \Big\| f - S_{\infty\, 2^{\nu_2}-1}(f) - S_{2^{\nu_1}-1\, \infty}(f) + S_{2^{\nu_1}-1\, 2^{\nu_2}-1}(f) \Big\|_p^{\theta}$$
$$= I_5 + I_6 + I_7 + I_8.$$

Оценим сначала $I_8$. На основании леммы 2

$$I_8 \ll \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left\langle \sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} \Delta^2_{m_1+1\, m_2+1} \mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1+1, \nu_2+1) \right\rangle^{p/2} dx_1 dx_2 \right)^{\theta/p}.$$

Учитывая, что $\theta \ge p$ и $\theta \ge 2$ и применяя пять раз обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$I_8 \ll \left( \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left[ \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \left\langle \sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} \Delta^2_{m_1+1\, m_2+1} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\mu^{2/\theta}(\nu_1+1,\nu_2+1)\right\rangle^{\theta/2}\right]^{p/\theta} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\left(\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\left\langle\sum_{\nu_2=n_2}^{m_2}\left\{\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\Delta^2_{m_1+1\,m_2+1}\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\mu^{2/\theta}(\nu_1+1,\nu_2+1)\right\}^{\theta/2}\right\rangle^{2/\theta}\right)^{\theta/2}\right]^{p/\theta} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\left(\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\left\langle\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu_2=n_2}^{m_2}\left(\Delta^2_{m_1+1\,m_2+1}\right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.\mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1+1,\nu_2+1)\right)^{\theta/2}\right\}^{2/\theta}\right\rangle\right)^{\theta/2}\right]^{p/\theta} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}\left(\sum_{\nu_1=n_1}^{m_1}\left\langle\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\left\{\sum_{\nu_2=n_2}^{m_2}|\Delta_{m_1+1\,m_2+1}|^{\theta}\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\mu(\nu_1+1,\nu_2+1)\right\}^{2/\theta}\right\rangle^{\theta/2}\right)^{2/\theta}\right]^{p/2} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}\left(\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\left(\sum_{\nu_1=n_1}^{m_1}\sum_{\nu_2=n_2}^{m_2}|\Delta_{m_1+1\,m_2+1}|^{\theta}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\mu(\nu_1+1,\nu_2+1)\right)^{2/\theta}\right]^{p/2} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\Delta^2_{m_1+1\,m_2+1}\lambda^2_{2^{m_1}2^{m_2}}\right]^{p/2} dx_1dx_2\right)^{\theta/p}.$$

Используя свойства последовательности $\{\lambda_{n_1n_2}\}$ из леммы 8, убедимся, что последовательность

$$\beta_{n_1n_2}=\frac{\lambda_{2^{m_1}2^{m_2}}}{\lambda_{n_1n_2}},\ \ 2^{m_1}\leq n_1\leq 2^{m_1+1},\ \ 2^{m_2}\leq n_2<2^{m_2+1},$$

удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда, применяя леммы 3, 2, 4 п. а), получаем оценку

$$I_8\ll\left\|\sum_{m_1=2^{n_1}}^{\infty}\sum_{m_2=2^{n_2}}^{\infty}\lambda_{m_1m_2}A_{m_1m_2}(x_1,x_2)\right\|_p^{\theta}\ll\omega^{\theta}_{\beta_1\beta_2}(\varphi;2^{-n_1},2^{-n_2})_p.$$

Аналогичными рассуждениями найдем оценки для $I_5,\ I_6,\ I_7$:

$$I_i\ll\omega^{\theta}_{\beta_1\beta_2}(\varphi;2^{-n_1},2^{-n_2})_p,\ \ i=5,6,7.$$

В результате, объединяя оценки для $I_5,\ I_6,\ I_7,\ I_8$, имеем:

$$I_4 \ll \omega^{\theta}_{\beta_1\beta_2}(\varphi; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_p.$$

При нахождении оценок сверху для $I_1,\ I_2,\ I_3$ проведем рассуждения, аналогичные тем, которые делались при оценивании $I_4$. В результате получим

$$I_i \ll \omega^{\theta}_{\beta_1\beta_2}(\varphi; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_p,\ \ i = 1, 2, 3.$$

Объединяя полученные оценки для всех слагаемых в выражении для $\Phi^{\theta}(\delta_1, \delta_2)$ и пользуясь свойствами смешанного модуля гладкости, будем иметь, что

$$\Phi(\delta_1, \delta_2) \ll \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; \delta_1, \delta_2)_p.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

## 5. Доказательство теоремы 2

Пусть для функции $f(x_1, x_2) \in L_p$ выполнено условие (3). Тогда из леммы 1 следует, что существует функция $\varphi(x_1, x_2) \in L_p$ с рядом Фурье $\sigma(\lambda, f)$. Покажем теперь, что справедлива оценка (4).

