PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 58 (72), 1995, 153–161
Slobodan Aljančić memorial volume

КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МЕРЫ

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Резюме. В статье рассмотрена тауберова теорема типа Харди–Литтлвуда–Карамата для квазиасимптотических разложений мер, сосредоточенных на положительной полуоси. При этом предполагается, что члены квазиасимптотического разложения — обобщённые функции, сосредоточенные в начале координат, а асимптотическое поведение остатка оценивается относительно шкалы правильно меняющихся (автомодельных) функций. Результаты применяются в теории вероятностей для определения поведения "хвостов" функции распределения по асимптотическому поведению характеристической функции.

Введение

Пусть $d\mu(t)$ неотрицательная мера на положительной полуоси, $t \geqslant 0$, и пусть её преобразование Лапласа $\widetilde{d\mu}(y) = \int e^{-yt}\, d\mu(t)$ в начале координат допускает асимптотическое разложение $\widetilde{d\mu}(y) \approx P(y) + \widetilde{h}(y)$, где $P(y)$ полином, а остаток $\widetilde{h}(y)$ степенным (правильно меняющимся) образом убывает при приближении к началу координат. Что можно сказать об асимптотическом (квазиасимптотическом) поведении самой меры $d\mu$, её моментах или её первообразных?

Пусть $F(t)$ функция распределения. Как, зная её характеристическую функцию, (преобразование Фурье функции $F(t)$), определить асимптотическое поведение "хвостов", то есть асимптотику $F(t)$ при $t \to -\infty$, и асимптотику $1 - F(t)$ при $t \to +\infty$. Эти вопросы и рассматриваются в настоящей работе.

Изучению остатка в тауберовых теоремах посвящены монографии Т.Х. Ганелиуса [**2**], М.А. Субханкулова [**6**], А.Г. Постникова [**7**], в которых указаны многочисленные применения тауберовых теорем с остатком в теории чисел, теории функций, спектральной теории дифференциальных операторов и других областях математики. Особенно отметим монографию С. Альянчича, Р. Боянича, М. Томича [**3**], где разработана теория правильно меняющихся функций с остатком и на её основе,

---

AMS Subject Classification (1991): Primary 46F12; Secondary 44A10, 40E05

методом Г. Фрейда [**1**], получен ряд тауберовых теорем с остаточными членами. Отметим также результаты по тауберовой теории с остатком, полученные С. Альянчичем, и изложенные им в трудах конференции по аппроксимации функций, см. [**5**]

Через $\mathcal{S}'_+$ обозначим пространство обобщённых функций медленного роста с носителями на правой полуоси. Преобразование Лапласа

$$\widetilde{f}(z) \equiv L[f] = \left(f(t), e^{izt}\right), \qquad z = x + iy \quad f \in \mathcal{S}'_+,$$

устанавливает изоморфизм свёрточной алгебры $\mathcal{S}'_+$ на алгебру $H((0,+\infty))$, функций, голоморфных в верхней полуплоскости, для которых справедлива оценка:

$$\left|\widetilde{f}(z)\right| \le M\frac{(1+|z|)^a}{y^b}, \qquad z = x + iy, \quad y > 0,$$

для некоторых M, a, b.

Определение. Если $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ и $\rho(k)$ некоторая положительная и непрерывная при достаточно больших k функция, то мы говорим, что f *обладает квазиасимптотикой* относительно $\rho(k)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \to g(t), \quad k \to \infty \text{ в } \mathcal{S}'_+,$$

где g некоторая функция из $\mathcal{S}'_+$, отличная от тождественного нуля.

