PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 51 (65), 1992, 2–21

LE RÔLE DE LA FRANCE DANS LE DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES
(Conférence d'Élie CARTAN à Belgrade, 1940)

La science mathématique, comme toute autre science, est une œuvre collective, internationale ; elle constitue un patrimoine commun à toutes les nations civilisées ; chacune contribue selon ses forces à sa conservation et à son développement. Aucun mathématicien français ne refusera son hommage d'admiration aux grands génies étrangers, comme l'Italien GALILÉE, l'Anglais NEWTON, l'Allemand LEIBNIZ, le Suisse EULER, le Norvégien ABEL, l'Allemand GAUSS, l'Allemand RIEMANN, pour ne citer parmi les morts que les plus grands. Ce que je voudrais essayer de vous montrer aujourd'hui, c'est que la proportion des grands génies mathématiques ne le cède en France à celle d'aucune autre nation, et par eux les Français ont apporté à la création de la Mathématique une contribution des plus importantes. C'est pour moi un honneur et une joie d'être appelé aujourd'hui à le montrer devant un public ami, dans un pays que tant de liens déjà unissent au mien. Je serai obligé de faire un choix, ce qui comporte toujours une certaine part d'arbitraire ; je m'en excuse auprès de vous. Je m'excuse aussi des termes techniques que je serai parfois obligé d'employer. Mais je ne pourrai m'attarder à les définir d'une maniére précise, et ce serait après tout pour vous d'un assez médiocre intérêt.

En mathématiques, comme dans toute science, il y a deux sortes de savants. D'un côté, les grands, ceux qui ouvrent des routes royales en apportant une idée neuve, en général simple, à laquelle personne n'avait pensé avant eux ; et les autres, ceux qui, dans l'immense terrain ouvert au défrichement par les premiers, cultivent leur jardin, y cueillent des fruits souvent savoureux, récoltent des moissons souvent superbes. Le rôle de ces derniers est important, indispensable même ; mais on conçoit que l'humanité, et avec raison, retienne surtout les noms des premiers. C'est de ceux-là que je vous parlerai aujourd'hui.

„Le roi Henri IV, raconte Joseph Bertrand, recevant en son palais de Fontainebleau l'ambassadeur des Etats de Hollande, énumérait avec complaisance les beaux génies français qui, dans les lettres, dans les arts ou par de grandes actions, avaient surmonté leurs rivaux. — „Je les admire comme vous, répondit le Hollandais, qui se piquait de géométrie, mais la France jusqu'ici n'a pas produit un seul mathématicien". — „Romanus se trompe!" s'écria Henri IV et se tournant vers un serviteur, il lui ordonna d'aller quérir le seigneur de la Bigottière. Le seigneur de la Bigottière n'était autre que François Viète (1540–1603), le premier grand mathématicien français, le créateur de l'Algèbre moderne. Ce fut lui qui le premier eut l'idée géniale d'appliquer à des lettres représentant des quantités inconnues le symbolisme opératoire qui avait été peu à peu constitué depuis l'antiquité pour faciliter la solution des équations numériques particulières; il développe systématiquement cette idée pour laquelle il prévoyait une extension indéfinie. Par lui, à la fin de ce XVIème siècle où l'Italie s'était illustrée par une école florissante d'algébristes, la France prenait place dans la création des Mathématiques modernes. J'ajoute que Viète fut en relations assez suivies avec un des premiers mathématiciens yougoslaves, Marino Guétalditch, né à Doubrovnik (1566–1626), qui, en 1600 à Paris, s'occupa de l'édition d'un des derniers livres de Viète.

C'est avec le XVIIème siècle que s'ouvre pour la France une ère particulièrement glorieuse. Trois noms se détachent avec un relief singulier dans l'histoire des Mathématiques, de la Mécanique et de la Physique, ceux de Descartes, de Pascal et de Fermat.

Descartes, (1596–1650), philosophe, mathématicien, physicien, a été souvent regardé comme inaugurant une ère nouvelle dans l'histoire de l'intelligence humaine. Comme physicien, ses tentatives d'explication du Monde se sont révélées rapidement caduques; cependant son idée d'expliquer tous les phénomènes physiques par l'étendue et le mouvement n'a pas perdu tout intérêt pour nous, puisque le créateur de la Relativité généralisée est parti du même principe, qui ramène la Physique à la Geéométrie; mais les progrès des Mathématiques ont permis à Einstein de donner à ce principe une réalisation plus satisfaisante que celle imaginée par Descartes. En Mathématiques, le rôle de Descartes ne peut être sous-estimé. L'invention de la Géométrie analytique (1637) a pu lui être contestée. Il est certain que les géomètres grecs avaient introduit des nombres et des calculs dans leurs raisonnements, mais chez les Grecs ces nombres n'avaient pas dépouillé complètement le caractère géométrique qu'ils avaient eu constamment dans la science hellénique, et dont il reste encore des traces dans le langage courant quand sous le nom de „carré" ou de „cube", nous entendons aussi bien une figure géométrique qu'un nombre. C'est Descartes qui le premier eut l'idée d'utiliser systématiquement les nombres, considérés in abstracto, pour représenter les figures géométriques et réduire ainsi les raisonnements géométriques à des calculs. Par là, il créa un outil d'une puissance incomparable. C'est à lui qu'on doit faire remonter tous les développements dont la Géométrie est redevable à la Géométrie analytique d'abord, à la géométrie différentielle ensuite; il a du reste contribué lui-même à cette dernière en indiquant une méthode générale pour trouver les tangentes des courbes, au moins algébriques. C'est grâce à la Géométrie analytique que le mathématicien arriva peu à peu à concevoir des espaces à un nombre quelconque de dimensions et, s'habitua à faire des raisonnements géométriques dans ces espaces. On peut dire aussi que c'est grâce à elle que les mathématiciens ne sont pas dépaysés dans les espaces imaginés récemment par les physiciens pour rendre compte des phénomènes physiques, comme l'espace sphérique à trois dimensions. Ce sont là des répercussions lointaines sans doute, mais certaines, de l'invention géniale de Descartes. On lui doit aussi des contributions à l'Algèbre par sa règle des signes et à la Géométrie pure par un théorème, redécouvert plus tard par Euler et qui porte son nom : ce théorème donne une relation entre les nombres des sommets, des faces et des arêtes d'un polyèdre convexe ; en réalité c'est un des premiers théorèmes d'une science qui n'était pas encore née, l'Analysis situs. Enfin en Mécanique, Descartes, par son principe de la conservation de la quantité de mouvement, eut une intuition qui ne demandait qu'à être précisée pour fournir un des grands principes qui sont à la base de la Mécanique.

Pascal (1633–1662), génie extraordinaire et déconcertant, penseur profond, avait révélé une précocité étonnante en Géométrie, puisqu'à l'âge de 16 ans il avait composé un *Traité sur les sections coniques*, c'est-à-dire sur ces courbes déjà étudiées par les anciens comme sections planes d'un cône de révolution et qui interviennent dans les lois du mouvement des planètes établies par Kepler. Pascal se sert des travaux de son contemporain Desargues, l'un des plus grands géomètres français, précurseur avec Pascal lui-même de la géométrie projective ; prenant comme Desargues la perspective comme point de départ, Pascal réussit à ramener à une propriété unique et vraiment merveilleuse toutes celles qu'on peut attribuer à ces courbes, c'est celle de l'„Hexagramme mystique“, pour employer le terme de Pascal lui-même : étant donné un hexagone inscrit dans une conique, les points de concours des trois couples de côtés opposés sont en ligne droite. Pascal montrait dans ce premier travail la puissance d'invention d'un très grand géomètre.