Пусть $n_1, n_2$ — натуральные числа такие, что $2^{-(n_1+1)} \le \delta_1 < 2^{-n_1}$, $2^{-(n_2+1)} \le \delta_2 < 2^{-n_2}$. Согласно лемме 4 п. а)

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; \delta_1, \delta_2)_p &\ll \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_p \ll \left\| \sum_{\nu_1=2^{n_1}}^{\infty} \sum_{\nu_2=2^{n_2}}^{\infty} \lambda_{\nu_1\nu_2} A_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\
&+ 2^{-n_1\beta_1} \left\| \sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1}-1} \sum_{\nu_2=2^{n_2}}^{\infty} \nu_1^{\beta_1} \lambda_{\nu_1\nu_2} A_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\
&+ 2^{-n_2\beta_2} \left\| \sum_{\nu_1=2^{n_1}}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{2^{n_2}-1} \nu_2^{\beta_2} \lambda_{\nu_1\nu_2} A_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\
&+ 2^{-n_1\beta_1} 2^{-n_2\beta_2} \left\| \sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1}-1} \sum_{\nu_2=1}^{2^{n_2}-1} \nu_1^{\beta_1} \nu_2^{\beta_2} \lambda_{\nu_1\nu_2} A_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) \right\|_p \\
&= B_1 + 2^{-n_1\beta_1} B_2 + 2^{-n_2\beta_2} B_3 + 2^{-n_1\beta_1} 2^{-n_2\beta_2} B_4.
\end{aligned}$$

Из леммы 8 следует, что последовательность $B_{\nu_1\nu_2} = \dfrac{\lambda_{n_1n_2}}{\lambda_{2^{m_1+1}2^{m_2+1}}}$, $2^{m_1} \le n_1 < 2^{m_1+1}$, $2^{m_2} \le n_2 < 2^{m_2+1}$, удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда, применяя леммы 3 и 2 и учитывая условие (2), получаем, что

$$B_1 \ll \left\| \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \Delta_{m_1m_2} \lambda_{2^{m_1}2^{m_2}} \right\|_p \ll$$

$$\ll \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\int_{2^{-(m_1+1)}}^{2^{-m_1}}\int_{2^{-(m_2+1)}}^{2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^{2/\theta}\right]^{p/2}dx_1dx_2\right)^{1/p} \ll$$

$$\ll \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}\left(2^{\theta m_1(k_1+\beta_1)}2^{\theta m_2(k_2+\beta_2)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\mu(\nu_1+1,\nu_2+1)2^{-\nu_1\theta(k_1+\beta_1)}2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)}\right)^{2/\theta}\right]^{p/2}dx_1dx_2\right)^{1/p}.$$

Учитивая, что $\theta \le 2$ и $\theta \le p$, продолжим оценивание, используя неравенство Минковского сначала для сумм, а потом для интегралов и сумм:

$$B_1 \ll \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\left\langle\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\mu(\nu_1+1,\nu_2+1)2^{-\nu\theta(k_1+\beta_1)}\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)}2^{m_1\theta(k_1+\beta_1)}2^{m_2\theta(k_2+\beta_2)}|\Delta_{m_1m_2}|^\theta\right\rangle^{2/\theta}\right)^{\theta/2}\right\}^{2/\theta}\right]^{p/2}dx_1dx_2\right)^{1/p}$$

$$\le (\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\left\langle\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\{\mu(\nu_1+1,\nu_2+1)2^{-\nu_1\theta(k_1+\beta_1)}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)}2^{m_1\theta(k_1+\beta_1)}2^{m_2\theta(k_2+\beta_2)}|\Delta_{m_1m_2}|^\theta\}^{2/\theta}\right\rangle^{\theta/2}\right)\right\}^{2/\theta}\right]^{p/2}dx_1dx_2\right)^{1/p}$$

$$\le (\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\left\{\sum_{m_1=n_1+1}^{\nu_1}\left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\left\langle\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1+1,\nu_2+1)2^{-2\nu_1(k_1+\beta_1)}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.2^{-2\nu_2(k_2+\beta_2)}2^{2m_1(k_1+\beta_1)}2^{2m_2(k_2+\beta_2)}\Delta^2_{m_1m_2}\right\rangle^{\theta/2}\right)^{2/\theta}\right\}^{\theta/2}\right]^{p/\theta}dx_1dx_2\right)^{1/p}$$

$$\le (\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\left\{\sum_{m_1=n_1+1}^{\nu_1}\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1+1,\nu_2+1)\right.\right.$$

$$\left.\left.2^{-2\nu_1(k_1+\beta_1)}2^{-2\nu_2(k_2+\beta_2)}2^{2m_1(k_1+\beta_1)}2^{2m_2(k_2+\beta_2)}\Delta^2_{m_1m_2}\right\}^{\theta/2}\right]^{p/\theta}dx_1dx_2\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1+1}^{\nu_1}\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1+1,\nu_2+1)\right.\right.\right.$$

$$2^{-2\nu_1(k_1+\beta_1)}2^{-2\nu_2(k_2+\beta_2)}2^{2m_1(k_1+\beta_1)}2^{2m_2(k_2+\beta_2)}\Delta^2_{m_1 m_2}\Bigg]^{p/2}dx_1dx_2\Bigg)^{\theta/p}\Bigg)^{1/p}$$

$$\le\left(\int\limits_0^{2^{-n_1}}\int\limits_0^{2^{-n_2}}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1+\beta_1\;k_2+\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1dt_2\right)^{1/\theta}.$$

