SUR L'ACCROISSEMENT PUR DE LA FORME DIFFÉRENTIELLE ET SON APPLICATION

Par
ANTON BILIMOVITCH

1. ACROISSEMENT PUR DE LA FORME DIFFÉRENTIELLE

Considérons la forme différentielle linéaire

$$\Phi = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 \tag{1}$$

où X_1, X_2, X_3 sont des fonctions de variables indépendantes x_1, x_2, x_3.

Soit $\Delta x_1 = dx_1$ l'accroissement de x_1. Nous allons étudier l'accroissement correspondant de la forme Φ.

D'abord, l'accroissement de la fonction Φ sera donné par la différence

$$\Delta_1 \Phi = \Phi(x_1 + dx_1, x_2, x_3; dx_1, dx_2, dx_3) - \Phi(x_1, x_2, x_3; dx_1, dx_2, dx_3).$$

Nous appellerons cet accroissement *l'accroissement fonctionnel partiel* de la forme Φ par rapport à la variable x_1. La partie linéaire de cet accroissement a la valeur

$$d_1 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1, \tag{2}$$

et représente *la différentielle fonctionnelle partielle* de la forme Φ par rapport à la variable x_1.

Mais, dans l'étude de l'accroissement de la forme Φ correspondant à l'accroissement de la variable x_1, il faut prendre en considération que dans cette forme figure déjà l'expression

$$X_1 (x_1, x_2, x_3)\, dx_1$$

et que, pour ainsi dire, automatiquement, lorsque x_1, x_2, x_3 deviennent x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3, l'accroissement correspondant à la variable x_1 devient

$$\Delta_1' \Phi = [X_1(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3) - X_1(x_1, x_2, x_3)]\, dx_1 .$$

En conséquence nous appellerons cet accroissement *l'accroissement partiel propre* de la forme Φ par rapport à la variable x_1. Nous désignerons la partie linéaire de cet accroissement par

$$(3) \qquad d_1' \Phi = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 = dX_1 \,.\, dx_1 ,$$

ce qui représente *la différentielle partielle propre* de la forme Φ par rapport à la variable x_1.

La différence

$$\Delta_1^{\bullet} \Phi = \Delta_1 \Phi - \Delta_1' \Phi ,$$

entre l'accroissement partiel fonctionnel et l'accroissement partiel propre, nous l'appellerons *l'accroissement partiel pur* de la forme Φ par rapport à la variable x_1. Sa partie linéaire avec la valeur

$$(4) \qquad d_1^{\bullet} \Phi = d_1 \Phi - d_1' \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 - dX_1 \cdot dx_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - dX_1\right) dx_1$$

représente *la différentielle partielle pure* de la forme Φ par rapport à la variable x_1.

Si l'on divise l'expression précédente par dx_1, on aura la différence

$$(5) \qquad \frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - dX_1 ,$$

que nous appellerons *la dérivée partielle pure* de la forme Φ par rapport à la variable x_1. Il est évident que cette dérivée représente, à son tour, une forme différentielle linéaire; en effet, en développant la différence (5) on aura

$$\frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} x_1} = (0)\, dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) dx_3 .$$

On peut de même écrire les dérivées partielles pures par rapport aux variables x_2 et x_3.

Si la forme linéaire renferme n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et est de la forme

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i, \tag{6}$$

où les X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions de ces variables, sa dérivée partielle pure, par exemple, par rapport à la variable x_j, sera

$$\frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - dX_j, \tag{7}$$

ou, sous une forme plus explicite:

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot} x_j} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{\partial X_{j-1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{j-1}}\right) dx_{j-1} + (0)\, dx_j + \left(\frac{\partial X_{j+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{j+1}}\right) dx_{j+1} + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{\partial X_n}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

En même temps que les dérivées partielles, nous pouvons de même introduire la notion de *la differentielle totale pure* de la forme différentielle donnée. Elle s'exprime par la somme de toutes les différentielles partielles; en conséquence, la différentielle totale pure, pour la forme (6), d'après l'expression (4) sera

$$d^{\cdot}\Phi = \sum_{i=1}^{n} d_i^{\cdot} \Phi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - dX_i\right) dx_i . \tag{8}$$

Si nous considérons la forme Φ comme produit scalaire du vecteur

$$\vec{X}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

et du déplacement élémentaire

$$\vec{ds}\,(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n),$$

c'est-à-dire si nous posons

$$\Phi = (\vec{X}, \vec{ds}),$$

la différentielle totale pure (8) se transformera en

$$(9) \qquad d^{\cdot}\Phi = (\operatorname{grad} \Phi - d\vec{X}, \vec{ds}),$$

où le grad Φ est le vecteur aux coordonnées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

De (9) s'ensuit immédiatement l'expression pour la différentielle totale pure suivante

$$d^{\cdot}\Phi = d\Phi - (d\vec{X}, \vec{ds}).$$

Le premier terme dans le second membre de cette expression représente *la différentielle totale fonctionnelle* de la forme en question, le deuxième sa différentielle totale *propre*. Et la différence de ces deux membres est la différentielle totale *pure*.