Après Pascal précurseur de la géométrie projective, voici Pascal créateur du calcul des probabilités. Son ami le chevalier de Méré lui ayant posé deux questions sur les jeux de hasard, Pascal les résout par une méthode d'une admirable simplicité, ramenant de proche en proche tous les cas possibles au cas le plus simple. Fermat de son côté donne une solution fondée sur un tout autre principe. On peut suivre dans la correspondance entre ces deux grands génies la genèse des principes du calcul des probabilités. La portée des nouvelles recherches n'échappait pas á Pascal : „Joignant, disait-il, la riguer de la démonstration mathématique à l'incertitude du hasard, la nouvelle science peut s'attribuer avec justice ce titre stupéfiant : la Géométrie du hasard.“ On sait, par l'argument célèbre du pari, combien les réflexions de Pascal sur cette Géométrie du hasard ont influé sur le développement de ses pensées. On sait aussi le rôle de plus en plus important qu'elle a pris dans l'évolution de la science moderne, des parties entières de la Physique n'étant plus que des chapîtres du Calcul des probabilités et beaucoup de lois physiques n'étant plus considérées que comme des lois du hasard.

Fermat (1601–1665), dont nous avons parlé il y a un instant, est l'un des plus grands génies mathématiques. Conseiller au Parlement de Toulouse à l'âge de 30 ans, il le resta jusqu'à sa mort. Ses fonctions ne semblaient pas le destiner spécialement à la gloire mathématique ; mais sans doute se ménageait-il des loisirs suffisants pour se livrer à ses études favorites Fermat est surtout célèbre par ses recherches sur l'Arithmétique et et la Théorie des nombres. On lui doit une foule de théorèmes dont il avait inscrit les énoncés sans démonstration dans les marges d'un exemplaire de l'ouvrage du grec Diophante sur les équations indéterminées, ouvrage dont Bachet de Méziriac, l'auteur des *Problèmes plaisants et délectables*, avait publié récemment une édition (1612). Il est certain que Fermat était ou se croyait être en possession des démonstrations. Le plus célèbre de ces théorèmes, connu sous le nom de dernier théorème de Fermat, est celui d'après lequel la somme de deux puissances $n^{\text{ièmes}}$ (n étant un exposant supérieur à 2) ne peut être elle-même une puissance $n^{\text{ième}}$. Ce théorème a suscité une quantité innombrable de mémoires; personne depuis Fermat n'a jamais pu démontrer avec certitude sa vérité non plus que sa fausseté, on a fait appel pour cela aux théories les plus abstraites de l'Algèbre moderne, théories dont Fermat n'avait certainement aucune idée. On sait depuis longtemps que si le théorème n'est pas exact, il ne peut tomber en défaut que pour des valeurs exceptionnelles de l'exposant n on ne sait pas si ces valeurs exceptionnelles sont en nombre fini ou infini. Par les seules recherches que ce théorème a suscitées, par les théories mathématiques qu'il a amené à créer ou à perfectionner, Fermat a exercé une influence considérable sur le développement de la théorie des nombres. Ses contemporains lui reconnaissaient dans ce domaine une maîtrise incontestée. Pascal dans une de ses lettres confesse que les inventions numériques de Fermat le passent de bien loin et qu'il n'est capable que de les admirer.

Mais Fermat ne s'est pas borné à la théorie des nombres. La première moitié du XVIIème siècle est une période pendant laquelle le calcul intégral et le calcul différentiel recevaient un peu partout une impulsion féconde. Il nous suffira de citer pour le calcul intégral (calcul des aires, des volumes, détermination des centres de gravité), les noms de Cavalieri, de Roberval. Fermat poussa très loin ses recherches dans ce domaine et c'est à lui qu'on doit des procédés d'intégration devenus classiques. Pascal, en résolvant les problèmes de la roulette qu'une nuit un furieux mal de dents l'avait poussé à examiner pour se distraire de la douleur, arriva à l'intégration des puissances de lignes trigonométriques. Dans le calcul différentiel (problème des tangentes) on retrouve les mêmes noms. Fermat, avec sa méthode „de maximis et minimis", prelude à la conception de l'infiniment petit. En fait Lagrange et Laplace reconnaissaient en Fermat le premier fondateur du calcul infinitésimal, et M. Émile PICARD a pu dire que l'ouvrage de Pascal sur la roulette est le premier Traité de Calcul intégral. Les formules mêmes du Calcul infinitésimal de Leibnitz sont nées des annotations mises par Leibnitz à une copie d'un manuscrit de Pascal où, suivant ses propres expressions, il „puisa soudainement la lumière".

Il serait injuste de quitter ces grands génies sans signaler que dans sa vie si courte, Pascal a trouvé le temps de construire à vingt ans la première machine arithmétique, capable d'exécuter les additions et les soustractions. Il fut le créateur, après Archimède de l'Hydrostatique par son *Traité de l'équilibre des liqueurs*, et ce n'est pas sans émotion que dans la petite chapelle bâtie sur l'emplacement de l'église de Port-Royal, on voit, non loin du masque mortuaire de Pascal, le tonneau qui lui a servi à vérifier ce que nous appelons maintenant le principe de Pascal. Enfin on connaît ses expériences du Puy de Dôme sur la pression atmosphérique, peut-être suggérées par le P. Mersenne, l'animateur du petit groupe de philosophes, de mathématiciens et de physiciens qui, avant la création de l'Académie des Sciences en 1666, formait une première petite Académie très vivante. Heureux temps où le même homme pouvait exceller en même temps en philosophie, en mathématiques et en Physique, et où un philosophe comme l'oratorien Malebranche avait l'intuition géniale que les couleurs étaient dues à la plus ou moins grande fréquence des ondulations qui produisent la lumière !

II

La seconde moitié du XVIIème siècle et le début du XVIIIème sont dominés par les grandes figures du Hollandais HUYGENS (1629–1693), de l'Anglais NEWTON (1642–1727) et de l'Allemand LEIBNIZ (1646–1716). Il me suffira de rappeler qu'aux deux derniers est due l'invention ou, si l'on veut, la systématisation du calcul infinitésimal et que le premier est surtout célèbre par son *Traité de la Lumière*, où est développée pour la première fois une théorie ondulatoire de la lumière, opposée à la théorie de l'émission de Newton. La grande révolution scientifique qui se rattache à cette période est sans contestation la mise en évidence par Newton du fait que ce sont les mêmes lois mécaniques qui régissent les mouvements des astres dans le Ciel et les mouvements des corps à la surface de la Terre. Une seule et même loi, l'attraction universelle, explique les mouvements des planètes, de la lune et des comètes, la pesanteur terrestre, les marées, etc... Une science toute nouvelle était créée par le génie de Newton, la Mécanique céleste. Mais si les principes et les premiers débuts de cette théorie sont nés en Angleterre, c'est en France qu'elle trouve à son développement un terrain particulièrement favorable. Il me suffira, pour vous en convaincre, de citer les noms de ceux qui ont le plus contribué à son développement : Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Poisson, le Verrier, Tisserand, enfin et surtout Henri Poincaré.