Оценим теперь $B_2$. Применение той же последовательности рассуждений, которая была применена при получении оценки сверху для $B_1$, доказывает справедливость следующей цепочки неравенств:

$$B_2\ll\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=1}^{n_1}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}\lambda^2_{2^{m_1-1}2^{m_2}}2^{2m_1\beta_1}\right]^{p/2}dx_1dx_2\right)^{1/p}$$

$$\ll\Bigg(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[\sum_{m_1=0}^{n_1-1}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\Delta^2_{m_1+1\;m_2}\Bigg(\sum_{\nu_1=0}^{m_1}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2+1)$$

$$2^{\nu_1\theta\beta_1}2^{-\nu_2\theta(k_2+\beta_2)}\Bigg)^{2/\theta}2^{2m_2(k_2+\beta_2)}\Bigg]^{p/2}dx_1dx_2\Bigg)^{1/p}$$

$$\le\Bigg(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[\sum_{m_1=0}^{n_1-1}\Bigg\{\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\nu_1=0}^{m_1}\Bigg\langle\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\{\mu(\nu_1,\nu_2+1)$$

$$2^{\nu_1\theta\beta_1}2^{-\theta\nu_2(k_2+\beta_2)}2^{\theta m_2(k_2+\beta_2)}|\Delta_{m_1+1\;m_2}|^{\theta}\Bigg\}^{2/\theta}\Bigg\rangle^{\theta/2}\Bigg)\Bigg\}^{2/\theta}\Bigg]^{p/2}dx_1dx_2\Bigg)^{1/p}$$

$$\le\Bigg(\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[\sum_{m_1=\nu_1}^{n_1-1}\sum_{m_2=n_2+1}^{\nu_2}\mu^{\frac{2}{\theta}}(\nu_1,\nu_2+1)$$

$$2^{2\nu_1\beta_1}2^{-2\nu_2(k_2+\beta_2)}2^{2m_2(k_2+\beta_2)}\Delta^2_{m_1m_2}\Bigg]^{p/2}dx_1dx_2\Bigg)^{\theta/p}\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\ll\left(\int\limits_{2^{-n_1}}^{2\pi}\int\limits_0^{2^{-n_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{-\theta\beta_1}\omega^{\theta}_{k_1+\beta_1\;k_2+\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1dt_2\right)^{1/\theta}.$$

Аналогичним образом доказывается справедливость остальных оценок для $B_3, B_4$:

$$B_3\ll\left(\int\limits_0^{2^{-n_1}}\int\limits_{2^{-n_2}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_2^{-\theta\beta_2}\omega^{\theta}_{k_1+\beta_1\;k_2+\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1dt_2\right)^{1/\theta};$$

$$B_4\ll\left(\int\limits_{2^{-n_1}}^{2\pi}\int\limits_{2^{-n_2}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{-\theta\beta_1}t_2^{-\theta\beta_2}\omega^{\theta}_{k_1+\beta_1\;k_2+\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1dt_2\right)^{1/\theta}.$$

Теперь, объединяя оценки для $B_1, B_2, B_3, B_4$, нетрудно получить справедливость неравенства (4).

Теорема 2 доказана полностью.

## 6. Доказательство теоремы 3а)

Пусть натуральные числа $m_1, m_2$ таковы, что $\frac{1}{m_1+1} \le \delta_1 < \frac{1}{m_1}$, $\frac{1}{m_2+1} \le \delta_2 < \frac{1}{m_2}$.

$$\Phi^\theta(\delta_1,\delta_2) \ll \sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\omega^\theta_{k_1+\beta_1\ k_2+\beta_2}\left(f;\frac{1}{\nu_1},\frac{1}{\nu_2}\right)_p$$
$$+m_1^{-\beta_1\theta} \sum_{\nu_1=1}^{m_1} \sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\nu_1^{\beta_1\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta_1\ k_2+\beta_2}\left(f;\frac{1}{\nu_1},\frac{1}{\nu_2}\right)_p$$
$$+m_2^{-\beta_2\theta} \sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{m_2} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\nu_2^{\beta_2\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta_1\ k_2+\beta_2}\left(f;\frac{1}{\nu_1},\frac{1}{\nu_2}\right)_p$$
$$+m_1^{-\beta_1\theta}m_2^{-\beta_2\theta} \sum_{\nu_1=1}^{m_1} \sum_{\nu_2=1}^{m_2} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\nu_1^{\beta_1\theta}\nu_2^{\beta_2\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta_1\ k_2+\beta_2}\left(f;\frac{1}{\nu_1},\frac{1}{\nu_2}\right)_p$$
$$= B_5 + B_6 + B_7 + B_8,$$

