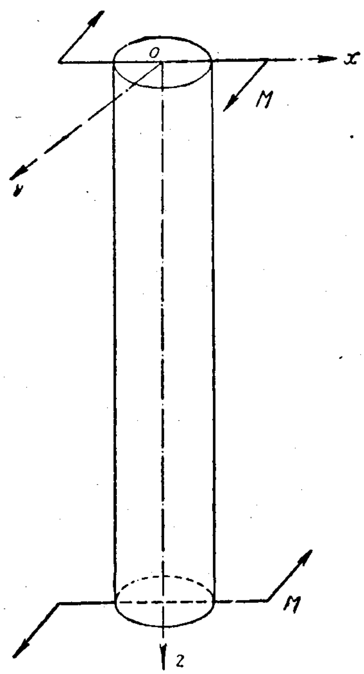
# О КРУЧЕНИИ ТРУБЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Я. ХЛЫТЧИЕВА, Белград.
(J. M. Klitchieff)

Примем за начало координат центр тяжести площади верхнего основания скручиваемой призмы (черт. 1), а за оси $x$ и $y$ главные оси инерции этой площади. Компоненты напряжений выразятся тогда известными формулами:




черт. 1.

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

$\Phi$ функция от $x$ и $y$ определяемая уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C$$

в точках площади сечения, где $C$ произвольная постоянная. На контуре $\Phi$ обращается въ постоянную.

В III т. „*Publ. math. de Belgrade*" я предложил метод нахождения функции $\Phi$ для сечения, показанного на черт. 2 путем конформного преобразования этой области в область, ограниченную двумя концентричными кругами. Ниже я привожу другой, значительно более простой способ решения той же задачи.

Если мы введем новую функцию $\psi$, определяемую уравнением

$$\Phi = {}^1/_2\, C\,(x^2 - 1 + \psi) + \mathrm{const},$$

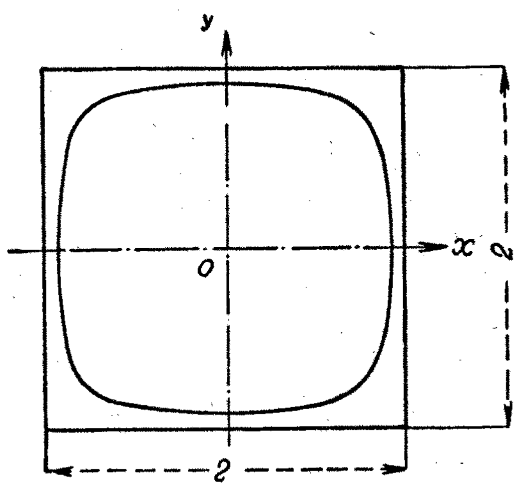
то эта функция будет гармонической, а условие на контуре обратится в:

$$\psi + x^2 - 1 = D\,, \tag{1}$$

где $D$ произвольная постоянная, которую мы примем равной нулю на внешнем контуре. Возьмем известное выражение для функции кручения для сечения, ограниченного квадратом $x = \pm 1$, $y = \pm 1$:

$$\psi = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{Coh}\,(n + {}^1/_2)\,\pi y \cos\,(n + {}^1/_2)\,\pi x}{(2n+1)^3\,\mathrm{Coh}\,(n + {}^1/_2)\,\pi}\,. \tag{2}$$

Она будет гармонической в области, ограниченной квадратом и удовлетворяет контурному условию (1) в точках квадрата при $D = 0$. Если мы подставим это же выражение (2) в уравнение (1), то это последнее при ином значении постоянной $D$ будет уравнением некоторой кривой, в точках которой выполнено контурное условие. Если эта кривая окажется внутри квадрата, то ее можно разсматривать, как контур сечения, для которого выражение (2) является функцией кручения.




черт. 2.