Enfin, si nous introduisons, en outre, la notion de *la dérivée pure de la forme différentielle donnée en direction donnée*, déterminée par les cosinus des angles,

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \ldots, \frac{dx_n}{ds},$$

on aura, de (9), pour l'expression d'une telle dérivée

$$\frac{d^{\cdot}\Phi}{d^{\cdot}s} = \left(\operatorname{grad} \Phi, \frac{\vec{ds}}{ds}\right) - \left(d\vec{X}, \frac{\vec{ds}}{ds}\right).$$

De cette expression s'ensuit immédiatement l'expression (7), lorsque la direction donnée coïncide avec un axe quelconque, par exemple avec l'axe j.

2. ÉQUATIONS DE PFAFF

La condition pour que la différentielle pure de la forme donnée soit égale à zéro s'exprime par l'équation

$$d^{\cdot}\Phi = d\Phi - (d\vec{X}, \vec{ds}) = 0.$$

Cette équation, dans le cas des différentielles arbitraires

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n,$$

conduit aux équations

$$\frac{\partial^{\cdot}\Phi}{\partial^{\cdot}x_j} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - dX_j = 0\,, \qquad (j=1,2,\ldots,n)\,,$$

qui ne sont autre chose que les équations du premier système des équations de Pfaff.

De l'analyse précédente de l'accroissement pur de la forme différentielle donnée nous pouvons conclure, que les dérivées partielles pures jouent pour la forme différentielle le même rôle que les dérivées partielles ordinaires pour la fonction. Et si, en égalant à zéro ces dérivées, on arrive aux conditions des valeurs extrêmes de la fonction, nous pourrons nous attendre qu'en égalant à zéro les dérivées partielles pures on arrive aux valeurs extrêmes de la forme différentielle. L'étude du problème fondamental du calcul des variations nous montrera que c'est en effet le cas.

3. APPLICATION AU PROBLÈME DU CALCUL DES VARIATIONS

Nous allons examiner les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x, y, y')\,dx\,, \tag{10}$$

où f représente la fonction donnée, y la fonction inconnue, y' la dérivée de cette fonction, a et b des constantes. Supposons, en outre, données les valeurs y_a, y_b de la fonction y pour les valeurs a et b de la variable indépendante x. Autrement dit, soit donnée la position des points $A(a, y_a)$ et $B\ (b, y_b)$ entre lesquels il faut mener la courbe, la soit-disante extrémale, dont l'équation peut s'écrire

$$y = y\ (x)\,, \tag{11}$$

à condition que l'intégrale (10) possède la valeur extrême.

Imaginons maintenant que le point B change de position dans le plan x, y; nous obtiendrons alors toute une série d'extrémales passant par le point A et constituant ainsi le champ d'extrémales (Fig. 1). Par chacun des points ordinaires M de ce champ passera une seule extrémale. Nous désignerons par k le coefficient angulaire de la tangente à cette extrémale; et nous aurons alors

$$k = k(x, y). \tag{12}$$

En considérant l'extrémale comme le chemin direct reliant les points A et B, prenons un deuxième chemin, infiniment voisin, AMB reliant les mêmes points. Écrivons l'équation de ce chemin voisin sous la forme

$$y = y(x). \tag{13}$$

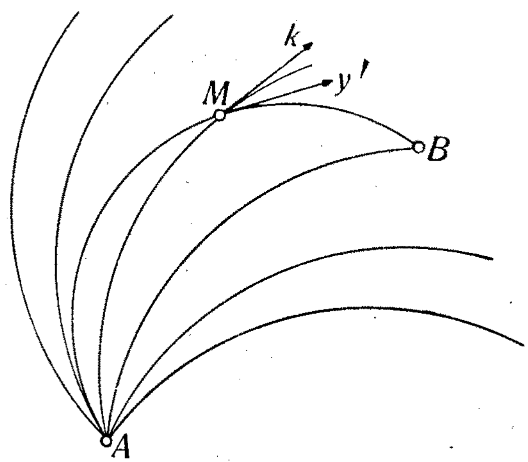

Fig. 1.

Introduisons maintenant à côté de l'intégrale (10) l'intégrale

$$J = \int_b^a \left[f(x, y, k) + (y' - k)\frac{\partial f}{\partial k} \right] dx, \tag{14}$$

k étant le coefficient angulaire de l'extrémale au point donné de la courbe (13). L'intégrale (14) est l'intégrale de Hilbert. Sa propriété principale consiste en ce que sa valeur est indépendante du chemin et que, par conséquent, la valeur de cette intégrale reste la même quel que soit le chemin suivi. Nous allons confirmer, plus loin, cette propriété de l'intégrale de Hilbert.