где

$$\mu_1(1,1) = \int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2, \quad \mu_1(1,\nu_2) = \int_1^{2\pi}\int_{\nu_2^{-1}}^{(\nu_2-1)^{-1}} \alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

$$\mu_1(\nu_1,1) = \int_{\nu_1^{-1}}^{(\nu_1-1)^{-1}}\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2, \quad \mu_1(\nu_1,\nu_2) = \int_{\nu_1^{-1}}^{(\nu_1-1)^{-1}}\int_{\nu_2^{-1}}^{(\nu_2-1)^{-1}} \alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

$$\nu_1 = 2,3,\ldots,\ \ \nu_2 = 2,3,\ldots.$$

Оценим $B_5$. Так как $f \in M_{k_1k_2}$, то можно применить лемму 4 п. б):

$$B_5 \ll \sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} \mu_1(\nu_1,\nu_2)$$
$$\left[\nu_1^{-(k_1+\beta_1)p}\nu_2^{-(k_2+\beta_2)p} \sum_{n_1=1}^{\nu_1}\sum_{n_2=1}^{\nu_2} b^p_{n_1n_2} n_1^{(k_1+\beta_1+1)p-2} n_2^{(k_2+\beta_2+1)p-2}\right]^{\theta/p} +$$
$$+ \sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\left[\nu_1^{-(k_1+\beta_1)p} \sum_{n_1=1}^{\nu_1}\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} n_2^{p-2} b^p_{n_1n_2} n_1^{(k_1+\beta_1+1)p-2}\right]^{\theta/p}$$
$$+ \sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} \mu_1(\nu_1,\nu_2)\left[\nu_2^{-(k_2+\beta_2)p} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\nu_2} b^p_{n_1n_2} n_1^{p-2} n_2^{(k_2+\beta_2+1)p-2}\right]^{\theta/p}$$

$$+\sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty}\mu_1(\nu_1,\nu_2)\left[\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty}b^p_{n_1n_2}n_1^{p-2}n_2^{p-2}\right]^{\theta/p}$$
$$=B_9+B_{10}+B_{11}+B_{12}.$$

Оценим $B_{12}$. Поскольку $\theta\geq p$, то, применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$B_{12}\leq\left(\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}b^p_{n_1+1\,n_2+1}(n_1+1)^{p-2}(n_2+1)^{p-2}\left[\sum_{\nu_1=m_1}^{n_1}\sum_{\nu_2=m_2}^{n_2}\mu_1(\nu_1,\nu_2)\right]^{p/\theta}\right)^{\theta/p}$$
$$\ll\left(\sum_{n_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2+1}^{\infty}b^p_{n_1n_2}\lambda^p_{n_1n_2}n_1^{p-2}n_2^{p-2}\right)^{\theta/p}.$$

Введем определение "монотонной" последовательности чисел. Последовательность чисел $\{C_{n_1n_2}\}$ называется "монотонной", если она удовлетворяет условиям $\Delta^{(1,0)}C_{n_1n_2}\geq0$, $\Delta^{(0,1)}C_{n_1n_2}\geq0$, $\Delta^{(1,1)}C_{n_1n_2}\geq0$.

Рассмотрим две последовательности чисел: $(i=1,2,3,4)$

$$\left\{\frac{a^{(i)}_{n_1n_2}n_1^{k_1(\theta+1)}n_2^{k_2(\theta+1)}}{\lambda^\theta_{n_1n_2}}\right\},\ \left\{n_1^{-k_1(\theta+1)}n_2^{-k_2(\theta+1)}\lambda^{\theta+1}_{n_1n_2}\right\}.$$

Первая последовательность "монотонна" в силу того, что $f\in M^{(\theta)}_{k_1k_2}$. Можно непосредственно проверить, что вторая последовательность также "монотонна". Тогда их произведение

$$a^{(i)}_{n_1n_2}n_1^{k_1(\theta+1)}n_2^{k_2(\theta+1)}\lambda^{-\theta}_{n_1n_2}n_1^{-k_1(\theta+1)}n_2^{-k_2(\theta+1)}\lambda^{\theta+1}_{n_1n_2}=a^{(i)}_{n_1n_2}\lambda_{n_1n_2}$$

тоже "монотонно". А это значит, что $\varphi\in M_{00}$. Применяя лемму 4 п. б), имеем $B_{12}\ll\omega^\theta_{\beta_1\beta_2}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p$. Оценим $B_{11}$. И в этом случае вновь применяем обобщенное неравенство Минковского, так как $\theta\geq p$,

$$B_{11}\ll\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\int\limits_{\nu_1^{-1}}^{\nu_1^{-1}-1}\int\limits_0^{(m_2-1)^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2\left[m_2^{-\beta_2p}\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{m_2-1}b^p_{n_1n_2}n_2^{(k_2+\beta_2+1)p-2}n_1^{p-2}\right]^{\theta/p}$$
$$+\left(\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}b^p_{n_1+1\,n_2}(n_1+1)^{p-2}n_2^{(k_2+\beta_2+1)p-2}\left[\sum_{\nu_1=m_1}^{n_1}\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty}\mu_1(\nu_1,\nu_2)\nu_2^{-\theta(k_2+\beta_2)}\right]^{p/\theta}\right)^{\theta/p}$$