В этом случае $\rho(k)$ обязательно является правильно меняющейся (автомодельной) функцией, см. [**3**], [**8**]. Другими словами, для любого $a > 0$ и некоторого α

$$\rho(ak)/\rho(k) \to a^\alpha, \quad k \to \infty$$

равномерно на компактах по a в $(0,+\infty)$. Число α называется *порядком* ρ. Примерами автомодельных функций порядка α могут служить функции вида:

$$k^\alpha, \quad k^\alpha \ln k, \quad k^\alpha \ln\ln k, \quad k^\alpha(1 + \tfrac{1}{2}\sin\ln\ln k) \quad \text{и др.}$$

В этом же случае функция $g(t)$ имеет вид:

$$g(t) \equiv f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{\Theta(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ при } \alpha > 0 \\ f^{(N)}_{N+\alpha}(t), \text{ при } \alpha \leqslant 0, \alpha + N > 0, N \text{ целое}, \end{cases}$$

Заметим, что эти обобщённые функции образуют свёрточную алгебру в $\mathcal{S}'_+$, ($f_\alpha(t)$ — лиувиллевские ядра дробного интегрирования и дифференцирования). При этом первообразной порядка α функции $f(t)$ называют обобщённую функцию

$$f^{-\alpha}(t) = f_\alpha(t) * f(t).$$

Если $g(t) \equiv 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной* квазиасимптотикой.

В терминах квазиасимптотики тауберова теорема Харди–Литтлвуда–Карамата формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $d\,\mu(t) \in \mathcal{S}_+'$ неотрицательная мера и $\rho(t)$ — правильно меняющаяся функция порядка α. Для того чтобы $d\,\mu(t)$ обладала квазиасимптотикой относительно $\frac{1}{k}\rho(k)$, то есть*

$$\frac{k}{\rho(k)} d\,\mu(kt) \longrightarrow A f_\alpha, \quad k \to \infty \text{ в } \mathcal{S}_+', \qquad A \not\equiv 0$$

необходимо и достаточно чтобы

$$\frac{1}{\rho(1/y)} \int_0^\infty e^{-yt} d\,\mu(t) \longrightarrow A, \qquad y \to +0,$$

при этом

$$\frac{1}{\rho(k)} \int_0^k d\,\mu(t) = \frac{\mu(k)}{\rho(k)} \longrightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad k \to \infty.$$

1. Тауберова теорема для квазиасимптотических разложений мер

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $f(t) \in \mathcal{S}_+'$ неотрицательная мера и $\rho(k)$ — правильно меняющаяся функция порядка α, где $-n-1 < \alpha < -n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют постоянные $c_0, \ldots, c_n$, такие, что преобразование Лапласа $f(t)$ на чисто мнимой оси имеет представление*

$$\widetilde{f}(iy) = \sum_{j=0}^{n} c_j y^j + \widetilde{h}(iy); \quad y > 0, \tag{1}$$

причём

$$\frac{1}{\rho(1/y)} \widetilde{h}(iy) \longrightarrow A, \quad y \to +0; \tag{2}$$

(2) *существуют постоянные $c_0, \ldots, c_n$, такие, что обобщённая функция*

$$h(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n} c_j \delta^{(j)}(t) \tag{3}$$

обладает квазиасимптотикой относительно $\frac{1}{k}\rho(k)$, точнее

$$\frac{k}{\rho(k)} h(kt) \longrightarrow A f_\alpha, \quad k \to \infty \text{ в } \mathcal{S}'. \tag{4}$$

(3) *для любого целого $\ell \geqslant 0$*

$$\int_0^k t^\ell f(t) dt = (-1)^\ell \ell!\, c_\ell + k^\ell \rho(k) \left[\frac{A}{(\alpha+\ell)\mathit{\Gamma}(\alpha)} + \bar{\bar{o}}(1) \right], \tag{5}$$

при этом можно считать $c_\ell = 0$ *для* $\ell > n$;

(4) *для некоторого целого* $N \geqslant 0$ *существует постоянная* c_N, *такая что*

$$\int_0^k t^N\ f(t)dt = (-1)^N N! c_N + k^N \rho(k)\left[\frac{A}{(\alpha+N)\Gamma(\alpha)} + \bar{\bar{o}}(1)\right], k \to \infty; \quad (6)$$