Je m'arrêterai un peu sur le premier d'entre eux, CLAIRAUT. Alexis CLAIRAUT (1713–1765) second d'une famille de vingt et un enfants dont le père était professeur de Mathématiques, eut une précocité comparable à celle de Pascal ; à la différence de Pascal cependant, ses premières recherches ne pouvaient faire présager l'importance de ses travaux ultérieurs. A douze ans et demi il envoyait une communication à l'Académie des Sciences, puis à seize ans un mémoire sur les courbes à double courbure. A dix-huit ans, il était nommé par le Roi, contrairement aux réglements, adjoint à la section de Mécanique de l'Académie des Sciences. Je passe sur ses recherches de Mathématiques pures, en particulier sur l'intégration des équations différentielles, qui ont fait connaître son nom à tous les étudiants de calcul différentiel, pour arriver aux travaux qui l'ont rendu célèbre. Newton et Huygens, pour des raisons théoriques, avaient pressenti l'aplatissement de la Terre aux pôles et l'avaient même calculé. Mais des mesures faites par Cassini en 1701 sur la longuer d'un arc de méridien de Paris aux Pyrénées avaient semblé mettre en doute cet aplatissement. A la suite de discussions confuses, mais vives, l'Académie des Sciences fit décider en 1736 l'envoi en Laponie d'une mission dirigée par MAUPERTUIS afin d'y mesurer un arc de méridien. Clairaut faisait partie de l'expédition dont les travaux, rendus fort pénibles par la neige et la nuit arctique, donnèrent pour le degré d'un arc méridien une longuer nettement supérieure à celle que Cassini avait trouvée en France. L'aplatissement de la terre était mis en évidence sans contestation possible. Ce fut Maupertuis, qui recueillit naturellement toute la gloire de l'expédition : il se fit peindre, la tête affublée d'un bonnet d'ours et aplatissant le globe de la main. Mais Clairaut ne cessait de méditer sur les causes de cet aplatissement et il chercha à déterminer théoriquement la forme géométrique d'une planète fluide sous l'action des attractions newtoniennes. Les résultats de ses méditations et de ses calculs furent exposés dans un livre : *la Théorie de la figure de la Terre* (1743), chef-d'œuvre classique supérieur, a dit d'Alembert, à tout ce qui avait été fait jusque là dans cette matière, et qui marque une date importante dans l'histoire de la Mécanique céleste. Clairaut fut également un précurseur dans la théorie difficile de la Lune ébauchée par Newton. Il exposa ses résultats dans son livre *Théorie de la Lune* (1732), qui fut suivi deux ans après de tables numériques montrant comme dit Fontaine, „tous les pas que la Lune fait dans les cieux". Clairaut devait gagner quelques années après une célébrité universelle en prédisant la date du retour attendu de la comète de Halley : il calcula que la comète serait retardée de 100 jours par l'action de Saturne et de 518 par celle de Jupiter, qu'elle passerait au périhélie vers le 13 avril 1759, mais que les nombreuses quantités qu'il avait été obligé de négliger dans ses calculs pourraient en altérer le terme d'un mois. C'est le 13 mars en effet qu'eut lieu son retour. Une célébrité analogue devait arriver près d'un siècle plus tard à l'astronome français Le Verrier quand il signala la position dans le ciel de la planète inconnue qui troublait la marche d'Uranus.

III

La dernière moitié du XVIIIème Siècle fut dominée par les grands noms d'Euler et de Lagrange, auxquels on peut ajouter celui de d'Alembert, qui ne peut cependant être comparé aux deux premiers. Léonard EULER (1707–1783) „princeps mathematicorum", né à Bâle, passa une partie de sa vie à St Pétersbourg et à Berlin : son génie brilla dans toutes les branches des Mathématiques et son œuvre eut une influence considérable et durable. Je me rappellerai toujours pour ma part l'émerveillement que me produisit après la classe de Mathématiques spéciales, la lecture de son Introduction à l'Analyse infinitésimale qui m'avait été donnée en prix : tout un monde nouveau s'ouvrait devant moi et me préparait à mieux comprendre les leçons qui allaient m'être données à la Sorbonne et à l'École Normale.

D'ALEMBERT (1717–1783) marqua sa trace en différents domaines des mathématiques. En Algèbre, un théorème célèbre porte son nom, d'après lequel toute équation algébrique a autant de racines réelles ou imaginaires qu'il y a d'unités dans son degré. La démonstration que d'Alembert donna de ce théorème n'est pas rigoureuse ; celle qu'Euler donna à son tour, fondée sur un tout autre principe, n'est pas non plus exempte de reproches. Il faudra arriver à l'illustre mathématicien Gauss pour en trouver une rigoureuse, mais c'est Cauchy qui mit en évidence la vraie raison très simple du théorème. En Analyse, je signalerai seulement la première formation correcte par d'Alembert de l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes. Enfin en Mécanique le principe connu sous le nom de principe de d'Alembert, permet de ramener la Dynamique à la Statique et prépare les voies à la Mécanique analytique de Lagrange.

Lagrange (1736–1813) né à Turin d'une famille autrefois française passa comme Euler quelques années à Berlin et s'installa définitivement à Paris en 1787, de sorte que la France peut le revendiquer à juste titre comme une de ses gloires. C'est un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Son activité s'exerce dans tous les domaines des Mathématiques. En théorie des nombres, il démontre le théorème de Fermat pour l'exposant 4. En Algèbre, il prépare les voies à Abel, Gauss et Galois en développant une méthode uniforme qui ramène la résolution d'une équation algébrique à la formation et à la résolution d'équations de degré inférier : il montre que si les équations du troisième et du quatrième degré peuvent être résolues par cette voie, il n'en peut être de même de celles du cinquième degré. En Analyse il donne une méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et acquiert la notion de solution singulière. Dans sa Théorie des Fonctions, il cherche, mais sans y arriver complètement, à donner une base rigoureuse au Calcul infinitésimal dont les principes n'avaient pas encore acquis la rigueur voulue, bien que personne ne doutât de la vérité des conséquences qu'on en tirait ; néanmois cet ouvrage, où pour la première fois une fonction était considérée in abstracto, indépendamment de sa signification géométrique ou mécanique, eut une influence considérable et prépara la voie à la théorie moderne des fonctions. L'esprit de généralisation de Lagrange se montre nettement dans ses travaux sur le calcul des variations. Ce Calcul était né dans le courant du XVIIIème siècle des travaux des Suisses Bernoulli et d'Euler. Il avait son origine dans des problèmes de Géométrie ou de Mécanique dont le plus simple était de trouver sur une surface la ligne la plus courte entre deux points donnés ; l'inconnue cherchée ici, au lieu d'être un nombre, était quelque chose de beaucoup plus compliqué puisque c'était une ligne composée d'une infinité de points. Ce Calcul avait pris une grande importance en Mécanique par le principe de la moindre action de Maupertuis, qui ramenait la recherche de la trajectoire d'un point dans un champ de forces donné à un problème de maximum ou de minimum. N'oublions pas du reste que Fermat avait déjà ramené les lois de l'Optique à un principe analogue, le rayon lumineux suivant d'un point à un autre le chemin qui demande le moindre temps de parcours. Dans une théorie où presque chaque problème devait être traité par une méthode particulière, Lagrange introduit une méthode générale, indépendante de la nature du problème en faisant intervenir la variation infinitésimale qu'on peut faire subir à la ligne inconnue et en apprenant à soumetre cette variation au calcul.

Je passe sur les travaux de Lagrange en Mécanique céleste pour arriver à son œuvre fondamentale qu'est la création de la *Mécanique analytique* (1788).

Tous les grands principes de la Mécanique moderne avaient été successivement conquis grâce à Galilée, Descartes, Huygens, Leibniz, Newton et d'Alembert. Mais la nécessité de tenir compte des forces de liaison inconnues pour déterminer le mouvement d'un système soumis à des forces données rendait souvent bien pénible cette détermination. Lagrange, par un coup de génie, l'introduction de la notion de travail virtuel, écarte complètement l'obstacle, au moins dans le cas où il n'y a pas de frottement, et donne une méthode tout à fait générale pour former presque automatiquement les équations qui régissent le mouvement cherché : il suffit pour cela de savoir calculer l'expression de la force vive du système et celle du travail élémentaire effectué par les forces données pour un déplacement infinitésimal virtuel du système. En dehors de sa portée pratique, cette création admirable a une portée philosophique considérable parce qu'elle met en pleine lumière ce qu'il y a d'essentiel au point de vue de ses propriétés mécaniques dans un système matériel quelconque. Le génie de Lagrange s'égale ici au génie de Descartes créant la géométrie analytique.

Les „équations de Lagrange“ de la Mécanique analytique, ont fourni un modèle analytique pour les différentes explications mécaniques qu'on a tentées de certaines théories physiques. A ce point de vue on doit leur attribuer une grande importance philosophique ; mais si l'on a eu pendant la plus grande partie du XIXème Siécle l'illusion de pouvoir tout expliquer par la Mécanique, de même que Descartes avait eu l'illusion de tout expliquer par la Géométrie, il semble que cette illusion soit maintenant bien abandonnée. Retenons néanmoins de cela l'aptitude des mathématiques à fournir aux physiciens des moules analytiques pour leurs théories. On en a vu récemment de nombreux exemples.