$$\leq \left( \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2-1} \left[ \sum_{\nu_1=m_1}^{n_1} \int\limits_0^{(m_2-1)^{-1}} \alpha(t_1,t_2) t_2^{k_2\theta} dt_1 dt_2 \right.\right.$$

$$\left.\left. (n_1+1)^{p-2} m_2^{-\beta_2\theta} b_{n_1 n_2}^{\theta} (n_2^{(k_2+\beta_2+1)p-2})^{\theta/p} \right]^{p/\theta} \right)^{\theta/p}$$

$$+ \left( \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2}^{\infty} b_{n_1+1\, n_2}^{p} (n_1+1)^{p-2} n_2^{p-2} \lambda_{n_1 n_2}^{p} \right)^{\theta/p}$$

$$\ll \left( m_2^{-\beta_2 p} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{m_2-1} b_{n_1+1\, n_2}^{p} (n_1+1)^{p-2} n_2^{(\beta_2+1)p-2} \lambda_{n_1 n_2}^{p} \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \sum_{n_2=m_2}^{\infty} b_{n_1+1\, n_2}^{p} (n_1+1)^{p-2} n_2^{p-2} \lambda_{n_1 n_2}^{p} \right)^{\theta/p}.$$

Применяя лемму 4 п. б), имеем $B_{11} \ll \omega_{\beta_1\beta_2}^{\theta}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p$. Аналогично получаем справедливость следующих неравенств

$$B_9 \ll \omega_{\beta_1\beta_2}^{\theta}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p, \ \ B_{10} \ll \omega_{\beta_1\beta_2}^{\theta}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p$$

Аналогично проверяется оценка сверху для $B_5, B_6, B_7$:

$$B_i \ll \omega_{\beta_1\beta_2}^{\theta}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p, \quad i=5,6,7.$$

Объединяя полученные оценки для $B_5, B_6, B_7, B_8$, будем иметь

$$\Phi(\delta_1,\delta_2) \ll \omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p.$$

то есть справедлива оценка (4).

Пункт а) теоремы 3 доказан полностью.

Доказательство пункта б) теоремы 3 проводится аналогично.

Теорема 4 доказывается так же, как теорема 3, только вместо леммы 4 п. б) надо воспользоваться леммой 4 п. в).

## 7. Замечания

**1.** Пусть

$\lambda(1) =$

$$= \left\{ \lambda_{n_1} = \left( \int\limits_{1/n_1}^{2\pi} \int\limits_{1}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2 + n_1^{k_1\theta} \int\limits_0^{1/n_1} \int\limits_1^{2\pi} \alpha(t_1 t_2) t_1^{k_1\theta} dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta}, n_1 = 1, \dots \right\},$$

$\lambda(2) =$

$$= \left\{ \lambda_{n_2} = \left( \int\limits_{1}^{2\pi} \int\limits_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2 + n_2^{k_2\theta} \int\limits_1^{2\pi} \int\limits_0^{1/n_2} \alpha(t_1 t_2) t_2^{k_2\theta} dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta}, n_2 = 1, \dots \right\};$$

$\sigma(\lambda(1), f), \sigma(\lambda(2), f)$ — ряды, преобразованные из ряда (1) с помощью этих последовательностей $\lambda(1), \lambda(2)$, то есть

$$\sigma(\lambda(1), f) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \lambda_{n_1} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2), \ \ \sigma(\lambda(2), f) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_2} A_{n_1 n_2}(x_1, x_2);$$

$$\Phi(\delta_1) = \left\{ \delta_1^{\beta_1\theta} \int_{\delta_1}^{2\pi}\int_{1}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_1^{-\beta_1\theta} \omega_{k_1+\beta_1}^{\theta}(f; t_1)_p dt_1 dt_2 \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{\delta_1}\int_{1}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1+\beta_1}^{\theta}(f; t_1)_p dt_1 dt_2 \right\}^{1/\theta};$$

$$\Phi(\delta_2) = \left\{ \delta_2^{\beta_2\theta} \int_{1}^{2\pi}\int_{\delta_2}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_2^{-\beta_2\theta} \omega_{k_1+\beta_1}^{\theta}(f; t_2)_p dt_1 dt_2 \right.$$
$$\left. + \int_{1}^{2\pi}\int_{0}^{\delta_2} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_2+\beta_2}^{\theta}(f; t_2)_p dt_1 dt_2 \right\}^{1/\theta}.$$

Тогда в терминах частных модулей гладкости будут верны теоремы, аналогичные теоремам, сформулировнным в основном утверждении, а именно:

Теорема 1д. *Пусть* $\max(2, p) \le \theta < \infty$ *и для некоторых положительных чисел* $k_1, k_2$ *функция* $\alpha(t_1, t_2)$ *удовлетворяет* $(\tau, \sigma)$*-условию со значениями* $\tau = k_1\theta, \sigma = k_2\theta$. *Если для некоторых функций* $f(x_1, x_2) \in L_p$ *ряды* $\sigma(\lambda(1), f)$, $\sigma(\lambda(2), f)$ *есть ряды Фурье некоторых функций* $\varphi^{(\lambda(1))}(x_1, x_2) \in L_p$, $\varphi^{(\lambda(2))}(x_1, x_2) \in L_p$ *соответственно, то* $\Phi(\delta_i) \ll \omega_{\beta_i}(\varphi^{(\lambda(i))}; \delta_i)_p, \ i = 1, 2$.

