SUR UNE SUITE INFINIE DE FONCTIONS CONTINUES DONT TOUTE FONCTION D'ACCUMULATION EST NON MESURABLE

Par

WACLAW SIERPIŃSKI

On dit, d'après M. *Tychonoff*, qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle est une *fonction d'accumulation* d'une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, s'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout système fini de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_m$ une infinité d'indices k, tels qu'on a les inégalités

$$| f_k(x_i) - f(x_i) | < \varepsilon \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m.$$[1])

En résolvant un problème de M. *S. Banach*, j'ai donné récemment un exemple d'une suite infinie de fonctions de classe 1 de Baire ne prenant que les valeurs 0 et 1 et n'admettant aucune fonction mesurable comme fonction d'accumulation.[2]) Le but de cette Note est de donner un exemple d'une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle ne prenant que les valeurs de l'intervalle (0,1) et dont toute fonction d'accumulation est non mesurable.

k étant un nombre naturel donné, définissons la fonction $f_k(x)$ d'une variable réelle comme il suit.

---

[1]) D'après M. *Tychonoff*, si $0 \leq f_k(x) \leq 1$ pour $k=1, 2, \ldots$ et x réels, la suite infinie $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ admet au moins une fonction d'accumulation. Voir *Math. Ann.* 111, p. 764 et *Fund. Math.* 33, p.

[2]) *Fund. Math.* 33, p.

Posons, pour l entiers:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{k,l}=2l\cdot 2^{-k}+2^{-4k}, & b_{k,l}=(2l+1)\cdot 2^{-k}-2^{-4k} \\ c_{k,l}=(2l+1)\cdot 2^{-k}+2^{-4k}, & d_{k,l}=(2l+2)\cdot 2^{-k}-2^{-4k}. \end{cases}$$

Nous aurons, comme on voit sans peine,

$$2l\cdot 2^{-k}<a_{k,l}<b_{k,l}<c_{k,l}<d_{k,l}<2(l+1)\cdot 2^{-k},$$

donc $$d_{k,l}<a_{k,l+1},\qquad \text{pour } l=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Posons, pour l entiers:

$$(2)\qquad f_k(a_{k,l})=f_k(b_{k,l})=0 \text{ et } f_k(c_{k,l})=f_k(d_{k,l})=1$$

et définissons la fonction $f_k(x)$ dans chacun des intervalles

$$(3)\qquad (a_{k,l},\, b_{k,l}),\ (b_{k,l},\, c_{k,l}),\ (c_{k,l},\, d_{k,l}),\ (d_{k,l},\, a_{k,l})$$

comme linéaire.

Les fonctions $f_k(x)\ (k=1,2,\ldots)$ sont donc continues et

$$0\leq f_k(x)\leq 1\qquad \text{pour } x \text{ réels.}$$

Désignons par (a, b) l'intervalle fermé $a\leq x\leq b$ et posons

$$(4)\qquad E_k=\sum_{l=0}^{2^{k-1}-1}[(a_{k,l},\, b_{k,l})+(c_{k,l},\, d_{k,l})]$$

et

$$(5)\qquad \varepsilon=\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\ldots$$

ce sera donc un ensemble fermé situé à l'intérieur de l'intervalle $J=(0,1)$. Or, on a évidemment

$$(6)\quad J-E_k\subset(0,\, a_{k,0})+\sum_{l=0}^{2^{k-1}-1}(b_{k,l},\, c_{k,l})+\sum_{l=0}^{2^{k-1}-2}(d_{k,l},\, a_{k,l+1})+ \\ +(d_{k,2^{k-1}-1},\, 1).$$