(5) *для любого целого* $\ell \geqslant 1$ *существуют постоянные* $c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ *такие, что первообразная от* $h(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{\ell-1} c_j \delta^{(j)}(t)$ *порядка* ℓ *имеет асимптотику относительно* $k^{\ell-1}\rho(k)$, *то есть*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\ell-1}\rho(k)} h^{(-\ell)}(k) = \frac{A}{\Gamma(\alpha+\ell)}; \quad (7)$$

(6) *для некоторого целого* N *существуют постоянные* $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ *такие, что для*

$$h_1(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \delta^{(j)}(t) \quad (8)$$

имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{N-1}\rho(k)} h_1^{(-N)}(k) = \frac{A}{\Gamma(\alpha+N)}. \quad (9)$$

В пунктах 3) и 4) под интегралом $\int^k$ можно понимать любое значение между $\int^{k-0}$ и $\int^{k+0}$.

Замечание. Отметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 5), в несколько иной формулировке, доказана Клаусом Невельсом в его докторской диссертации [**4**].

Доказательство. Мы докажем только импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Импликации 3) $\Rightarrow$ 4) и 5) $\Rightarrow$ 6) очевидны. Доказательство оставшихся импликаций можно найти в работе [**10**].

Для доказательства нам понадобится теорема о делении обобщённой функции на полином с сохранением квазиасимптотики, а именно:

Теорема 3. *Пусть* $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ *и* $\rho(k)$ *автомодельная функция порядка* $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ *и пусть для некоторого* N *функция* $t^N f(t)$ *обладает квазиасимптотикой относительно* $k^N \rho(k)$, *тогда:*

(1) *если* $\alpha > -1$, *то* $f(t)$ *сама обладает квазиасимптотикой относительно* $\rho(k)$;

(2) *если* $\alpha < -1$, *то существуют числа* c_j $\ j = 0, 1, \ldots, p$ *такие, что функция* $f(t) - \sum_{j=0}^{p} c_j \delta^{(j)}(t)$ *обладает квазиасимптотикой относительно* $\rho(k)$.

Доказательство см. в [**9**].

Доказательству импликации 1) $\Rightarrow$ 2) предпошлём следующую лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть заданы целое число $N \geqslant 0$ и $\rho_0(k)$ — N раз дифференцируемая правильно меняющаяся функция, определённая при $k > k_0 \geqslant 0$, порядка $\alpha \neq -1, -2, \ldots$. Пусть кроме того*

$$\rho_N(t) = \left[t^2 \frac{d}{dt}\right]^N \rho_0(t) \text{ — монотонно возрастающая функция }. \tag{10}$$

Тогда $\rho_N(k)$ правильно меняется и, более того,

$$\frac{\rho_N(k)}{k^N \rho_0(k)} \longrightarrow \text{const}\,, \quad k \to \infty \quad \big(\text{const} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+N-1)\big). \tag{11}$$

Доказательство леммы. Доопределим $\rho_0(k)$ каким либо образом до функции, заданной на всей полуоси $[0, +\infty)$. Подберём M таким, чтобы $t^M \rho_0(t)$ была правильно меняющейся функцией порядка $\alpha + M > -1$. Тогда обобщённая функция $t^M \rho_0(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^M \rho_0(k)$ порядка $\alpha + M$, см. [**9**]. Применяя теперь теорему 3 о делении, заключаем, что существуют $c_j, j = 0, 1, \ldots, p$ такие, что обобщённая функция

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{p} c_j \delta^{(j)}(t) + \rho_0(t)$$

обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_0(k)$.