Теорема 2 д. *Пусть* $0 < \theta \le \min(p, 2)$ *и для некоторых положительных чисел* $k_1, k_2$ *функция* $\alpha(t_1, t_2)$ *удовлетворяет* $(\tau, \sigma)$*-условию со значениями* $\tau = k_1\theta, \ \sigma = k_2\theta$, *а также условиям (2). Если для функции* $f(x_1, x_2) \in L_p$

$$\int_{1}^{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_2}^{\theta}(f; t_1)_p dt_1 dt_2 < \infty, \ \ \int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1}^{\theta}(f; t_1)_p dt_1 dt_2 < \infty,$$

*то существуют функции* $\varphi^{(\lambda(i))}(x_1, x_2) \in L_p$ $(i = 1, 2)$ *с рядами Фурье* $\sigma(\lambda(i), f)$ $(i = 1, 2)$ *соответственно и* $\Phi(\delta_i) \gg \omega_{\beta_i}(\varphi^{(\lambda(i))}; \delta_i)_p, \ i = 1, 2$.

Теорема 3 д. *Если функция* $f(x_1, x_2) \in M_{k_1 k_2}^{(\theta)} \cap L_p$, *то*

а) *утверждение теоремы* 1 д) *справедливо при* $1 < p \le \theta < \infty$;

б) *утверждение теоремы* 2 д) *справедливо при* $0 < \theta \le p < \infty$.

Теорема 4 д. *Если функция* $f(x_1, x_2) \in \Lambda \cap L_p$, *то*

а) *утверждение теоремы* 1 д) *справедливо при* $2 \le \theta < \infty$;

б) *утверждение теоремы* 2 д) *справедливо при* $0 < \theta \leq 2$.

Следствия. Пусть функция $\alpha(t_1, t_2)$ для некоторых положительных чисел $k_1, k_2$ удовлетворяет $(\tau, \sigma)$-условию со значениями $\tau = k_1\theta$, $\sigma = k_2\theta$, а также условиям (2).

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$I(1;\theta,p) = \int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1}^{\theta}(f;t_1)_p dt_1 dt_2,$$

$$I(2;\theta,p) = \int_1^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_2}^{\theta}(f;t_2) dt_1 dt_2.$$

а) Если $\theta = 2$ и $f(x_1,x_2) \in L_2$, то для существования функций $\varphi^{(\lambda(1))}(x_1,x_2) \in L_2$, $\varphi^{(\lambda(2))}(x_1,x_2) \in L_2$ с рядами $\sigma(\lambda(1), f)$, $\sigma(\lambda(2), f)$ соответственно необходимо и достатачно, чтобы $I(1;2,2) < \infty$, $I(2;2,2) < \infty$, причем $\forall \beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

$$\Phi(\delta_1) \asymp \omega_{\beta_1}(\varphi;\delta_1)_2, \ \ \Phi(\delta_2) \asymp \omega_{\beta_2}(\varphi;\delta_2)_2.$$

б) Если $\theta = p$ и $f(x_1,x_2) \in M_{k_1k_2}^{(\theta)} \cap L_p$, то для существования функций $\varphi^{(\lambda(1))}(x_1,x_2) \in L_p$, $\varphi^{(\lambda(2))}(x_1,x_2) \in L_p$ с рядами $\sigma(\lambda(1), f)$, $\sigma(\lambda(2), f)$ соответственно необходимо и достатачно, чтобы $I(1;p,p) < \infty$, $I(2;p,p) < \infty$, причем $\forall \beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

$$\Phi(\delta_1) \asymp \omega_{\beta_1}(\varphi;\delta_1)_p, \ \ \Phi(\delta_2) \asymp \omega_{\beta_2}(\varphi;\delta_2)_p.$$

в) Если $\theta = 2$ и $f(x_1,x_2) \in \Lambda \cap L_p$, то для существования функций $\varphi^{(\lambda(1))}(x_1,x_2) \in L_p$, $\varphi^{(\lambda(2))}(x_1,x_2) \in L_p$ с рядами $\sigma(\lambda(1), f)$, $\sigma(\lambda(2), f)$ соответственно необходимо и достатачно, чтобы $I(1;2,p) < \infty$, $I(2;2,p) < \infty$, причем $\forall \beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

$$\Phi(\delta_1) \asymp \omega_{\beta_1}(\varphi;\delta_1)_p, \ \ \Phi(\delta_2) \asymp \omega_{\beta_2}(\varphi;\delta_2)_p.$$

**2.** Введем по аналогии с работами [**1,8**] следующие классы функций.

Обозначим

$$I(1,2;\theta,p) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta}(f;t_1,t_2)_p dt_1 dt_2.$$

$SB(p,\theta)$-класс Бесова — класс функций $f(x_1,x_2) \in L_p$ таких, что

$$I(1;\theta,p) < \infty, \ \ I(2;\theta,p) < \infty, \ \ I(1,2;\theta,p) < \infty;$$

$SW(p,\theta)$ — класс Вейля — класс функций $f(x_1,x_2) \in L_p$, для которых существуют функции $\varphi(x_1,x_2) \in L_p$, $\varphi^{(\lambda(1))}(x_1,x_2) \in L_p$, $\varphi^{(\lambda(2))}(x_1,x_2) \in L_p$ с рядами $\sigma(\lambda,f)$, $\sigma(\lambda(1),f)$, $\sigma(\lambda(2),f)$ соответственно.

