

APPROXIMATION VON NICHTANALYTISCHEN FUNKTIONEN
DURCH EINE p -POLYANALYTISCHE FUNKTION*

Miloš Čanak

Abstract. We introduce and prove a fundamental theorem on approximation of any non-analytic infinitely differentiable complex function by a p -polyanalytic function with constant characteristic. An estimation of the approximation error is also given.

Ralević [1] und Čanak [2] haben auf verschiedene Art und Weise den Begriff der p -polyanalytischen Funktionen eingeführt. In dieser Arbeit betrachtet man die p -polyanalytischen Funktionen in der Form

$$P_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot f_k(z, \bar{z})$$

wobei $f_k(z, \bar{z})$ beliebige, p -analytische Funktionen sind, die durch das bekannte partielle Gleichungssystem von Položij

$$u'_x = v'_y/p, \quad u'_y = -v'_x/p, \quad (f = u + iv)$$

definiert werden.

Dieses System können wir auch in der Form

$$u'_x - v'_y = ((1-p)/p)v'_y, \quad u'_y + v'_x = -((1-p)/p)v'_x \quad (1)$$

schreiben. Wenn man die zweite Gleichung (1) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man die folgende komplexe Gleichung

$$pDf + i(1-p)Dv = 0, \quad (p \neq 0) \quad (2)$$

wobei

$$Df = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2f'_z, \quad (f = u + iv)$$

der bekannte Operator von Kolossov (die sgn. areoläre Ableitung) ist.

*Aus Anlass des 80. Geburtstages von Lothar Collatz

AMS Subject Classification (1990): Primary 30G20

In der Gleichung (2) ist die Charakteristik $p = p(x, y)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x und y . Im speziellen Fall $p = c = \text{const.}$ geht die Gleichung (2) in

$$D[pf + i(1-p)v] = 0 \quad (3)$$

über. Daraus folgt $pf + i(1-p)v = \varphi(z)$ oder

$$\frac{p+1}{2}f + \frac{p-1}{2}\bar{f} = \varphi(z) \quad (4)$$

wobei $\varphi(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist.

Aus (4) erhalten wir durch Konjugation nach einer kürzeren Rechnung auch die Formel

$$\frac{p+1}{2p}\varphi - \frac{p-1}{2p}\bar{\varphi} = f(z, \bar{z}). \quad (5)$$

Es sei K die Menge der stetigen komplexen Funktionen, P_c die Menge der p -analytischen Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ und \mathcal{A} die Menge der analytischen Funktionen ($\mathcal{A} \subset P_c \subset K$). Auf Grund der Formeln (4) und (5) führen wir auf der Menge K folgende Operatoren

$$R_c w = \frac{(c+1)w - (c-1)\bar{w}}{2c}, \quad R_c^{-1} w = \frac{(c+1)w + (c-1)\bar{w}}{2} \quad (6)$$

ein. Leicht sehen wir dass $R_c^{-1} R_c w = R_c R_c^{-1} w = w(z, \bar{z})$.

Jeder analytischen Funktion $\varphi(z)$ entspricht auf eine einzige Art und Weise eine p -analytische Funktion $f(z, \bar{z})$ mit der konstanten Charakteristik $p = c$ mittels des Operators

$$R_c \varphi = \frac{c+1}{2c}\varphi - \frac{c-1}{2c}\bar{\varphi} = f(z, \bar{z}).$$

Andererseits entspricht jeder p_c -analytischen Funktion $f(z, \bar{z})$ eine analytische Funktion, mittels des Operators

$$R_c^{-1} f = \frac{c+1}{2}f + \frac{c-1}{2}\bar{f} = \varphi(z).$$

Betrachten wir jetzt folgende komplexe Polynome

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot f_{k_c}(z, \bar{z}), \quad \Phi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot \varphi_k(z),$$

wobei f_{k_c} beliebige p -analytische Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ sind und $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen darstellen. Dabei ist $F(z, \bar{z})$ eine p -polyanalytische Funktion und $\Phi(z, \bar{z})$ eine gewöhnliche polyanalytische Funktion. Leicht sehen wir, dass die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} R_c^{-1} F &= R_c^{-1} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot f_{k_c} \right] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k R_c^{-1} f_{k_c} \\ R_c \Phi &= R_c \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot \varphi_k \right] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k R_c \varphi_k \end{aligned}$$

gelten.