Certains excellents esprits ont vu un écueil dans ces admirables constructions synthétiques, comme celle de Lagrange, qui permettent d'embrasser d'un seul coup d'œil une immense série de phénomènes : elles risquent en effet de faire perdre le contact avec la réalité concrète. C'est ainsi que le grand géomètre Poncelet, célèbre par ses travaux de mécanique, répugnait à utiliser la méthode de Lagrange, préférant dans chaque problème de Mécanique suivre dans le détail le jeu des différentes forces pour arriver pas à pas à leurs actions finales. Le même Poncelet, pour une raison analogue, répugnait à se servir de la Géométrie analytique, préférant par l'examen direct des figures géométriques, suivre les relations des différentes parties les unes avec les autres par l'application des principes de la Géométrie des Anciens. Il y a à cet égard deux sortes d'esprits ; les uns et les autres sont nécessaires aux progrès de la Science. Il s'en trouve des uns et des autres parmi les grands mathématiciens français.

IV

La prépondérance française en Mathématiques très marquée déjà à la fin du XVIIIème siècle (Euler était mort en 1783) s'accentue avec la Révolution française et le début du XIXème siècle. Parmi les grands noms de cette période on peut citer Monge, Laplace et Legendre.

Laplace (1749–1827) est universellement connu par ses travaux de Mécanique céleste, qu'il vulgarisa dans son admirable *Exposition du système du Monde.*

La réussite merveilleuse qui permet d'expliquer dans le détail presque tous les phénomènes célestes le conduisit à formuler une conception longtemps classique du déterminisme scientifique, d'après laquelle la connaissance à un instant donné des positions des divers points matériels qui composent l'Univers et de leurs vitesses suffit pour en déduire leurs positions et leurs vitesses à un instant quelconque de la durée, à condition toutefois de connaître la loi des forces suivant lesquelles ces points réagissent les uns sur les autres, et ces forces étaient du reste conçues sur le modèle des forces d'attraction newtonienne. C'est suivant cette conception que la Physique Mathématique s'est développée pendant longtemps. Ce n'est qu'assez récemment que cette conception a été battue en brèche par le développement de l'Electromagnétisme et de la Physique atomique. Elle a eu cependant une influence énorme sur le développement de la science. On doit encore à Laplace une œuvre considérable, sa *Théorie analytique des probabilités* (1812) dont une des parties les plus importantes est l'application de la notion de probabilité à la méthode des moindres carrés déjà indiquée par Legendre. C'est dans ses recherches sur l'attraction des ellipsoïdes que Laplace introduit les fonctions sphériques au moyen desquelles on peut représenter n'importe quelle fonction d'un point d'une sphère. C'esta là aussi qu'on trouve la célèbre équation de Laplace à laquelle satisfait le potentiel newtonien, potentiel dont l'introduction dans la science est due à Lagrange. Cette équation se présente dans maints problèmes d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique et de Physique.

Avec LEGENDRE (1752–1833) nous assistons à un renouveau de la Théorie des nombres qu'Euler avait du reste cultivée avec grand succès. On doit à Legendre en Arithmétique une loi de réciprocité qui porte son nom bien qu'elle ait été énoncée par Euler quelques années auparavant. C'est Legendre qui l'énonça pour la première fois avec netteté et en donna une démonstration partielle. Gauss la découvrit plus tard une troisième fois et en donna plusieurs démonstrations rigoureuses et complètes. Mais la grande œuvre de Legendre, qui lui demanda de nombreuses années de travail, est son grand traité en deux volumes *Sur les integrales elliptiques* publié en 1825 et 1826. Il y fait une étude complète de ces intégrales, où intervient la racine carrée d'un polynome du quatrième degré ; il indique les différentes formes remarquables qu'on peut donner à ces intégrales. Par cette œuvre Legendre est un précurseur de la belle théorie des fonctions elliptiques, qu'il laissa à l'Allemand Jacobi et au Norvégien Abel la gloire de fonder. Signalons enfin ses *Eléments de Géométrié* (1794) qui eurent de nombreuses éditions et qui bientôt dans les pays anglo-saxons remplacèrent dans l'enseignement les *Eléments* d'Euclide ; ils eurent une certaine importance dans l'histoire de la géométrie non euclidienne.

MONGE (1746–1818) est un des plus grands géomètres français. Il l'est à un double titre. D'abord par sa création de la Géométrie descriptive moderne, il se rattache à une longue histoire, celle de la perspective dont les principes étaient déjà connus des peintres italiens de la Renaissance et dont Desargues et à sa suite Pascal avaient fait des applications importantes à la théorie des coniques, suivis plus tard dans la même voie par le géomètre français de la Hire qui avait étendu aux coniques la théorie des pôles et polaires dans le cercle. Monge systématisa la géométrie descriptive et le premier y fit figurer des constructions sur des surfaces autres que le plan. D'autre part, par ses *Applications de l'Analyse à la Géométrie*, Monge donna une impulsion considérable à la géométrie différentielle, branche vite détachée de la Geométrie analytique de Descartes, en faisant des propriétés des surfaces une étude approfondie inaugurée par Euler et par Meusnier ; c'est à lui qu'on doit la notion des lignes de courbure, avec leurs applications à la stéréotomie ; c'est lui qui eut l'idée de caractériser de larges familles de surfaces comme l'ensemble des solutions d'une même équation avec dérivées partielles. Il intégra l'équation qui donne les surfaces minima, surfaces qui firent plus tard jusqu'a nos jours, l'objet de travaux importants, et qui ont été réalisées d'une manière concrète dans les expériences de Plateau. Les théories de Monge furent l'objet de son enseignement à l'École Normale fondée par la Convention en 1795 ainsi qu'à l'École Polytechnique, où enseignèrent également Lagrange et Laplace. Il sut réunir autour de lui un large cercle de disciples, parmi lesquels je me contenterai de citer DUPIN, connu par ses *Développements de Géométrie* où il introduit les notions de tangentes conjuguées et d'indicatrice en un point d'une surface ; on peut aussi le regarder comme un des précurseurs de la géométrie affine.

V

La première moitié du XIXème siècle se marque en France par les noms de Fourier, Cauchy, Poncelet et Galois. Génies bien différents les uns des autres, mais qui tous ont ouvert des voies nouvelles à la science.

FOURIER (1768–1830) peut être considéré comme le créateur de la Physique mathématique. Je passe sur ses travaux d'Algèbre, bien qu'ils ne soient pas négligeables, pour en venir tout de suite à sa *Théorie mathématique de la chaleur* parue en 1822, mais méditée au moins depuis 1807. Par cet ouvrage Fourier ouvre à l'analyse mathématique un domaine nouveau. „Les équations analytiques, dit-il, ignorées des anciens géomètres, que Descartes a introduites le premier dans l'étude des courbes et des surfaces, ne sont pas restreintes aux propriétés des figures et à celles qui sont l'objet de la Mécanique rationnelle ; elles s'étendent à tous les phénomènes généraux... Considérée sous ce point de vue, l'Analyse mathématique est aussi étendue que la Nature elle-même ; elle définit tous les rapports possibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures... Elle suit la même marche dans l'étude de tous les phénomènes, elle les interprète par le même langage comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'Univers et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles.“ N'oublions pas du reste que pour Fourier, c'est dans l'étude approfondie de la Nature que réside la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Fourier ne pouvait mieux dire, car la Théorie mathématique de la Chaleur a eu des répercussions considérables sur le développement des mathématiques pures. La théorie des séries trigonométriques, fondée par Fourier pour l'intégrtion des équations aux dérivées partielles qu'il avait rencontrées, a suscité une foule innombrable de travaux destinés à l'asseoir sur des bases tout à fait rigoureuses, à la compléter, à la développer. Un des principaux problèmes à résoudre était de savoir quelles sont les fonctions susceptibles d'être représentées par une série de Fourier. Les exemples donnés par Fourier lui-même en montraient de bien étranges et devaient susciter dans l'esprit des mathématiciens un étonnement analogue à celui qu'aurait éprouvé un musicien si on lui avait révélé qu'en composant d'une manière convenable des sons purs et leurs divers harmoniques en nombre fini ou infini on pouvait réaliser n'importe quelle suite incohérente de brutis. Tous ces résultats étranges obligèrent les mathématiciens à réviser et à préciser la notion, du reste bien vague, qu'ils se faisaient d'une fonction, puis, de proche en proche, à réfléchir sur les fondements de leur science. De là des répercussions inouïes qui ne sont pas encore arrivées à leur terme. La théorie des ensembles, qui a causé tant de mécomptes aux mathématiciens et dont ils ont eu tant de mal à débrouiller les paradoxes sans, je crains bien, y être arrivés complètement, a certainement trouvé là son origine profonde, ainsi que la théorie des fonctions d'une variable réelle, œuvre de la Mathématique française de la fin du XIXème siècle et du début du XXème.