Наибольшей из областей, для которых это имеет место, будет область, ограниченная самим квадратом при $D = 0$; наименьшей является точка $x = 0$, $y = 0$ при

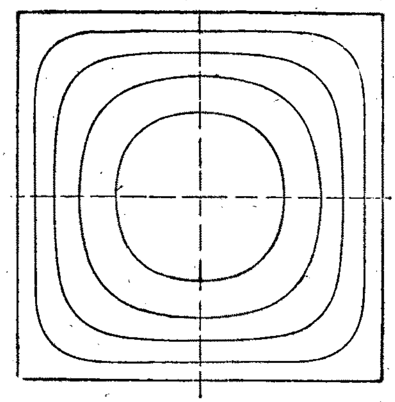
$$D = -1 + \frac{32}{\pi^3}\left\{\frac{1}{\mathrm{Coh}\,{}^1/_2\pi} - \frac{1}{27\,\mathrm{Coh}\,{}^3/_2\pi} + \cdots\right\} = -0{,}5884.$$

Кривые, показанные на черт. 3, отвечают значениям $D$: $-0{,}1185$; $-0{,}2370$; $-0{,}3555$ и $-0{,}4740$; они построены по точкам, координаты которых вычислены последовательными приближениями.

Выражение (2) является также функцией кручения и для сечения, ограниченного *двумя* любыми из этих кривых, например, квадратом $D=0$ и кривой $D=-0{,}1185$ (черт. 2 и 4). Компоненты напряжений определятся выражениями:

$$X_z = C\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{Sh}(n+{}^1/_2)\pi y \cos(n+{}^1/_2)\pi x}{(2n+1)^2 \operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi},$$

$$Y_z = C\left\{x - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi y \sin(n+{}^1/_2)\pi x}{(2n+1)^2 \operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi}\right.$$



черт. 3.

Наибольшим будет напряжение на средине стороны квадрата:

$$\mp C\left\{1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi}\right\},$$

а крутящий момент будет равен

$$M = \int\int (x\,Y_z - y\,X_z)\,dA,$$

где $dA$ елемент площади сечения, так что

$$-\frac{\pi^2}{8}\frac{M}{C}=\frac{\pi^2}{8}\int\int x^2\,dA-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi}\int\int[x\operatorname{Coh}(n+$$

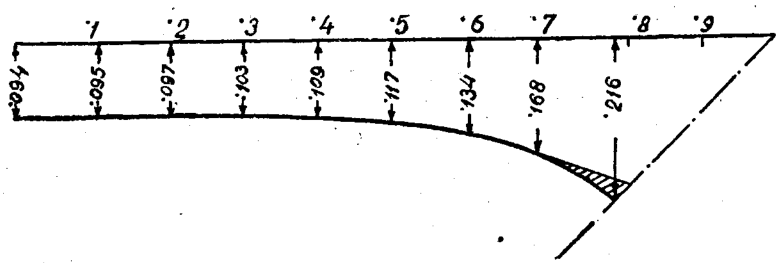
$$+{}^1/_2)\pi y\sin(n+{}^1/_2)\pi x-y\operatorname{Sh}(n+{}^1/_2)\pi y\cos(n+{}^1/_2)\pi x]\,dx\,dy=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}\int\int x^2\,dA-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi}\left\{\int_0^1\right|\operatorname{Sh}(n+$$

$$+{}^1/_2)\pi y\Big|_{\eta}^{1}x\sin(n+{}^1/_2)\pi x\,dx-\int_0^1\Big|y\operatorname{Coh}(n+{}^1/_2)\pi y-$$

$$-\frac{\operatorname{Sh}(n+{}^1/_2)\pi y}{(n+{}^1/_2)\pi}\Big|_{\eta}^{1}\cos(n+{}^1/_2)\pi x\,dx\Big\},$$

где $\eta$ означает ординату точки внутреннего контура.




черт. 4.

Вычисляя эти интегралы по правилу Симпсона при 11 ординатах я получил $C$ равным 2,40 $M$, наибольшее скалывающее напряжение равным 1,62 $M$, а угол кручения равным 1,20 $M/\mu$, где $\mu$ означает модуль сдвига. Интересно отметить, что имеющая широкое распространение формула Бредта дает в этом случае для среднего скалывающего напряжения значение 1,48 $M$, а для угла кручения 1,54 $M/\mu$.

Июль 1939

Св. Криж (Словения)