Auf der Menge der differenzierbaren komplexen Funktionen im Sinne von Kolossov führen wir einen neuen Operator A_c als Komposition der Operatoren R_c , R_c^{-1} und D durch folgende Formel

$$A_c w(z, \bar{z}) = R_c D R_c^{-1} w$$

ein. Dieser Operator stellt die Verallgemeinerung des Operators von Kolossov D dar und reduziert sich im speziellen Fall ($c = 1$) auf denselben. Leicht sehen wir dass die folgenden Eigenschaften dieses Operators

- (I) $A^{(0)} w = R_c R_c^{-1} w = w, \quad A^{(1)} w = A w, \quad \dots, \quad A^{(k)} w = A[A^{(k-1)} w]$
- (II) $A[w_1(z, \bar{z}) \pm w_2(z, \bar{z})] = A[w_1(z, \bar{z})] \pm A[w_2(z, \bar{z})]$
- (III) $A[f_p(z, \bar{z})] = 0, \quad (f_p \in P_c)$
- (IV) $A \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot f_{k_c} \right] = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^{k-1} \cdot R_c(i\varphi_k)$

gelten.

Es sei $w = w(z, \bar{z})$ eine stetige, beliebig oft differenzierbare Funktion im Sinne von Kolossov. Wir entwickeln jetzt formal diese Funktion in eine komplexe Reihe der Form

$$w(z, \bar{z}) = f_{0_c}(z, \bar{z}) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) f_{1_c}(z, \bar{z}) + \dots + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^n f_{n_c}(z, \bar{z}) + \dots \quad (8)$$

wobei $f_{0_c}, f_{1_c}, \dots, f_{n_c}, \dots$ unbekannte p -analytische Funktionen mit der gegebenen konstanten Charakteristik $p = c$ sind.

Führen wir zuerst eine Abbildung $\alpha_{g(z)}$ ($g(z)$ ist eine beliebige analytische Funktion) der Menge K auf die Menge \mathcal{A} auf folgende Art und Weise ein: Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ ($w = w(z, \bar{z}) \in K, \Omega(z) \in \mathcal{A}$) kann aus der Funktion $w = w(z, \bar{z})$ entstehen, wenn man den Wert \bar{z} mit $g(z)$ vertauscht und den Wert z unveränderlich lässt. Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ enthält keine Veränderliche \bar{z} und darum ist sie analytisch. Der geometrische Sinn dieses Operators ist wie folgt: Wenn $\bar{z} = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossenen oder nichtgeschlossenen Kontur ist, so besitzen die Funktionen $w(z, \bar{z})$ und $\alpha_{g(z)} w$ den gleichen Randwert auf dieser Kontur.

Wenn wir auf der beiden Seite von (8) den Operator α_z anwenden, so erhalten wir

$$\alpha_z w(z, \bar{z}) = \alpha_z f_{0_c}(z, \bar{z}) = \alpha_z [(c+1)\varphi_0(z) - (c-1)\overline{\varphi_0(z)}] / (2c). \quad (9)$$

Aber wir betrachten jene Untermenge A_r der Menge \mathcal{A} , derer Taylorsche Entwicklung nur reelle Koeffizienten besitzt. In diesem Falle gilt

$$\overline{\varphi(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{z}^k = \varphi(\bar{z}),$$

und die Formel (9) geht in

$$\begin{aligned} \alpha_z w(z, \bar{z}) &= \alpha_z \frac{(c+1)\varphi_c(z) - (c-1)\varphi_c(\bar{z})}{2c} \\ &= \frac{(c+1)\varphi_c(z)}{2c} - \frac{(c-1)\varphi_c(z)}{2c} = \frac{\varphi_0(z)}{c} \end{aligned}$$

über. Daraus folgt $\varphi_0(z) = c\alpha_z w(z, \bar{z})$ und $f_{0_c} = R_c[c\alpha_z w(z, \bar{z})]$.