Пусть $\Psi(\delta,\eta)$ — непрерывная и неотрицательная на $[0,2\pi]^2$ функция, обладающая свойствами

$$\Psi(\delta_1,\eta)\ll\Psi(\delta_2,\eta),\ \ 0\le\delta_1\le\delta_2\le 2\pi,\quad \Psi(2\delta,\eta)\ll\Psi(\delta,\eta),\quad 0\le\delta\le\pi,$$

$$\Psi(\delta,\eta_1)\ll\Psi(\delta,\eta_2),\ \ 0\le\eta_1\le\eta_2\le 2\pi,\quad \Psi(\delta,2\eta)\ll\Psi(\delta,\eta),\quad 0\le\eta\le\pi.$$

Обозначим через $SWH(p,\theta)$ — класс Вейля-Никольского — класс функций $f(x_1,x_2)\in SW(p,\theta)$ таких, что

$$\omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi;\delta_1,\delta_2)_p\ll\Psi(\delta_1,\delta_2),$$

$$\omega_{\beta_1}(\varphi^{(\lambda(1))},\delta_1)_p\ll\Psi(\delta_1,2\pi),\ \ \omega_{\beta_1}(\varphi^{(\lambda(2))},\delta_2)_p\ll\Psi(2\pi,\delta_2);$$

$SBH(p,\theta)$ — класс Бесова-Никольского — класс функций $f(x_1,x_2)\in L_p$ таких, что $\Phi(\delta_1,\delta_2)\ll\Psi(\delta_1,\delta_2)$, $\Phi(\delta_1)\ll\Psi(\delta_1,2\pi)$, $\Phi(\delta_2)\ll\Psi(2\pi,\delta_2)$.

Тогда из теорем и следствий, сформулированных в пункте 2, можно получить справедливость соответствующих вложений классов $SWH(p,\theta)$ и $SBH(p,\theta)$. А именно,

1) Если $\max(2,p)\le\theta<\infty$, то $SWH(p,\theta)\subset SBH(p,\theta)$.

2) Если $1<p\le\theta<\infty$, то $M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SWH(p,\theta)\subset M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SBH(p,\theta)$.

3) Если $2\le\theta<\infty$, то $\Lambda\cap SWH(p,\theta)\subset\Lambda\cap SBH(p,\theta)$.

Пусть функция $\alpha(t_1,t_2)$ удовлетворяет условиям (2). Тогда справедливы и такие вложения:

4) Если $0<\theta\le\min(p,2)$, то $SBH(p,\theta)\subset SWH(p,\theta)$.

5) Если $0<\theta\le p<\infty$, то $M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SBH(p,\theta)\subset M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SWH(p,\theta)$.

6) Если $0<\theta\le 2$, то $\Lambda\cap SBH(p,\theta)\subset\Lambda\cap SWH(p,\theta)$.

7) Классы $SWH(2,2)$ и $SBH(2,2)$ совпадают.

8) Классы $M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SWH(p,p)$ и $M^{(\theta)}_{k_1k_2}\cap SBH(p,p)$ совпадают.

9) Классы $\Lambda\cap SWH(p,2)$ и $\Lambda\cap SBH(p,2)$ совпадают.

**3.** Пусть $0<\theta\le\min(p,2)$ и для некоторых положительных чисел $k_1,k_2,\beta_1,\beta_2$ функция $\alpha(t_1,t_2)$ удовлетворяет $(\tau,\sigma)$-условию со значениями $\tau=(k_1+\beta_1)\theta,\sigma=(k_2+\beta_2)\theta$. Пусть, далее,

$$\mu=\Bigg\{\mu_{n_1n_2}=\Bigg(n_1^{-\beta_\theta}n_2^{-\beta_2\theta}\int\limits_{n_1^{-1}}^{2\pi}\int\limits_{n_2^{-1}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{-\beta_1\theta}t_2^{-\beta_2\theta}dt_1dt_2$$

$$+n_1^{(k_1+\beta_1)\theta}n_2^{-\beta_2\theta}\int\limits_0^{n_1^{-1}}\int\limits_{n_2^{-1}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{(k_1+\beta_1)\theta}t_2^{-\beta_2\theta}dt_1dt_2$$

$$+n_1^{-\beta_1\theta}n_2^{(k_2+\beta_2)\theta}\int\limits_{n_1^{-1}}^{2\pi}\int\limits_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{-\beta_1\theta}t_2^{(k_2+\beta_2)\theta}dt_1dt_2$$