Avec Augustin CAUCHY (1789–1857) nous trouvons un génie d' une fécondité extraordinaire, qui a abordé avec succès toutes les parties des Mathématiques, la Théorie des nombres, la Géométrie, l'Analyse, la Mécanique céleste. Il inaugure vraiment en Mathématiques l'ère de la riguer, ne se contentant pas, comme l'avait fait Euler, d'écrire des séries sans s'assurer qu'elles avaient un sens, c'est-à-dire qu'elles étaient convergentes ; c'est à lui-même qu'on doit la règle générale, retrouvée beaucoup plus tard par M. Hadamard, qui permet de savoir pour quelles valeurs de la variable les séries entières étudiées si longuement au XVIIIème siècle, sont convergentes. La grande œuvre de Cauchy est la création de la théorie des fonctions de variable complexe, ou imaginaire. Les quantités imaginaires avaient pendant plus de trois siècles été le scandale des Mathématiques. Les algébristes italiens du XVIème siècle les avaient rencontrées, sans pouvoir s'en débarasser, dans la formule donnant les racines d'une équation du troisième degré, et cela dans le cas paradoxal où toutes ces racines sont réelles. Il avait bien fallu s'en accommoder et on avait, en s'en servant et en apprennant à calculer avec elles, obtenu très facilement dans le domaine des quantités réelles des résultats importants qu'on eût eu beaucoup de peine à obtenir sans elles. Le mystère fut éclairci à la fin du XVIIIème siècle par le mathématicien suisse Argand qui donna des quantités imaginaires une interprétation concrète, comme quantités susceptibles de mesurer les vecteurs d'un plan en tenant compte non seulement de leur longueur mais de leur direction. Cauchy s'en servit pour représenter un point du plan non pas par deux coordonnées réelles, mais par une coordonnée imaginaire (ou plutôt complexe) d'où l'idée de fonction d'une variable complexe regardée comme définissant une loi qui fait correspondre à un point du plan un autre point du plan, avec une condition supplémentaire essentielle assurant l'existence de la dérivée de la fonction. Cauchy créait ainsi un monde nouveau, comprenant du reste toutes les fonctions habituelles. Les êtres de ce monde sont parfaitement organisés : de même que Cuvier pouvait reconstituer un être antédiluvien en connaissant une fraction de son squelette, le mathématicien, et avec plus de sûreté, peut reconstituer une fonction de Cauchy en connaissant ses valeurs en tous les points d'un arc de courbe aussi petit qu'il soit. Dans ce monde nouveau règnent un ordre, une harmonie admirables et, si l'on excepte la Théorie des nombres, rien ne donne une impression de plus grande beauté que la longue chaîne des théorèmes qui régissent les propriétés de ces fonctions et les nombreuses applications qu'on en peut faire. La grandeur de l'œuvre de Cauchy se mesure à la longue suite de travaux consacrés aux fonctions de variable imaginaire, car Cauchy laissait à découvrir plus de choses peut-ètre qu'il n'en soupçonnait lui-même. Un théorème très beau par sa simplicité même a suffi presque à rendre immortel le nom de Liouville. Un autre théorème célèbre, qui porte le nom du plus grand peut-être des mathématiciens vivants, Emile Picard, a ouvert, au moment où tout jeune encore il l'a découvert, d'immenses horizons insoupçonnés jusqu'alors et a suscité une suite non encore épuisée de recherches. Un grand mathématicien allemand Weierstrass a développé la théorie des fonctions de variable complexe en prenant un point de départ différent de celui de Cauchy. On a longtemps regardé comme indifférent ce changement de point de vue, mais M. Emile Borel, et c'est là l'une de ses plus belles découvertes, a montré qu'il n'en était rien et que le point de vue de Cauchy allait plus profondément au fond des choses. Il a réussi en effet à enlever d'un plan assez de parties pour qu'aucun cercle, si petit qu'il fût, restât intact, et il a pu dans ce qui restait définir une fonction satisfaisant à toutes les conditions de Cauchy mais incapable de se plier à la définition de Weierstrass, qui exige toute une portion intacte du plan pour qu'une fonction de variable complexe puisse y exister. M. Emile Borel a du reste contribué puissamment aux progrès de la théorie des fonctions de variable complexe par la création de sa collection célèbre de monographies sur la théorie des fonctions, à laquelle ont collaboré et collaborent encore des savants de tous les pays.

Avec Poncelet (1788–1867) nous entrons dans le domaine de la Géométrie pure. Poncelet est regardé comme le créateur de la géométrie projective, qui a pour objet l'étude des propriétés des figures qui se conservent par projections. On lui doit une notion extrêmement féconde et nouvelle, celle de la transformation par polaires réciproques, qui permet de déduire d'une figure plane une autre figure plane, mais avec la propriété singulière qu'aux points de la première correspondent des droites de la seconde et inversement. Cette transformation permet souvent de ramener la démonstration de certaines propriétés d'une figure à celle de propriétés, plus faciles à démontrer, d'une autre figure. Gergonne déduisait de là un peu plus tard le principe de dualité qui joue un rôle fondamental en Géométrie projective. On doit enfin à Poncelet un principe auquel il attachait une grande importance, le principe de continuité. Quand une certaine propriété a été démontrée pour une figure, elle ne cesse pas d'être vraie quand on déforme cette figure en respectant les relations qui ont été supposées entre ses différents éléments. Ce principe, tel qu'il a été énoncé par Poncelet, a été contesté par Cauchy, qui a pu donner facilement des exemples où il était en défaut ; mais énoncé correctement et d'une manière plus précise que ne le faisait Poncelet, il est parfaitement rigoureux. Il rend de grands services et est souvent utilisé. L'influence de Poncelet a été considérable en Géométrie, les travaux des géomètres allemands Steiner et Staudt lui doivent leur origine ; en France Chasles le premier titulaire de la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne, fut un des plus brillants représentants de la Géométrie pure moderne. C'est à Chasles qu'on doit un monument d'histoire remarquable, *l'Aperçu historique sur le développement de la Géométrie* qui contribua à rectifier un certain nombre d'opinions fausses.

Avant de quitter Poncelet j'ajoute qu'il a joué un rôle important dans le développement de la Mécanique appliquée, qu'il enseigna pendant longtemps à Metz, puis à la Sorbonne.

Évariste Galois (1811–1832) est une des figures les plus extraordinaires de l'histoire des sciences. Refusé deux fois au concours d'entrée à l'École Polytechnique, il est reçu en 1831 à l'École Normale qu'il quitte un an après. La part active qu'il prend à la politique lui vaut plusieurs mois de prison et il meurt en duel pour une cause futile à l'âge de vingt ans et demi. Il avait exposé ses découvertes mathématiques sur la théorie des équations dans deux mémoires à l'Académie des Sciences qui ne furent pas compris et qui sont perdus, dans quelques petits articles du Bulletin de Férussac 1830, et surtout dans une lettre à son ami Chevalier écrite la veille de sa mort. D'autres mémoires retrouvés dans ses papiers furent publiés en 1846 par Liouville dans le Journal qui porte son nom.