Заметим, что в силу однородности оператора $\left[t^2 \frac{d}{dt}\right]^N$ обобщённая функция $\left[t^2 \frac{d}{dt}\right]^N \psi(t)$, совпадающая при $t > k_0$ с правильно меняющейся функцией $\rho_N(t) = \left[t^2 \frac{d}{dt}\right]^N \rho_0(t)$, обладает квазиасимптотикой относительно $k^N \rho_0(k)$ порядка $N + \alpha$ и монотонна при $t > k_0$. Отсюда следует, что она обладает обычной асимптотикой, см. [**9**], то есть выполнено (11). Лемма доказана.

Перейдём теперь к доказательству теоремы. При $N > n$ имеем

$$t^N f(t) = t^N \sum_{j=0}^{n} c_j \delta^{(j)}(t) + t^N h(t) = t^N h(t).$$

Слева стоит неотрицательная мера и, следовательно, $t^N h(t)$ также неотрицательная мера, а потому

$$\left(-\frac{d}{dy}\right)^N \widetilde{h}(iy) = \int_0^\infty e^{-yt} t^N h(t) dt = \int_0^\infty e^{-yt} t^N f(t) dt \tag{12}$$

монотонно растёт при $y \to +0$. Делая замену $k = \frac{1}{y}$, получим, что $\left[k^2 \frac{d}{dk}\right]^N \widetilde{h}(\frac{i}{k})$ монотонно возрастающая функция. По условию (2) функция

$\widetilde{h}(i/k)$ порядка α. По доказанной лемме функция $\left[k^2\frac{d}{dk}\right]^N\widetilde{h}(\frac{i}{k})$ правильно меняется и, с учётом равенства $k=1/y$,

$$\frac{y^n}{\rho(1/y)}\left(-\frac{d}{dy}\right)^N\widetilde{h}(iy)\longrightarrow \text{ const},\quad y\to+0.$$

Согласно теореме 1, из (12) заключаем, что мера $t^N f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^{N-1}\rho(k)$. По теореме 3 существуют постоянные a_j, $j=0,1,\dots,p$ такие, что функция $h_1(t)=f(t)-\sum_{j=0}^p a_j\delta^{(j)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^{-1}\rho(k)$. Откуда вытекает, что

$$\frac{1}{\rho(1/y)}\widetilde{i}h_1(y)\longrightarrow \text{ const},\quad y\to+0.$$

Сравнивая с (1) и (2), имеем:

$$\frac{1}{\rho(1/y)}\left[\widetilde{i}h_1(y)-\widetilde{h}(iy)\right]=\frac{1}{\rho(1/y)}\sum_{j=0}^{p}(a_j-c_j)y^j\longrightarrow A-\text{const}, y\to+0. \tag{13}$$

Так как для любого ε существуют постоянные c_ε и C_ε такие, что

$$c_\varepsilon y^{-\alpha+\varepsilon}<\rho(1/y)<C_\varepsilon y^{-\alpha-\varepsilon} \text{ и } -n-1<\alpha<-n,$$

то (13) возможно лишь при $a_j=c_j, j=0,1,\dots,p$. Откуда и следует справедливость (4). Импликация доказана.

2. Асимптотическое поведение “хвостов” функции распределения

Пусть $F(t)$ функция распределения, так что $dF(t)$ — вероятностная мера:

$$\lim_{t\to-\infty}F(t)\equiv F(-\infty)=0;\quad \lim_{t\to+\infty}F(t)\equiv F(+\infty)=1;\quad \int_{-\infty}^{+\infty}dF(t)=1$$

Через $\widetilde{f}(x)$ обозначаем характеристическую функцию вероятностной меры:

$$\widetilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(t)$$

Теорема 4. *Пусть $F(t)$ — функция распределения некоторой случайной величины, $\rho(t)$ — правильно меняющаяся функция порядка α, где $-n-1<\alpha<-n$ для некоторого $n=0,1,\dots$. Для заданного $\varepsilon>0$ положим*

$$\Phi_\pm(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\widetilde{f}(\xi)d\xi}{\xi\mp iy}. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{f}(x)$ характеристическая функция вероятностной меры dF.