Durch Anwendung des Operators A und der Eigenschaft (IV) auf (8) erhält man

$$Aw(z, \bar{z}) = R_c(i\varphi_1) + 2\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)R_c(i\varphi_2) + \cdots + n\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^{n-1}R_c(i\varphi_n) + \cdots$$

und

$$\alpha_z Aw(z, \bar{z}) = \alpha_z R_c(i\varphi_1) = \alpha_z [(c+1)i\varphi_1 - (c-1)\overline{i\varphi_1(z)}]/2c = (i\varphi_1)/c, \quad (i\varphi_1 \in A_r).$$

Daraus folgt

$$\varphi_1 = \frac{c}{i}\alpha_z Aw(z, \bar{z}) \quad \text{und} \quad f_{1_c} = R_c\left[\frac{c}{i}\alpha_z Aw(z, \bar{z})\right].$$

Auf eine gleiche Art und Weise erhält man

$$\alpha_z A^{(2)}w = \alpha_z 2R_c[i^2\varphi_2] = 2!i^2\varphi_2/c, \quad (\varphi_2 \in A_r).$$

Daraus folgt

$$\varphi_2 = \frac{c}{2!i^2}\alpha_z A^{(2)}w \quad \text{und} \quad f_{2_c} = R_c\left[\frac{c}{2!i^2}\alpha_z A^{(2)}w\right].$$

Im allgemeinen Fall gilt

$$f_{k_c} = R_c\left[\frac{c}{k!i^k}\alpha_z A^{(k)}w\right] \quad (\varphi_{2k} \in A_r, i \cdot \varphi_{2k+1} \in A_r). \quad (10)$$

Wenn wir die Werte f_{k_c} aus (10) in (8) einsetzen, so erhalten wir die formale Entwicklung der Funktion $w(z, \bar{z})$ in die areoläre Reihe der Form

$$w(z, \bar{z}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^k \cdot R_c\left[\frac{c\alpha_z A^{(k)}w}{k!i^k}\right].$$

Wir betrachten den Streifen $-\delta/2 \leq \text{Im } z \leq \delta/2$ und schätzen den Fehler bei Approximation der Funktion $w(z, \bar{z})$ mit der p -polyanalytischen Funktion

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^k \cdot R_c\left[\frac{c}{k!i^k}\alpha_k A^k w\right]$$

in diesem Streifen ab. Zuerst beweisen wir die folgenden Lemmata.

LEMMA 1. *Wenn die Funktion $\varphi(z)$ analytisch und beschränkt im Streifen $-\delta/2 \leq \text{Im } z \leq \delta/2$ ist und wenn $|\varphi(z)| \leq \beta$ gilt, so gilt auch $|R_c\varphi| \leq \beta$ für jede reelle Zahl $c > 1$.*

Beweis.

$$|R_c\varphi| = \left|\frac{(c+1)\varphi - (c-1)\bar{\varphi}}{2c}\right| \leq \frac{c+1}{2c}|\varphi| + \frac{c-1}{2c}|\bar{\varphi}| \leq \frac{c+1}{2c}\beta + \frac{c-1}{2c}\beta = \beta.$$

LEMMA 2. *Wenn die Funktion $w(z, \bar{z})$ stetige areoläre Ableitung im δ -Streifen besitzt und wenn $|Dw| \leq \gamma_1$ gilt, so ist auch die verallgemeinerte areoläre Ableitung Aw in dem gleichen Streifen beschränkt.*

Beweis. Unmittelbar sehen wir dass

$$\begin{aligned}
|A_c w| &= |R_c D R_c^{-1} w| = \left| R_c D \left[\frac{(c+1)w + (c-1)\bar{w}}{2} \right] \right| \\
&= \left| R_c \frac{(c+1)Dw + (c-1)D\bar{w}}{2} \right| \\
&= \left| \frac{c+1}{2c} \left[\frac{(c+1)Dw + (c-1)D\bar{w}}{2} \right] - \frac{c-1}{2c} \left[\frac{(c+1)\overline{Dw} + (c-1)\overline{D\bar{w}}}{2} \right] \right| \\
|Dw| &= |D(u+iv)| = |(u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x)| \\
&= [u'^2_x + v'^2_y + u'^2_y + v'^2_x + 2(u'_y v'_x - u'_x v'_y)]^{1/2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|D\bar{w}| &= |D(u-iv)| = |(u'_x + v'_y) + i(u'_y - v'_x)| \\
&= [u'^2_x + v'^2_y + u'^2_y + v'^2_x - 2(u'_y v'_x - u'_x v'_y)]^{1/2}
\end{aligned}$$

gilt.