Comme on a évidemment

$$mes\,(0,\, a_{k,0})=mes\,(d_{k,2^{k-1}-1},\, 1)=2^{-4k},$$

$$mes\,(b_{k,l},\, c_{k,l})=2\cdot 2^{-4k}\qquad \text{pour } l=0,1,\ldots,2^{k-1}-1,$$

$$mes\,(d_{k,l},\, a_{k,l+1})=2\cdot 2^{-4k}\qquad \text{pour } l=0,1,\ldots,2^{k-1}-2,$$

on trouve d'après (6):

$$\text{(7)} \qquad mes\,(J-E_k) \leqq 2 \cdot 2^{-4k} + 2^{k-1} \cdot 2 \cdot 2^{-4k} + (2^{k-1}-1) \cdot 2 \cdot 2^{-4k} = 2^{-3k+1}.$$

Or, d'après (5) on a

$$J-E = \sum_{k=1}^{\infty} (J-E_k),$$

donc, d'après (7),

$$mes\,(J-E) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} mes\,(J-E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-3k+1} = \frac{2}{7}$$

et

$$mes\,E = 1 - mes\,(J-E) \geqq 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7},$$

donc

$$mes\,E > {}^1/_2.$$

Soit x un nombre de E et soit k un nombre naturel donné. D'après (5) et (4) il existe un entier l, $0 \leqq l \leqq 2^{k-1}-1$, tel qu'on a

$$\text{(8)} \qquad \text{soit } x \in (a_{k,l}, b_{k,l}), \quad \text{soit } x \in (c_{k,l}, d_{k,l}),$$

donc, d'après (2), la fonction f_k étant, de plus, linéaire dans chacun des intervalles (3), on a

$$\text{soit } f_k(x) = 0, \quad \text{soit } f_k(x) = 1.$$

Donc, si $x \in E$, les termes de la suite infinie $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ne peuvent pas être autres que 0 ou 1. Il en résulte tout de suite que si $f(x)$ est une fonction d'accumulation de la suite $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et si $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$, il existe une infinité des indices k, tels que

$$\text{(9)} \qquad f_k(x_1) = f(x_1) \text{ et } f_k(x_2) = f(x_2).$$

Donc, en particulier, si $x \in E$ et si r est un nombre rationnel, tel que $x + r \in E$, il existe une infinité des indices k, tels que

$$\text{(10)} \qquad f_k(x) = f(x) \text{ et } f_k(x+r) = f(x+r).$$

r étant rationnel, nous pouvons poser $r = \frac{p}{2^q}$, où p est un entier et q un nombre naturel. Il existe donc un nombre naturel $k > q$, tel qu'on a les formules (10).

Or, comme $x \in E$, il existe, comme nous savons, un entier l, $0 \leqq l \leqq 2^{k-1} - 1$, tel qu'on a (8). On a donc $x \geqq a_{k,l}$ et, d'après (1), $x > 2l \cdot 1^{-k}$. Or, comme

$$x + r \in E, \quad \text{on a} \quad x + r < 1,$$

donc

$$2l \cdot 2^{-k} + p \cdot 2^{-q} < 1, \quad \text{c. à. d.} \quad 2(l + p \cdot 2^{k-q-1}) \cdot 2^{-k} < 1,$$

d'où

$$l + p \cdot 2^{k-q-1} < 2^{k-1}, \quad \text{donc} \quad l + p \cdot 2^{k-q-1} \leqq 2^{k-1} - 1.$$

Or, d'après (1) on vérifie sans peine que

$$\text{si } x \in (a_{k,l}, b_{k,l}), \quad \text{on a} \quad x + r \in (a_{k,l}, b_{k,l}),$$
$$\text{où} \quad l' = l + p \cdot 2^{k-q-1},$$

et $$\text{si } x \in (c_{k,l}, d_{k,l}), \quad \text{on a} \quad x + r \in (c_{k,l'}, d_{k,l'}).$$

Vu la définition de la fonction $f_k(x)$, on a donc toujours

(11) $$f_k(x + r) = f_k(x).$$

Les formules (10) et (11) donnent

(12) $$f(x + r) = f(x).$$

Nous avons donc établi la formule (12) pour tous les nombres $x \in E$ et tous les r rationnels, tels que $x + r \in E$.

