LE POTENTIEL D'UN CORPS ÉLASTIQUE SOUS FORME DIADIQUE

Par

DANIEL RACHKOVITCH

Sous l'action des forces extérieures le corps élastique se déforme. Cette déformation est donnée par la dérivée du vecteur de déplacement dans la direction du vecteur $\vec{dr}$,

$$\vec{ds} = (dr\,\nabla)\,\vec{s},$$

c'est-à-dire comme le produit scalaire gauche d'affineur $\{\nabla \vec{s}\}$ et du vecteur $\vec{dr}$:

$$\vec{ds} = \left(\vec{dr}\,\{\nabla \vec{s}\}\right). \tag{1}$$

La déformation se compose des dilatation et glissement qui durant la rotation restent invariables, de sorte que l'affineur devient le tenseur

$$T_e = {}^1/_2\left(\{\nabla \vec{s}\} + \{\vec{s}\,\nabla\}\right) \tag{2}$$

dont la forme diadique est

$$T_e = e_{xx}\{\vec{i}\,\vec{i}\} + e_{yy}\{\vec{j}\,\vec{j}\} + e_{zz}\{\vec{k}\,\vec{k}\} + {}^1/_2\,e_{xy}\left(\{\vec{i}\,\vec{j}\} + \{\vec{j}\,\vec{i}\}\right) +$$
$$+ {}^1/_2\,e_{yz}\left(\{\vec{j}\,\vec{k}\} + \{\vec{k}\,\vec{j}\}\right) + {}^1/_2\,e_{zx}\left(\{\vec{k}\,\vec{i}\} + \{\vec{i}\,\vec{k}\}\right),$$

avec le premier scalaire

$$S_1^e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \operatorname{div} \vec{s} = (I,\,T_e), \tag{3}$$

où I est le tenseur-unité ayant le caractère d'unité scalaire.

Durant cette déformation les forces produisent un travail qui se transforme en énergie potentielle de déformation („strain energy").

Pour un déplacement virtuel, en supposant pendant le déplacement les forces extérieures constantes, le travail de déformation sera

$$\delta A = \int_V (\vec{P}\delta\vec{s})\, dV + \int_F (\vec{\rho}_\nu \delta\vec{s})\, df, \tag{4}$$

où $\vec{P}dV$ est la force due au volume et $\vec{\rho}_\nu df$ la force due à la surface. La tension $\vec{\rho}_\nu$ peut-être interprétée comme le produit scalaire du vecteur-unité $\vec{\nu}$, dans le sens de la normale, par le tenseur de tension T_n,

$$\vec{\rho}_\nu = (\vec{\nu} T_n), \tag{5}$$

dont la forme diadique est

$$\begin{aligned} T_n = X_x \{\vec{i}\vec{i}\} + Y_y \{\vec{j}\vec{j}\} + Z_z \{\vec{f}\vec{f}\} + X_y (\{\vec{i}\vec{j}\} + \\ + \{\vec{j}\vec{i}\}) + Y_z (\{\vec{j}\vec{f}\} + \{\vec{f}\vec{j}\}) + Z_x (\{\vec{f}\vec{i}\} + \{\vec{i}\vec{f}\}), \end{aligned} \tag{5'}$$

avec le premier scalaire

$$S_1^n = X_x + Y_y + Z_z .$$

On aura ainsi pour le travail

$$\delta A = \int_V (\vec{P}\delta\vec{s})\, dV + \int_F (T_n \delta\vec{s})\, d\vec{f}.$$

En vertu de la formule de transformation de G a u s s cette expression prend la forme suivante

$$\delta A = \int_V (\vec{P}\delta\vec{s})\, dV + \int_V \operatorname{div} (T_n \delta\vec{s})\, dV,$$

ou, après développement,

$$(6) \qquad \delta A = \int\limits_V \left(\vec{P} + (\nabla T_n), \delta\vec{s}\right) dV + \int\limits_V \left(T_n (\nabla \delta\vec{s})\right) dV.$$

En vertu de la loi de Navier le premier terme est égal à zéro, de sorte que on peut, d'après Lagally, donner à cette expression la forme suivante

$$(7) \qquad \delta A = \delta \int\limits_V (T_n T_e) dV.$$

Cependant, durant le déplacement réel les tensions ne sont pas constantes mais les fonctions des déformations. Ces dernières s'expriment, par la loi de Hooke, sous la forme suivante

$$(8') \qquad T_e = \frac{1+\sigma}{E} T_n - \frac{\sigma}{E} S_1^n I,$$

$$(8'') \qquad T_n = 2\mu T_e + \lambda S_1^e I,$$

où

E est le module d'élasticité de Young,
σ la constante de Poisson,
λ, μ les constantes de Lamé.

En portant ces valeurs dans l'équation (7), on aura

$$(9) \qquad \delta A = \int\limits_V \left(2\mu\delta(T_e, T_e) + \lambda S_1^e \delta(I\, T_e)\right) dV$$

or, comme

$$\delta(T_e, T_e) = {}^1/_2\, \delta(T_e, T_e),$$

le travail total sera

$$(10) \qquad A = \int\limits_V \left(\mu(T_e, T_e) + {}^1/_2 \lambda (S_1^e)^2\right) dV.$$

En faisant intervenir (7), cette expression peut s'écrire

(11) $$A = {}^1\!/_2 \int\limits_V (T_n\, T_e)\, dV,$$

c'est-à-dire

(12) $$A = {}^1\!/_2 \int\limits_V \left(\frac{1+\sigma}{E} (T_n\, T_n) - \frac{\sigma}{E} (S_1^n)^2 \right) dV.$$

Par le potentiel d'un corps élastique nous entendons le travail de déformation pour le volume-unité, ou le travail spécifique de déformation („specific strain energy"), de sorte qu'on peut écrire

(13) $$\Pi = {}^1\!/_2 (T_n\, T_e).$$

En vertu des (8′) et (8″) on peut montrer que le potentiel ne dépend que de la fonction des tensions ou que des déformations.

