L'EXISTENCE DE SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par

T. PEYOVITCH

Soit donné le système de deux équations

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y, \\
\frac{dy}{dt} &= m + a_{21} e^x + a_{22} e^y,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

où a_{ik} sont des fonctions réelles ou complexes, finies et continues pour la variable réelle $t \geq t_0 > 0$; l et m étant des constantes positives. Posons

$$
e^x = u, \quad e^y = v, \tag{a}
$$

le système (1) devient

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -lu + a_{11} u^2 + a_{12} uv, \\
\frac{dv}{dt} &= mv + a_{21} uv + a_{22} v^2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Écrivons les équations précédentes sous la forme des équations intégrales

$$
u = Ce^{-l(-t_0)} + e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} (a_{11} u^2 + a_{12} uv) \, dt,
$$

$$
v = -e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} (a_{21} uv + a_{22} v^2) \, dt,
$$

ou

(3)
$$u = Ce^{-l(t-t_0)} + e^{-lt}\int_{t_0}^{t} e^{lt} P(t,u,v)\,dt,$$
$$v = -e^{mt}\int_{t}^{\infty} e^{-mt} Q(t,u,v)\,dt,$$

avec

(4)
$$P(t,u,v) = a_{11}u^2 + a_{12}uv,$$
$$Q(t,u,v) = a_{21}uv + a_{22}v^2.$$

Supposons que, pour

(5) $$t \geq t_0 > 0, \quad |u| < A, \quad |v| < A,$$

avec

$$|u_0|\left(1 + \frac{\varepsilon}{l}\,\frac{1}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)}\right) < A, \qquad \{|u_0| = |Ce^{-l(t-t_0)}|\},$$

(6) $$|u_0|\left(\frac{\varepsilon}{m}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)}\right) < A,$$

les fonctions

$$P(t,u,v), \qquad Q(t,u,v)$$

soient finies continues et satisfassent à la condition de Lipschitz

(7)
$$|P(t,u,v) - P(t,u_1,v_1)| < \varepsilon[|u-u_1| + |v-v_1|],$$
$$|Q(t,u,v) - Q(t,u_1,v_1)| < \varepsilon[|u-u_1| + |v-v_1|],$$

avec

(8) $$\varepsilon < \frac{1}{\frac{1}{l}+\frac{1}{m}}.$$

Appliquons maintenant la méthode d'approximations successives aux équations (3) en prenant comme premières approximations

$$u_0 = Ce^{-l(t-t_0)}, \qquad v_0 = 0.$$

Puisque on a, d'après (4), pour $t \geq t_0 > 0$,

$$|P(t, u_0, v_0)| = |P(t, u_0, v_0) - P(t, 0, 0)| < \varepsilon[|u_0| + |v_0|] = \varepsilon |u_0|$$

$$|Q(t, u_0, v_0)| = |Q(t, u_0, v_0) - Q(t, 0, 0)| < \varepsilon[|u_0| + |v_0|] = \varepsilon |u_0|,$$

les équations (3) donnent

$$|u_1 - u_0| \leq \varepsilon e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} |u_0| \, dt,$$

$$|v_1 - v_0| \leq \varepsilon e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} |u_0| \, dt,$$

d'où l'on a

$$\lim_{t \to \infty} |u_1 - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{l} \lim_{t \to \infty} |u_0|,$$

$$\lim_{t \to \infty} |v_1 - v_0| \leq \frac{\varepsilon}{m} \lim_{t \to \infty} |u_0|.$$

Par conséquent, pour $t \geq t_0 > 0$, t_0 étant suffisamment grand, on aura

$$|u_1 - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{l} |u_0|,$$

$$(9) \qquad |v_1 - v_0| \leq \frac{\varepsilon}{m} |u_0|.$$

En poursuivant le même procédé, on obtiendra

$$|u_2 - u_1| \leq \varepsilon e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|] \, dt,$$

$$|v_2 - v_1| \leq \varepsilon e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} [|u_1 - u_0| + |v_1 - v_0|] \, dt,$$

ou, d'après (9),

$$|u_2 - u_1| \leq \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{l} + \frac{\varepsilon}{m} \right) e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} |u_0| \, dt,$$

$$|v_2 - v_1| \leq \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{l} + \frac{\varepsilon}{m} \right) e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} |u_0| \, dt,$$

d'où l'on a

$$\lim_{t\to\infty} |u_2 - u_1| \leqq \frac{\varepsilon}{l}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)\lim_{t\to\infty}|u_0|,$$

$$\lim_{t\to\infty} |v_2 - v_1| \leqq \frac{\varepsilon}{m}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)\lim_{t\to\infty}|u_0|.$$

Par conséquent, pour $t \geqq t_0 > 0$, t_0 étant suffisamment grand, on aura

$$(10)\qquad \begin{aligned} |u_2 - u_1| &\leqq \frac{\varepsilon}{l}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)|u_0|, \\ |v_2 - v_1| &\leqq \frac{\varepsilon}{m}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)|u_0|. \end{aligned}$$

Si l'on continue ainsi, on obtiendra, pour $t \geqq t_0 > 0$, t_0 étant suffisamment grand,

$$(11)\qquad \begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &\leqq \frac{\varepsilon}{l}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^n|u_0|, \\ |v_{n+1} - v_n| &\leqq \frac{\varepsilon}{m}\left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^n|u_0|. \end{aligned}$$

Formons les séries,

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + \dots\dots\dots + (u_{n+1} - u_n) + \dots\dots\dots,$$
$$v = v_0 + (v_1 - v_0) + \dots\dots\dots + (v_{n+1} - v_n) + \dots\dots\dots,$$

qui, d'après (9), (10) et (11), deviennent

$$|u| \leqq |u_0| \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{l}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^n + \dots\right]\right\},$$

$$|v| \leqq |u_0| \left\{ \frac{\varepsilon}{m}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{l}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^n + \dots\right]\right\}\text{[1]}.$$

Ces séries sont, d'après (8), convergentes et tendent vers zéro pour $t \to \infty$. Par conséquent, on aura

$$\lim_{t\to\infty}|u| = 0, \quad \lim_{t\to\infty}|v| = 0,$$

ou, d'après (a)

$$|e^x| = |u|, \quad |e^y| = v,$$

[1]) Nous retrouvons les séries de Cotton (Annales de l'École Normale supérieure, t. 28, 1911, Paris).

c'est-à-dire

$$\lim_{t \to \infty} x_R = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} y_R = -\infty. \text{[2]} \tag{12}$$

Il est évident que les équations (1), d'après (12), donnent

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx}{dt} = -l, \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{dy}{dt} = m. \tag{13}$$

Par conséquent, nous avons le théorème: *Le système de deux équations (1), où a_{ik} sont des fonctions réelles ou complexes, finies et continues pour la variable réelle $t \geqq t_0 > 0$, sous les hypothèses (5), (6), (7) et (8), admet les solutions, satisfaisant aux relations (12) et (13). Ce système de solutions dépend d'une constante arbitraire.*

Le raisonnement précédent s'étend sans difficulté au cas où il y a plus de deux équations.

---

[2] x_R et y_R sont les parties réelles de x et de y.