Тогда, если существуют постоянные $c_0, c_1, \dots, c_n$, такие что

$$\Phi_+(y) = \sum_{j=0}^{n} c_j y^j + \widetilde{h}(y), \quad y > 0, \tag{15}$$

причём

$$\widetilde{h}(y) \sim A\rho(1/y), \quad y \to +0, \tag{16}$$

то

$$1 - F(t) \sim \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} A\rho(t), \quad t \to +\infty. \tag{17}$$

Аналогично, если

$$\Phi_-(y) = \sum_{j=0}^{n} c_j y^j + \widetilde{h}(y), \quad y > 0, \tag{18}$$

причём

$$\widetilde{h}(y) \sim A\rho(1/y), \quad y \to +0, \tag{19}$$

то

$$F(-t) \sim \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} A\rho(t), \quad t \to +\infty. \tag{20}$$

Здесь A некоторая постоянная.

Доказательство. Введём функцию

$$\widetilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\widetilde{f}(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Так как $\widetilde{f}(x)$ непрерывна, то из (14) вытекает, что $\widetilde{\Phi}(z)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскости. Обозначая через $\widetilde{\Phi}_\pm(x)$ её граничные значения сверху и снизу (соответственно), имеем

$$\widetilde{\Phi}_+(x) - \widetilde{\Phi}_-(x) = \widetilde{f}(x) \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x), \tag{21}$$

где $\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ — характеристическая функция интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Представим меру dF в виде:

$$dF(t) = d\mu_+(t) - d\mu_-(t),$$

где $d\mu_\pm(t)$ — неотрицательная (соответственно неположительная) мера, сосредоточенная на положительной (отриацтельной) полуоси. Преобразование Лапласа $\widetilde{d\mu_\pm}(z)$ — аналитические функции в верхней (соответственно нижней) полуплоскости. Обозначая через $\widetilde{d\mu_\pm}(x)$ их (соответствующие) граничные значения, имеем

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{d\mu_+}(x) - \widetilde{d\mu_-}(x).$$

Покажем, что

$$\widetilde{d\mu_+}(z) = \widetilde{\Phi}(z) + \eta_1(z), \qquad \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \tag{22}$$

где $\eta_1(z)$ — аналитична в окрестности нуля.

Действительно, вводя функцию

$$\widetilde{W}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(z^2+1\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{f}(\xi)d\,\xi}{(\xi\mp z)(1+\xi^2)},$$

аналитическую в верхней и нижней полуплоскости, обозначая через $\widetilde{W}_{\pm}(x)$ её граничные значения сверху и снизу (соответственно), имеем

$$\widetilde{W}_{+}(x) - \widetilde{W}_{-}(x) = \widetilde{f}(x) = \widetilde{d\,\mu}_{+}(x) - \widetilde{d\,\mu}_{-}(x).$$

Переходя к обратному преобразованию Фурье, получаем

$$W_{+}(t) - W_{-}(t) = d\,\mu_{+}(t) - d\,\mu_{-}(t).$$

Причём $W_{+}(t)$ сосредоточена на правой полуоси, а $W_{-}(t)$ на левой. А потому, $d\,\mu_{+}(t)$ отличается от $W_{+}(t)$ лишь на обобщённую функцию сосредоточенную в нуле. Переходя к преобразованию Лапласа, видим, что существует полином $P_1(z)$ так, что

$$\widetilde{d\,\mu}_{+}(z) = \widetilde{W}(z) + P_1(z), \qquad \text{при } \operatorname{Im} z > 0. \tag{23}$$

Вводя функцию

$$\widetilde{W}^{\varepsilon}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(z^2+1\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\widetilde{f}(\xi)d\,\xi}{(\xi\mp z)(1+\xi^2)},$$