(14) $$\Pi = \frac{1+\sigma}{2E} (T_n\, T_n) - \frac{\sigma}{2E} (S_1^n)^2,$$

(15) $$\Pi = \mu (T_e\, T_e) + {}^1\!/_2 \lambda (S_1^e)^2.$$

Par suite du changement d'état de tension le potentiel devient

(16) $$\delta \Pi = (T_n,\, \delta T_e) = (T_n,\, T_e).$$

Nous pouvons donc conclure: si le potentiel est exprimé comme fonction du tenseur de tension seulement, le tenseur de déformation s'obtient par la différentiation, et inversement (*Love* – „strain energy fonction").

En coordonnées rectangulaires, le potentiel peut être exprimé, grâce aux relations (2′) et (5′), sous la forme suivante

(17) $$\Pi = {}^1\!/_2 (X_x\, e_{xx} + Y_y\, e_{yy} + Z_z\, e_{zz} + 2X_y\, e_{xy} + 2X_z\, e_{xz} + 2Y_z\, e_{yz}),$$

ou, pour (14) et (15),

(18) $$\Pi = \frac{1+\sigma}{2E} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)] - \\ - \frac{\sigma}{2E} (X_x + Y_y + Z_z)^2,$$

$$(19)\quad \Pi = \mu\left[e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 - 2\left(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2\right)\right] + {}^1/_2\,\lambda\left(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}\right)^2.$$

En vertu de la conclusion formulée ci-dessus, de ces expressions il suit

$$(20)\quad \begin{aligned} &\frac{\delta \dot{\Pi}}{\delta X_x} = \frac{1}{E}\left[X_x - \sigma\left(Y_y + Z_z\right)\right] = e_{xx}; && \frac{\delta \Pi}{\delta X_y} = 2\,e_{xy}, \\ &\frac{\delta \Pi}{\delta e_{xx}} = X_x; && \frac{\delta \Pi}{\delta e_{xy}} = 2\,X_y, \quad \text{etc.}, - \end{aligned}$$

résultats qui sont en accord avec la loi de Hooke.

De toutes les hypothèses relatives à la rigidité des matériaux (*Coulomb - Guest; Mohr; Mariotte - S. Venant*) la plus moderne est celle de *Hubert-Hencky*, qui prend le déviateur comme le représentant des déformations (avec *Schouten*).

Nous pouvons représenter le tenseur de tension comme la somme du déviateur et du tenseur-unité,

$$(21)\quad T_n = D_n + \frac{1}{3} S_1^n\, I,$$

c'est-à-dire les tensions sont

$$X_x = X'_x + p_m; \quad Y_y = Y'_y + p_m; \quad Z_z = Z'_z + p_m;$$

où

$$(22)\quad p_m = \frac{1}{3} S_1^n = \frac{1}{3}\left(X_x + Y_y + Z_z\right).$$

Le premier scalaire du déviateur est égal à zèro,

$$S_1'^n = X'_x + Y'_y + Z'_z = 0$$

et la déformation ne change que la forme mais pas le volume, et le potentiel („Gestaltänderungsarbeit“ — Mises, Hencky, Lode) est donné par

$$(23)\quad \Pi^0 = {}^1/_2\left(D_n\, T_e\right) = {}^1/_2\left(T_n\, T_e\right) - {}^1/_6\, S_1^n\left(I\, T_e\right),$$

or comme

$$S_1^e = \left(I\, T_e\right) = \frac{1-2\sigma}{E} S_1^n,$$

on aura

$$\Pi^0 = {}^1/_2\,(T_n\,T_e) - \frac{1-2\sigma}{6E}(S_1^n)^2. \tag{24}$$

D'après les relations (18) on aura

$$\Pi^0 = \frac{1+\sigma}{6E}\left\{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 2(X_y^2 + X_z^2 + Y_z^2)\right\} \tag{25}$$

et pour les tensions principales nous aurons

$$\Pi^0 = \frac{1+\sigma}{6E}\left\{(X_1 - Y_1)^2 + (Y_1 - Z_1)^2 + (Z_1 - X_1)^2\right\}. \tag{26}$$

Pour la distribution des tensions dans le plan, on aura $Z_1 = 0$, et

$$X_1,\ Y_1 = {}^1/_2\,(X_x - Y_y) \pm {}^1/_2\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2},$$

de sorte que le potentiel devient

$$\Pi^0 = \frac{1+\sigma}{6E}\left\{(X_1 - Y_1)^2 + Y_1^2 + X_1^2\right\} \leqq {}^1/_2\frac{X_g^2}{E}, \tag{27}$$

où X_g est la tension admissible.

Pour la répartition linéaire des tensions, on a

$$\sqrt{X_x^2 + 3X_y^2} < X_g. \tag{28}$$

Cette formule s'applique à l'heure actuelle surtout au cas de résistance composée (la transmission).

Dans le cas d'une répartition linéaire, dans la direction de l'axe Ox, le potentiel devient, d'après Hencky,

$$\Pi_e = \frac{1+\sigma}{3E}X_x^2,$$

et, dans le cas de pur cisaillement, entre les plans Oxy, Oyz, il devient

$$\Pi_c = \frac{1+\sigma}{E}X_y^2.$$

En posant (S. Timoshenko) $\Pi_e = \Pi_c$, nous aurons

$$X_y = \frac{\sqrt{3}}{3} X = 0{,}557\, X_x,$$

qui est en accord avec les résultats des épreuves obtenus avec l'acier par W. Lode.