La portée de son œuvre peut être résumée en quelques phrases. Les algébristes italiens du XVIème siècle Tartaglia, Cardan, Ferrari avaient résolu les équations du troisième et du quatrième degré par des extractions de racines carrées et de racine cubiques, mais tous les efforts dépensés ensuite pour résoudre les equations de degré supérieur avaient été vains. Lagrange, Abel et Gauss avaient apporté des contributions importantes à la question en indiquant certaines classes d'équations susceptibles d'être résolues par radicaux. Abel le premier avait en 1826 démontré l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale du cinquième degré. Ainsi était mis en évidence le fait que le problème auquel s'étaient acharnés depuis le XVIème siècle de nombreux mathématicien était mal posé. C'est à Galois que revient la gloire d'avoir apporté une lumière complète sur la question en montrant qu'à une équation donnée sont attachées un certain nombre de permutations sur ses racines formant ce qu'on appelle un groupe : ce sont celles qu'on peut effectuer sur les racines sans que soient altérées les relations rationnelles qui existent entre elles (cette expression relations rationnelles a un sens qui peut être précisé). De la nature de ce groupe dépendent les propriétés essentielles de l'équation, la possibilité ou non de la résoudre par radicaux et, dans le cas général, la nature des équations auxiliaires dont la résolution préalable entraînerait celle de l'équation donnée. Galois retrouve facilement en partant de son idée fondamentale tous les résultats trouvés par ses prédécesseurs, qui sont ainsi envisagés d'un point de vue unique.

La théorie des groupes de substitutions, c'est-à-dire de permutations sur un certain nombre d'objets, fondée par Cauchy, montrait avec Galois toute sa portée. Galois la perfectionnait en des points importants et montrait le rôle fondamental des groupes simples. A un autre point de vue Galois introduisait dans la théorie des nombres de nouvelles classes de nombres imaginaires (imaginaires de Galois) dont chacune était attachée à une puissance d'un nombre premier ; en dehors de la théorie des équations proprement dite, le nom de Galois est un de ceux qui reviennent le plus souvent dans les théories de l'Algèbre moderne. La lettre à son ami Chevalier nous montre en outre qu'il avait fait en Analyse des découvertes au moins aussi importantes qu'en Algèbre, devançant de 25 ans le grand géomètre Riemann dans ses recherehes sur les intégrales abéliennes. On songe avec tristesse à ce que la science a perdu par la mort prématurée de Galois et, comme le dit M. Emile Picard, „en présence d'une vie si courte et si tourmentée, l'admiration redouble pour le génie prodigieux qui a laissé dans la science une trace aussi profonde".

La théorie de Galois permettait d'expliquer par quel paradoxe les imaginaires s'introduisaient dans la formule de résolution d'une équation du troisième degré ayant toutes ses racines réelles, car on pouvait maintenant démontrer qu'une équation ayant toutes ses racines réelles et résoluble par radicaux réels ne pouvait l'être que par radicaux carrés. Elle permet aussi de démontrer l'impossibilité de résolution par la règle et le compas de plusieurs problèmes legués par les anciens, comme celui de la duplication du cube et celui de la trisection de l'angle. On doit au grand mathématicien français Camille JORDAN (1838–1922) une œuvre considérable, son *Traité des substitutions*, qui est un vrai monument élevé, à la gloire de Galois.

La simplicité et la profondeur de l'idée fondamentale de Galois sont telles qu'elle a pu être appliquée à d'autres domaines que celui des équations algébriques. MM. Emile Picard et Ernest Vessiot montrèrent qu'elle domine également l'intégration des équations différentielles linéaires. Je citerai aussi les recherches de MM. Drach et Vessiot sur l'extension de la théorie de Galois à l'intégration des équations différentielles les plus générales, mais là se présentent des difficultés qui obligent à mutiler la théorie ou du moins à sacrifier un peu de sa belle simplicité.

L'évolution de la science depuis Galois a révélé l'importance grandissante de la notion de groupe dans les branches les plus diverses des Mathématiques et de la Physique. Le mathématicien norvégien Sophus Lie, le créateur de la théorie des groupes de transformations continus, les fait pénétrer en Analyse et en Géométrie. Grand admirateur de Galois, il dédie son grand traité sur les groupes de transformations à l'École Normale Supérieure (1889) ; c'est du reste en France qu'ont été faits les travaux les plus importants pour développer la théorie, la perfectionner, l'étendre et lui trouver de nouvelles applications. En géométrie, Poincaré a pu prétendre que la notion de groupe préexiste à l'esprit du géomètre ; énoncer l'axiome que deux figures égales à une troisième sont égales entre elles, c'est affirmer l'existence d'un groupe qui domine la géométrie, à savoir l'ensemble des opérations qui transforment une figure en une figure égale. Il est remarquable à cet égard que la théorie des groupes est capable de nous indiquer quelles sont toutes les significations concrètes cohérentes qu'on peut donner à l'expression de figures égales et, en ce sens, comme l'avait déjà indiqué en 1872 le grand géomètre allemand Félix Klein, on conçoit l'existence d'une infinité de géométries possibles dont chacune est dominée par un groupe particulier et peut être étudiée en elle-même indépendamment de tout recours à la géométrie élémentaire. Dans ce schéma rentre la géométrie projective pour laquelle deux figures sont considérées conventionnellement comme égales quand on peut passer de l'une à l'autre par une suite de projections.

VI

Un siècle s'est écoulé depuis les recherches de Galois. Pendant ce siècle les Mathématiques ont eu un développement considérable ; d'innombrables mémoires ont été écrits, dont beaucoup du reste encombrent inutilement nos bibliothèques. De nouvelles théories à peine ébaucheées se sont crées et ont parfois même envahi les autres domaines des mathématiques, en un mot il y a eu dans cette science comme dans les autres une telle fermentation qu'il est bien difficile à un mathématicien quelconque de dominer tout le développement actuel de sa science. Les esprits capables de découvertes importantes à la fois dans les Mathématiques pures et les Mathématiques appliquées deviennent de plus en plus rares. Il est exceptionnel de rencontrer un génie comme le Français AMPÈRE (1775–1836), qui en même temps qu'un physicien profond, créateur de l'Electrodynamique, a été un grand mathématicien (il partage avec Monge la gloire d'avoir fondé la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre). Cependant le Français LAMÉ (1795–1870) fut à la fois un analyste, un géomètre et un des créateurs de la théorie de l'élasticité, et le Français POISSON (1781–1840) est célèbre par ses travaux d'Analyse et de Physique mathématique, et on peut aussi regarder comme un mathématicien l'illustre FRESNEL, le fondateur de l'Optique physique dont les travaux assurèrent définitivement, au moins jusqu'à la création de la Physique quantique, la victoire de la théorie ondulatoire de la Lumière.

Mais plutôt que de vous citer une liste longue mais peut-être fastidieuse, je préfère m'arrêter un peu sur quelques mathématiciens français modernes, qui ont été mes maîtres, qui sont parmi les plus grands et à qui je suis heureux d'apporter ici mon hommage d'admiration et de reconnaissance.