Wenn die partiellen Ableitungen u'_x , u'_y , v'_x und v'_y im δ -Streifen stetig und beschränkt sind und wenn die Majorante γ_1 von $|Dw|$ existiert, so muss auch eine reelle Konstante δ_1 existieren, so dass $|D\bar{w}| \leq \delta_1$ gilt. Daraus folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
|A_c w| &\leq \frac{(c+1)^2}{4c} \gamma_1 + \frac{c^2-1}{4c} \delta_1 + \frac{c^2-1}{4c} \gamma_1 + \frac{(c-1)^2}{4c} \delta_1 \\
&= \frac{c+1}{2} \gamma_1 + \frac{c-1}{2} \delta_1 = \theta_1.
\end{aligned}$$

Bemerkung 1. Wenn ein beliebiger Punkt z zum δ -Streifen gehört, so muss auch der Punkt \bar{z} dem gleichen Streifen, die symmetrisch im Bezug auf die Gerade $z = \bar{z}$ ist, gehören. Operator α_z bildet den Punkt \bar{z} in den Punkt z ab. Wenn die Majorante θ_1 von $|A_c w|$ existiert, so muss auch eine reelle, positive, Zahl ζ_1 als Majorante von $|\alpha_z A_c w|$ existieren ($|\alpha_z A_c w| \leq \zeta_1$).

Wenn die Funktion $w(z, \bar{z})$ stetige, areoläre Ableitungen beliebiger Ordnung in δ -Streifen besitzt, so existieren auf Grund des Lemmas 2 solche positive reelle Konstanten ζ_k dass

$$|\alpha_z A^k w| \leq \zeta_k, \quad (k = n+1, n+2, \dots). \quad (11)$$

Dann gilt

$$|R| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^k \cdot R_c \left[\frac{c}{k! i^k} \alpha_z A^k w \right] \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{c}{k!} \cdot \zeta_k.$$

Da die Werte ζ_k beschränkt sind, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{c}{k!} \cdot \zeta_k.$$

auf Grund des D'Alembert-schen Kriteriums und $|R| \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$. Daraus folgt der nächste

SATZ. Es sei $w(z, \bar{z})$ eine gegebene komplexe Funktion die beliebig oft im Streifen $-\delta/2 \leq \text{Im } z \leq \delta/2$ differenzierbar ist, und deren areoläre Ableitungen in dem gleichen Streifen beschränkt sind. Dann lässt sich die Funktion $w(z, \bar{z})$ im δ -Streifen durch eine p -polyanalytische Funktion n -ter Ordnung der Form

$$w(z, \bar{z}) \approx \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^k \cdot R_c \left[\frac{c \cdot \alpha_z A^{(k)} w}{k! i^k} \right] \quad (12)$$

approximieren. Für die Abschätzung des Approximationsfehlers können wir die Abschätzung vom Cauchyschen Typus für die Koeffizienten ausnützen und $|R| \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2. Im Falle wenn eine positive Zahl der Form $\zeta = \sup \zeta_k$ ($k = n+1, n+2, \dots$) existiert, ergibt sich die Abschätzung des Approximationsfehlers in folgender einfachsten Form

$$|R| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \frac{c \zeta_k}{k!} \leq c \zeta \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta/2)^k}{k!} \leq c \zeta \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}. \quad (13)$$

Bemerkung 3. Wenn einige der $\alpha_z A^k w$ ($k = n+1, n+2, \dots$) im δ -Streifen nicht beschränkt sind, so existiert kein endlicher Wert $\zeta = \sup \zeta_k$ und die Abschätzung (13) gilt nicht mehr. In diesem Falle können wir die Funktion $w(z, \bar{z})$ nur in dem endlichen Gebiet $-k_0 \leq \text{Re } z \leq k_0$ ($k_0 < \infty$), $-\delta/2 \leq \text{Im } z \leq \delta/2$ approximieren.