Soit maintenant x un nombre de E et soit k un nombre naturel donné. On a donc $x \in E_k$ et il existe un entier l, $0 \leqq l \leqq 2^{k-1} = 1$, tel qu'on a (8). Or, d'après (1), on vérifie sans peine que

(13) $$\begin{cases} \text{si } x \in (a_{k,l}, b_{k,l}), \text{ on a } 1 - x \in (c_{k,l_1}, d_{k,l_1}) \\ \text{et si } x \in (c_{k,l}, d_{k,l}), \text{ on a } 1 - x \in (a_{k,l_1}, b_{k,l_1}), \\ \text{où } l_1 = 2^{k-1} - l - 1, \end{cases}$$

donc toujours $1 - x \in E_k$. Le nombre naturel k pouvant être quelconque, on en trouve, d'après (5), $1 - x \in E$. Donc

(14) $$\text{si } x \in E, \text{ on a aussi } 1 - x \in E.$$

Soit x un nombre donné de E. D'après (14), comme plus haut (formule (9)) nous concluons qu'il existe un nombre naturel k, tel que

(15) $$f_k(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_k(1 - x) = f(1 - x).$$

Or, comme $x \in E \subset E_k$, il existe un entier l, $0 \leq l \leq 2^{k-1} - 1$, tel qu'on a (8) et, d'après (13), vu la définition de la fonction $f_k(x)$, on trouve

(16) $$f_k(1-x) = 1 - f_k(x).$$

Les formules (15) et (16) donnent

(17) $$f(1-x) = 1 - f(x).$$

La formule (17) et donc établie pour $x \in E$.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ est mesurable. L'ensemble

(18) $$H = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in E,\ f(x) = 1]$$

est donc mesurable.

Comme $f(x)$ est sur E égale à 0 ou à 1, on conclut, d'après (18), (14) et (17) que si $x \in H$, on a $f(x) = 1$, donc

$$f(1-x) = 1 - f(x) = 0, \text{ d'où } 1 - x \in E - H$$

et $$\text{si } x \in E - H \text{ on a } f(x) = 0,$$

donc $$f(1-x) = 1 - f(x) = 1, \text{ d'où } 1 - x \in H.$$

Les ensembles H et $E-H$ sont donc superposables par rotation autour du point $^1/_2$. Or, comme leur somme est l'ensemble E de mesure > 0, les ensembles H et $E-H$ ont une mesure égale et > 0.

Soit $H(r)$ l'ensemble qu'on obtient de H par une translation le long de la droite de longueur r, et soit

(19) $$\varphi = \sum_r H(r),$$

la sommation s'étendant à tous les nombres rationnels r. Comme H est de mesure > 0, le complémentaire de l'ensemble φ par rapport à la droite est, comme on sait, de mesure nulle. On a donc

(20) $$mes\ \varphi E = mes\ E.$$

Or, je dis que

(21) $$\varphi E = H.$$

En effet, d'une part on a $H \subset E$ et évidemment $H \subset \varphi$, donc $H \subset \varphi E$. Or, soit $x \in \varphi E$. Comme $x \in \varphi$, il existe, d'après (19), un nombre rationnel r, tel que $x \in H(r)$, c. à d. $x+r \in H$, donc, d'après (18), $f(x+r)=1$. Or, comme $x+r \in H$, on a $x+r \in E$ et, comme $x \in E$, la formule (12) (qui est établie pour tous les nombres $x \in E$ et tous les nombres rationnels r, tels que $x+r \in E$) donne $f(x)=1$, donc, vu que $x \in E$ et d'après (18), $x \in H$.

La formule (21) est ainsi établie.

D'après (20) et (21) on trouve

$$mes\, E = mes\, H,$$

ce qui est impossible, puisque

$$mes\, H = mes\, (E-H) > 0 \quad \text{et} \quad E-H+(E-H).$$

La fonction $f(x)$ ne peut donc pas être mesurable, c. q. d.

La propriété désirée de la suite $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ est ainsi établie.