Charles HERMITE (1822–1901), à peine entré à l'École Polytechnique avait envoyé à l'illustre Jacobi, l'un des fondateurs avec Abel de la théorie des fonctions elliptiques, un travail sur la division des transcendantes abéliennes, fonctions liées a l'intégration des différentielles algébriques les plus générales. Jacobi, qui avait dans des circonstances analogues rencontré un accueil chaleureux auprès de Legendre, exprima au jeune Hermite son admiration pour les résultats qu'il lui communiquait. Il s'établit entre ces deux grands esprits une correspondance suivie. C'est encore à Jacobi qu'Hermite communiqua, à l'âge de 24 ans, ses découvertes d'Arithmétique supérieure qui le classaient au rang des plus grands géomètres. En prolongement des travaux célèbres de Gauss, il aborde la théorie arithmétique des formes dans toute leur généralité et li inaugure une méthode paradoxale en introduisant des variables continues dans la théorie des nombres, où règne le discontinu. C'est à lui qu'est due la considération des formes quadratiques à indéterminées conjuguées, dites formes d'Hermite, et grâce auxquelles le nom d'Hermite est un de ceux qui reviennent le plus souvent dans les mémoires de Physique quantique : exemple entre beaucoup d'autres de la brusque application de théories abstraites à des problèmes concrets. Un des titres de gloire d'Hermite est la découverte en 1873 de la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens ; Liouville avait le premier démontré l'existence de nombres transcendants, c'est-à-dire qui ne sont ni entiers, ni fractionnaires, ni racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Le théorème d'Hermite eut un retentissement considérable et souleva tout de suite l'espoir de voir Hermite démontrer la transcendance du nombre π et par suite l'impossibilité de la résolution par la règle et le compas du probleme de la quadrature du cercle ; neuf ans plus tard, c'est en s'inspirant de la méthode d'Hermite et en la généralisant d'une manière ingénieuse que le mathématicien allemand Lindemann eut l'honneur de cette nouvelle découverte.

Hermite a laissé à tous ceux qui ont entendu ses leçons une impression profonde. „Ils ne sauraient oublier, écrit le grand mathématicien Painlevé, l'accent presque religieux de son enseignement, le frisson de beauté ou de mystère qu'il faisait passer à travers son auditoire devant quelque admirable découverte ou devant l'inconnu. Sa parole ouvrait brusquement de larges horizons sur les régions de la Science ; elle communiquait l'amour et le respect des idéales vérités."

Pour ma part, j'avais en le regardant la révélation de la joie sereine et pure que donne la contemplation de l'ordre mathématique, joie comparable à celle que donnait à Beethoven l'audition intérieure de ses œuvres les plus hautes.

Gaston DARBOUX (1847–1917) fut à la fois un Analyste et un Géomètre. Je laisse de côté ses recherches d'Analyse, malgré leur importance et bien que pour certaines il fît figure de précurseur. C'est surtout à ses travaux de Géomètre qu'il doit sa gloire. On ne peut le classer ni parmi les géomètres qui se refusent à ternir la pure beauté de la Géométrie par l'intrusion de l'Analyse, ni parmi les analystes disposés à réduire la Géométrie à une suite de calculs dont la signification géométrique ne les intéresse pas. Il fut en ce sens un continuateur de Monge, alliant à une utilisation très habile de l'Analyse une intuition géométrique très fine et très développée. Ses méthodes sont toujours d'une rare élégance et adaptées parfaitement aux différents sujets traités. Dans son enseignement à la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne, où il succédait à Chasles, il est revenu souvent avec prédilection à la théorie des systèmes triples orthogonaux, où il se plaisait à reconnaître l'importance de l'œuvre de Lamé, ainsi qu'à la théorie de la déformation des surfaces, qui trouve son origine dans les *Disquisitiones circa superficies curvas de Gauss* et qui avait fait avant Darboux l'objet de travaux importants de géomètres français parmi lesquels il me suffira de citer Ossian Bonnet. Enfin Darboux montra la fécondité de sa méthode du trièdre mobile qui consiste à utiliser au lieu d'un système de coordonnées fixe n'ayant aucun rapport avec la figure à étudier, des systèmes de coordonnées locales attachées à chaque point de cette figure. Cette méthode a reçu de M. Elie CARTAN, grâce à la théorie des groupes, une immense extension la rendant susceptible de s'adapter à tous les espaces variés que les géomètres ont été amenés à créer à la suite de la Relativité Géneralisée. L'influence de Darboux sur le développement de la Géométrie a été considérable ; il a suscité des élèves enthousiastes dans tous les pays ; je me contenterai de citer ici le grand géomètre roumain Tzitzeica, l'un des fondateurs de la Revue mathématique de l'Union interbalkanique, dont le monde savant déplore la perte récente. la *Théorie des Surfaces* de Darboux est un monument magistral élevé à la gloire de la Géométrie et de l'Analyse, et qui sera pendant longtemps encore consulté comme une œuvre classique.

On raconte qu'un jeune mathématicien allemand s'étonnant que Lagrange ne reconnût pas Gauss comme le plus grand géomètre allemand, Lagrange lui répondit : „Non! Gauss est le plus grand géomètre de l'Europe." On a pu dire d'une manière analogue d'Henri POINCARÉ (1854–1912) qu'il ne fut pas seulement un grand mathématicien, mais la Mathématique elle-même. Il n'est pas une des parties des Mathématiques et même de la Physique sur laquelle il n'ait marqué son empreinte, qu'il n'ait renouvelée ou dont il n'ait fait sortir une science nouvelle. Par sa création des fonctions fuchsiennes, il peut exprimer au moyen de fonctions uniformes d'un même paramètre les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique, résultat que les géomètres n'avaient pu obtenir avant lui que pour une classe très particulière de ces courbes. Il résout le problème général de l'uniformisation par une méthode alors audacieuse. Il est un précurseur dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Il est le créateur d'une théorie nouvelle, l'étude globale des solutions des équations différentielles dans le champ réel; il peut, grâce à elle, renouveler les méthodes de la Mécanique céleste, étudier les solutions périodiques, les solutions asymptotiques aux solutions périodiques dans les problèmes que pose cette Science, étudier également les problèmes de stabilité pour la résolution desquels il crée la notion d'invariant intégral. En Analysis situs, branche de la géométrie qui ne s'occupe que des propriétés des corps qui se conservent par n'importe quelle déformation continue, presque tous les travaux parus depuis Poincaré trouvent leur origine dans les trois ou quatre mémories que Poincaré a consacrés à cette science. A la Sorbonne, il enseigna successivement toutes les branches de la Physique mathématique, excerçant une influence considérable dans le mouvement d'idées qu'a suscité l'expérience de Michelson et il a ainsi préludé à la théorie de la Relativité; sa mort prématurée a privé la Science d'une lumière dont on a souvent eu à regretter la disparition. Tout le monde cultivé connaît ses livres de philosophie scientifique, *la Science et l'Hypothèse*, *la Valeur de la Science*, qui ont été traduits dans plusieurs langues et où il excellait à faire saisir par des formules frappantes l'importance des problèmes posés par la Science. Parfois on est tenté de le rapprocher de Pascal par exemple quand il nous dit : „La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit, mais c'est cet éclair qui est tout." La Science mettra longtemps à développer les dernières conséquences des idées qu'il a semées à profusion dans son œuvre si vaste et si variée.

Aux noms des grands savants dont je viens de parler je pourrais ajouter ceux de Paul APPELL et d'Édouard GOURSAT, professeurs d'une clarté admirable, auteurs le premier d'un *Traité de Mécanique rationnelle*, le second d'un *Traité de Calcul différentiel et Intégral* depuis longtemps classiques, mais surtout celui de M. Émile PICARD, le seul survivant de cette glorieuse génération, entouré de l'admiration et du respect universels. Il y a deux ans il était avec le grand mathématicien allemand Hilbert, l'un des premiers titulaires de la médaille d'or de l'Institut Mittag-Leffler, et il y a quelques semaines à peine, dans une fête consacrée au cinquantième anniversaire de son élection à l'Académie des Sciences, M. Émile Borel célébrait en termes magnifiques son œuvre scientifique. J'ai déjà parlé du théorème célèbre qui porte son nom et de ceux de ses travaux qui prolongent la theorie de Galois. Ses travaux sur les fonctions algébriques de deux variables fondent la Géométrie algébrique des surfaces ; cette science a eu un grand développement en Italie, patrie depuis près d'un siècle d'une lignée de grands géomètres. Ceux d'entre eux qui ont étudié la géométrie algébrique des surfaces se sont placés à un point de vue plus purement géométrique que celui de M. Emile Picard : mais, M. Émile Borel a pu dire que sans les travaux de ce dernier, la géométrie algébrique serait bien mutilée.