Beispiel. Man soll die Funktion $w(z, \bar{z}) = (3z + \bar{z})i / (\bar{z} - z + 2i)$ durch eine p -polyanalytische Funktion III Ordnung mit der gegebenen Charakteristik $p = 1/2$ approximieren und den Approximationsfehler im Gebiet σ : $-k_0 \leq \text{Re } z \leq k_0$, $-\delta/2 \leq \text{Im } z \leq \delta/2$, abschätzen.

Auf Grund der Formel (6), finden wir die Werte: $\alpha_z w = 2z$, $\alpha_z A w = 2iz$, $\alpha_z A^{(2)} w = 2 \cdot 2! \cdot i^2 z$, $\alpha_z A^{(3)} w = 2 \cdot 3! \cdot i^3 z$, \dots , $\alpha_z A^{(n)} w = 2 \cdot n! \cdot i^n z$.

Im Gebiet σ gilt $|z| \leq \sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2}$. Durch Ausnützung der Formel (10) erhalten wir die Werte

$$f_{0_c}(z, \bar{z}) = f_{1_c}(z, \bar{z}) = f_{2_c}(z, \bar{z}) = f_{3_c}(z, \bar{z}) = (3z + \bar{z})/2$$

und die gesuchte Approximation hat die Form

$$\frac{(3z + \bar{z})i}{\bar{z} - z + 2i} \approx \frac{3z + \bar{z}}{2} \left[1 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^3 \right].$$

Auf Grund (11) können wir die Approximationsfehler abschätzen. So haben wir

$$\begin{aligned} |R| &\leq \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{c}{k!} \zeta_k \leq \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{1/2}{k!} \cdot 2k! \cdot \sqrt{(\delta/2)^k + k_0^2} \\ &= \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2} = \frac{\sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2}}{1 - \delta/2} \left(\frac{\delta}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass in diesem Beispiel wie auch im allgemeinen Fall, besitzen die Funktion $w(z, \bar{z})$ und das Approximationspolynom den gleichen Randwert auf der x -Achse.

Bemerkung 4. Die nichtanalytische Funktion $w(z, \bar{z})$, lässt sich durch die gewöhnliche polyanalytische Funktion wie auch durch die p -polyanalytische Funktion approximieren. Im ersten Fall hat der Approximationsfehler die Form

$$\zeta \cdot \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}$$

(siehe [3]). Darum ist die andere Approximation (12) besser, weil wir die Charakteristik $p = c$ beliebig klein wählen können und dadurch auf die Abschätzung des Fehlers wirken.

Bemerkung 5. Im Falle $p = p(x, y)$ ist der Übergang von (2) nach (3) nicht möglich und darum ist die Verallgemeinerung des Satzes auf nicht-konstante Charakteristik sehr kompliziert. Aber, es ist möglich, anstatt der reellen Achse, eine einfache, glatte, geschlossene Kontur L in der Form $\bar{z} = g(z)$ zu wählen. Die günstigste Kontur ist der Kreis $\bar{z} = a^2/z$, denn sich die Funktion $w(z, \bar{z})$ in einem Kreisring $a - \delta/2 \leq a \leq a + \delta/2$ durch eine p -polyanalytische Funktion der Form (12) approximieren lässt.

LITERATUR

- [1] N. Ralević, Ph. D. Thesis, Mat. Fak. Belgrade, 1986.
- [2] M. Čanak, *Randwertaufgabe von Riemann-typus für die p -polyanalytischen Funktionen*, Mat. Vesnik **40** (1988), 197–203.
- [3] M. Čanak, *Über die α -Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom*, Z. Angew. Math. Mech. **69** (1989), 71–73.

Katedra za matematiku
Poljoprivredni fakultet
11090 Zemun
Jugoslavija

(Eingegangen den 26 12 1990)