$$\left.+n_1^{(k_1+\beta_1)\theta}n_2^{(k_2+\beta_2)\theta}\int\limits_0^{n_1^{-1}}\int\limits_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{(k_1+\beta_1)\theta}t_2^{(k_2+\beta_2)\theta}dt_1dt_2\right)^{1/\theta}, n_1,n_2=1,2,\ldots\Bigg\},$$

$$\mu(1)=\Bigg\{\mu_{n_1}=\Bigg(n_1^{-\beta_1\theta}\int\limits_{n_1^{-1}}^{2\pi}\int\limits_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{-\beta_1\theta}dt_1dt_2+$$

$$\left.+n_1^{(k_1+\beta_1)\theta}\int\limits_0^{n_1^{-1}}\int\limits_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{(k_1+\beta_1)\theta}dt_1dt_2\right)^{1/\theta},\ \ n_1=1,2,\ldots\Bigg\},$$

$$\mu(2)=\Bigg\{\mu_{n_2}=\Bigg(n_2^{-\beta_2\theta}\int\limits_1^{2\pi}\int\limits_{n_2^{-1}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_2^{-\beta_2\theta}dt_1dt_2+$$

$$\left.+n_2^{(k_2+\beta_2)\theta}\int\limits_1^{2\pi}\int\limits_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{(k_2+\beta_2)}dt_1dt_2\right)^{1/\theta},\ \ n_2=1,2,\ldots\Bigg\}.$$

Если функция $f(x_1,x_2)\in L_p$ такова, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1+\beta_1 k_2+\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1dt_2<\infty,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1+\beta_1}(f;t_1)_p dt_1dt_2<\infty,\ \ \int\limits_1^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_2+\beta_2}(f;t_2)_p dt_1dt_2<\infty,$$

то существуют функции $\varphi_1(x_1,x_2)\in L_p,\ \varphi_1^{(\mu(1))}(x_1,x_2)\in L_p,\ \ \varphi_1^{(\mu(2))}(x_1,x_2)\in L_p$ с рядами Фурье $\sigma(\mu,f),\sigma(\mu(1),f),\sigma(\mu(2),f)$ соответственно и

$\omega_{\beta_1}(\varphi_1^{(\mu(1))};\delta_1)_p\ll\Phi(\delta_1),\omega_{\beta_2}(\varphi_1^{(\mu(2))};\delta_2)_p\ll\Phi(\delta_2),\omega_{\beta_1\beta_2}(\varphi_1;\delta_1,\delta_2)_p\ll\Phi(\delta_1,\delta_2).$

**4**. Если функция $f(x_1,x_2)\in M^{(\theta)}_{k_1+\beta_1\ k_2+\beta_2}\cap L_p$, то третий пункт замечания справедлив при всех $\theta$, лежащем в пределах $0<\theta\le p<\infty$.

**5**. Если функция $f(x_1,x_2)\in\Lambda\cap L_p$, то третий пункт замечания справедлив при всех $\theta$, лежащем в пределах $0<\theta\le 2$.

**6**. Класс $SWH(p,\theta)$ из пункта 2 замечания можно определить не с помощью последовательностей $\lambda,\lambda(1),\lambda(2)$, а с помощью последовательностей $\mu,\mu(1),\mu(2)$ и доказать справедливость вложений, соответствующих вложениям 4), 5), 6) приведенных в этом пункте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] М.К. Потапов, *Исследование некоторых классов функций при помощи приближения "углом"*, Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова, **117** (1972), 256–291.

[2] С.М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Москва, 1977

[3] Б.В. Симонов, *О принадлежности преобразованного ряда Фурье пространству $L_p$*, Деп. в ВИНИТИ 30.01.1981. № 4985–81.

[4] М.Г. Есмаганбетов, *Условия существования смешанных производных Вейля в $L_p([0,2\pi]^2)$ $(1 < p < \infty)$ и ее структурные свойства*, Деп. в ВИНИТИ 21.04.1982. № 1675–82.

[5] И.Э. Симонова, Б.В. Симонов, *О коэффициентах Фурье некоторых функций*, Деп. в ВИНИТИ 05.04.1985. № 2337–85.

[6] Б.В. Симонов *О свойствах преобразованного ряда Фурье*, Деп. в ВИНИТИ 22-06-1981, № 3031–81.

[7] И.П. Натансон *Теория функций вещественной переменной*, Москва, 1974.

[8] М.К. Потапов, Б. Лакович: *О вложении и совпадении классов функций Бесова-Никольского и Вейля-Никольского*, Вестник МГУ, сер.1, математика, механика, (1992), 4, 44–52.


Настоящая работа написана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-01-00240.

М.К. Потапов
Мех.-Мат. факультет
МГУ
119899 Москва
Россия

(Поступила 24 12 1995)

Б.В. Симонов
Кафедра прикладной математики
Технический университет
400066 Волгоград
Россия

Б. Лакович
Природно-математички факултет
81000 Подгорица
Југославија