VII

L'éclat dont a brillé la Mathématique française dans la période où les Hermite, les Darboux, les Poincaré, les Picard faisaient leurs grandes découvertes ne s'est pas éteint : le flambeau n'a pas trouvé de mains défaillantes. Je suis obligé de me borner et je citerai quelques noms.

Gabriel Koenigs fut un géomètre très fin dont les travaux sur la géométrie réglée se font remarquer par une élégance comparable à celle de Darboux. Paul Painlevé, par sa création de transcendantes nouvelles, a réussi à résoudre un problème qui paraissait inabordable à Poincaré lui-même ce dernier caractérisait son œuvre d'Analyse dans les termes suivants „Les Mathématiques consitituent un continent solidement agencé dont tous les pays sont solidaires les uns des autres ; l'œuvre de Paul Painlevé est une île originale splendide dans l'Océan voisin." Mais ce jugement est incomplet, car Painlevé a fait faire des progrès considérables à la Mécanique, qu'il a enseignée pendant longtemps à l'École Polytechnique, et c'est lui qui a contribué le plus puissamment, par ses recherches théoriques, au développement de l'aviation encore à ses tout premiers débuts et dont la création peut être grâce à lui regardée comme une œuvre presque exclusivement française.

Jacques Hadamard, dont la renommée est universelle, a laissé son empreinte en Arithmétique par ses travaux sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann liée au problème difficile de la répartition des nombres premiers ; en Géométrie par ses travaux sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées ; en Analyse par ses travaux sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique et le principe de Huygens ; en Calcul des variations et en Analyse fonctionnelle, cette nouvelle science crée par le grand mathématicien italien Volterra et à laquelle il a donné une profonde impulsion. Enfin par son séminaire du Collège de France, où tous les savants étrangers de passage à Paris tenaient à exposer leurs derniers travaux, il a exercé une influence profonde sur le développement des Mathématiques considérées comme une œuvre de collaboration internationale. Sa jeunesse qui défie les ans nous est garante que son œuvre n'est pas terminée.

La théorie des fonctions de variable complexe a toujours été cultivée avec grand succès en France ; il me suffira de citer les noms d'Émile Borel, de Fatou, profond analyste mort trop tôt, de Paul Montel célèbre par sa théorie des familles normales de fonctions, de Gaston JULIA bien connu par ses travaux sur l'iteration des fonctions rationnelles, de VALIRON, etc...

La théorie des fonctions de variable réelle est une création due presque exclusivement à la Mathématique française. Préparée par le *Traité d'Analyse* de Camille Jordan qui exerça dans tous les pays une influence profonde, comparable à celle du *Traité d'Analyse* de Picard, née des travaux d'Emile Borel créateur de la mesure des ensembles, d'Henri LEBESGUE, créateur de la célèbre théorie de l'intégration qui porte son nom, de René BAIRE, de DENJOY, créateur de la théorie de la totalisation, elle a introduit dans un domaine où l'on ne savait rien et que beaucoup de mathématiciens regardaient comme indigne d'étude, une harmonie inattendue qui, en même temps que l'audace, montrait la pénétration et la profondeur de vue de ses initiateurs.

Il me faudrait parler encore de la théorie des espaces abstraits de Maurice FRÉCHET, de la géométrie infinitésimale directe de BOULIGAND, et pour mémoire de l'œuvre en Analyse et en Géométrie d'Elie CARTAN sur laquelle vous comprendrez que je sois mal placé pour porter un jugement.

VIII

La création de l'Institut Henri Poincaré a donné un nouvel essor en France aux recherches de Physique mathématique. Dans le calcul des probabilités, l'animateur est M. Émile Borel, qui a créé pour cette discipline une collection qui mérite d'être aussi célèbre que celle qu'il a créé pour la Théorie des fonctions et où, en particulier les Fréchet, les Paul Lévy et les Georges Darmois ont exposé leurs belles recherches. la chaire de Physique théorique est occupé par Louis de Broglie, le jeune créateur de la Mécanique ondulatoire, qui a renouvelé la Physique atomique, et qui a concilié la théorie ondulatoire de la lumière et la théorie de l'émission. Je ne dois pas oublier non plus l'Institut de Mécanique dirigé par Henri Villat, bien connu par ses travaux d'hydrodynamique; directeur de la collection du Mémorial des Sciences Mathématiques, création originale qui a été imitée dans différents pays, il est en même temps rédacteur en chef du Journal de Mathématiques pures et appliquées fondé il y a près d'un siècle par Liouville et dirigé pendant longtemps par le grand mathématicien Camille Jordan.

Le tableau de l'activité mathématique française serait incomplet si je ne signalais le rôle considérable joué depuis leur fondation par l'École Polytechnique et l'École Normale. C'est à l'une ou à l'autre de ces écoles que presque tous les grands mathématiciens français depuis plus d'un siècle doivent leur formation; depuis plus d'un demi-siècle c'est l'École normale qui joue presque exclusivement le rôle glorieux, reconnu par S. Lie il y a 50 ans, de pépinière des mathématiques françaises. A plusieurs reprises des pays étrangers lui ont envoyé leurs jeunes gens les mieux doués pour y recevoir le même enseignement que leurs camarades français. Aussi nous faut-il faire un effort pour ne pas regarder comme des mathématiciens français le géomètre Georges Tzitzeica dont je parlais tout à l'heure, ainsi que mon camarade et ami Michel Petrovitch, le doyen des mathématiciens vivants de votre pays, dont nous nous plaisons à reconnaître la grande originalité dans sa création de la Méthode spectrale en Arithmétique, en

Algèbre, en Analyse et dans celle de la Phénoménologie générale où il s'occupe d'une manière systématique du problème de l'existence de moules analytiques susceptibles de représenter simultanément les lois de plusieurs théories physiques en apparence totalement distinctes. Je pense qu'il ne m'en voudra pas d'ajouter ses travaux au bilan de ce que la Mathématique doit à la France.

Maintenant les jeunes générations montent pour relever leurs aînés et c'est encore à l'École Normale que nous les devons. Peut-être est-il trop tôt pour citer des noms, dont plusieurs sont cependant déjà bien connus. Il me suffira d'en citer un seul, celui de Jacques HERBRAND dont l'œuvre brutalement interrompue par la mort laissait espérer un très grand mathématicien, l'égal peut-être d'Évariste Galois.

Mesdames et Messieurs, il est temps de m'arréter, car j'ai déjà trop abusé de votre bienveillante attention. Permettez-moi cependant encore une remarque d'ordre général, qui nous servira de conclusion.

Comme toute science, mais plus sans doute que toute autre, la mathématique progresse par abstractions successives. D'autre part le souci de la rigueur pousse de plus en plus les mathématiciens à dépouiller les êtres qu'ils étudient des propriétés concrètes qui n'interviennent pas dans leurs raisonnements. Ce processus poussé à l'extrême légitime jusqu'à un certain point la boutade célèbre d'après laquelle les mathématiciens sont des savants qui ne savent jamais de quoi ils parlent et ne se préoccupent pas du reste de savoir si ce dont ils parlent existe. Ce détachement exagéré du réel a toujours répugné aux mathématiciens français; ils savent en effet que si la logique est indispensable, elle n'est pas l'essentiel. Dans l'activité mathématique comme dans toute activité humaine il faut une échelle de valeurs : il convient sans doute de raisonner juste, mais il convient surtout de poser des problèmes importants. A cet égard nous pouvons affirmer que les grands mathématiciens français non seulement ont toujours su de quoi ils parlaient, mais ont toujours eu l'intuition nécessaire pour choisir comme objet de leurs méditations les problèmes les plus fondamentaux, ceux dont la solution a les répercussions les plus profondes sur le développement de la science.