Étant donné que l'intégrale J, pour $k=y'$, a la valeur de l'intégrale I, nous pourrons conclure que la détermination de l'extrémale de l'intégrale (10) coïncide avec la détermination de l'extrémale de l'intégrale (14).

Ainsi donc, la condition nécessaire de la valeur extrême de l'intégrale (14) est que chaque élément de cette intégrale possède une valeur extrême. Écrivons cet élément sous la forme différentielle, à savoir

$$\Phi = \left[f(x, y, k) - k \frac{\partial f}{\partial k} \right] dx + \frac{\partial f}{\partial k} dy + (0)\, dk. \tag{15}$$

Pour trouver les conditions de la valeur extrême de cette forme différentielle, égalons à zéro ses trois dérivées partielles pures par rapport aux variables x, y et k.

D'après le procédé (7) nous aurons

$$\frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - d \left[f(x, y, k) - k \frac{\partial f}{\partial k} \right] = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - d \left(\frac{\partial f}{\partial k} \right) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^{\cdot} \Phi}{\partial^{\cdot} k} = \frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0. \tag{18}$$

Si dans ces équations nous introduisons l'expression (15), nous aurons, d'abord, de (18)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial k} - \frac{\partial f}{\partial k} - k \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \right) dx + \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} dy = 0,$$

d'où, sous condition que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \neq 0,$$

nous arrivons à la première condition pour la détermination de l'extrémale, à savoir

$$k = \frac{dy}{dx} = y'. \tag{19}$$

Puis, de l'équation (17), mise sous la forme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}-k\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial y}\right)dx+\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial y}dy-d\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)=0,$$

sous condition (19), on a *l'équation d'Euler*

$$\frac{\partial f'}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy'}\right)=0. \tag{20}$$

Enfin, l'équation (16), que nous mettrons sous la forme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}-k\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial x}\right)dx+\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial x}dy-d\left[f(x,y,k)-k\frac{\partial f}{\partial k}\right]=0,$$

puis sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx-\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial k}dk-\frac{\partial f}{\partial k}-kd\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)\right]=0,$$

devient, en vertu de (19) et (20), une identité.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer, que la valeur de l'intégrale de Hilbert ne dépend pas de la forme du chemin d'intégration.

A cet effet nous allons montrer que la forme (15), mise sous la forme

$$\Phi=\frac{\partial f}{\partial k}dy+\left[f(x,y,k)-k\frac{\partial f}{\partial k}\right]dx, \tag{21}$$

représente la différentielle totale si, d'après (12), k est une fonction de x et y, représentant l'intégrale première de l'équation d'Euler, étant donné que k correspond au coefficient angulaire de la tangente à l'extrémale.

Comme la forme (21) ne dépend plus, en vertu de (12), que de deux variables, on n'aura qu'une seule condition pour la différentielle totale, à savoir

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y,k)-k\frac{\partial f}{\partial k}\right]. \tag{22}$$

Après les calculs effectués, cette équation devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial k}{\partial x}+k\frac{\partial k}{\partial y}\right)+k\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial k\,\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{23}$$

Comparons-la à l'équation d'Euler développée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{24}$$

Puisque la fonction

$$k = k(x, y) \tag{12}$$

représente le coefficient angulaire de la tangente à l'extrémale et l'équation (24) peut être considérée comme l'équation différentielle de cette extrémale, on peut poser

$$k = k(x, y) = y', \tag{25}$$

et on aura alors

$$\frac{\partial k}{\partial x} + k \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{dk}{dx} = y''. \tag{26}$$

Or, nous pouvons, à l'aide des équations (25) et (26), donner à l'équation (23) la forme de l'équation (24). Mais, comme la fonction (12) représente l'intégrale de cette équation, c'est-à-dire qu'elle conduit, après substitution, à l'identité, l'équation (28) se transformera, à son tour, en identité et la condition (22) sera remplie identiquement.

De ce qui précède, nous pouvons formuler pour la solution du problème fondamental du calcul des variations la règle suivante:

Il faut d'abord écrire l'élément de l'intégrale de Hilbert, ce qui correspond à l'intégrale donnée, ensuite égaler à zéro les dérivées partielles pures de cet élément par rapport à toutes les variables; on a ainsi les conditions pour la valeur extrême de l'intégrale donnée.

Nous avons montré dans ce qui précède l'application des dérivées partielles pures au problème le plus simple du calcul des variations. Il va de soi que cette application peut être étendue aussi au cas de plusieurs variables, ainsi qu'à l'étude des valeurs extrêmes relatives.