и обозначая её соответствующие граничные значения через $\widetilde{W}^{\varepsilon}_{\pm}(x)$, имеем

$$\widetilde{W}^{\varepsilon}_{+}(x) - \widetilde{W}^{\varepsilon}_{-}(x) = \widetilde{f}(x)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$$

Сравнивая с (21), получаем

$$\widetilde{W}^{\varepsilon}_{+}(x) - \widetilde{W}^{\varepsilon}_{-}(x) = \widetilde{\Phi}_{+}(x) - \widetilde{\Phi}_{-}(x).$$

Переходя к обратному преообразованию Фурье, имеем

$$W^{\varepsilon}_{+}(t) - W^{\varepsilon}_{-}(t) = \Phi_{+}(t) - \Phi_{-}(t),$$

причём $W^{\varepsilon}_{+}(t)$ и $\Phi_{+}(t)$ сосредоточены на правой полуоси, а $W^{\varepsilon}_{-}(t)$ и $\Phi_{-}(t)$ на левой. Следовательно, $W^{\varepsilon}_{+}(t)$ отличается от $\Phi_{+}(t)$ на обобщённую функцию сосредоточенную в нуле и, переходя к преобразованию Лапласа, выводим

$$\widetilde{\Phi}_{+}(z) = \widetilde{W}^{\varepsilon}_{+}(z) + P_2(z), \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \tag{24}$$

где $P_2(z)$ полином.

Сравнивая теперь (23) и (24), а также замачая, что

$$\widetilde{W}(z) = \widetilde{W}^{\varepsilon}(z) + \eta_2(z),$$

где $\eta_2(z)$ аналитична в окрестности нуля, получаем (22).

Пусть теперь выполнены условия (15)–(16). Согласно (22), разлагая $\eta_1(z)$ в ряд Тейлора, для $\widetilde{d\mu_+}(iy)$ получим

$$\widetilde{d\mu}(iy) = \sum_{j=0}^{n} c'_j y^j + \widetilde{h}_0(iy), \quad y > 0,$$

где

$$\widetilde{h}_0(iy) \sim A\rho(1/y), \qquad y \to +0.$$

По теореме 2, (утверждение 3 при $\ell = 0$), для первой первообразной имеем

$$\int_0^t dF(t) = c_0 + \rho(t)\left[\frac{A}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \bar{\bar{o}}(1)\right].$$

Так как $F(0) + c_0 = 1$, ибо dF — вероятностная мера, мы получаем (17). Аналогично, из (18) и (19) получается (20). Импликация доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–011–140).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Freud, *Restglied eines Tauberschen Satzes I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (1951), 299–308; *II* (1952), 299–307; *III* (1954), 275–288.
2. T. Ganelius, *Tauberian Remainder Theorems*, Lect. Notes Math. **232** (1971).
3. S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić, *Slowly Varying Functions with Remeinder Term and their Applications in Analysis*, Serb. Acad. Sci. Arts Monographs CDLXVIII Sect. Nat. Math. Sci. **41** (1974).
4. K. Nevels, *On stable attraction and Tauberian theorems*, Ph. D., University of Groningen, 1974, pp. 1–143.
5. S. Aljanči¸ *Abel und Mercer Satze mit Restglied*, in: *Theory of Approximation of Functions*, Proc. Int. Conf. Kaluga 1975, Nauka, Moscow, 5–9.
6. М.А. Субханкулов, *Тауберовы теоремы с остатком*, Наука, Москва, 1976.
7. А.Г. Постников, *Тауберова теория и её применения,* Труды МИАН, том 144, Наука, Москва, 1979.
8. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва, 1985.
9. В.С. Владимиров, Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций*, Наука, Москва, 1986.
10. Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов, *Тауберова теорема для квазиасимптотических разложений мер с носителями в положительном октанте*, Матем. сб. **185**(2) (1994), 57–86.

Мат. Инст. им. Стеклова
Вавилова 42
Москва 117966
Россия

(Поступила 03 03 1995)