

# SUR LA STABILITÉ DES PLAQUES RECTANGULAIRES RENFORCÉES PAR DES RAIDISSEURS ET SOLLICITÉES A LA FLEXION ET AU CISAILLEMENT

Par

MIODRAG MILOSAVLJEVITCH

La contrainte critique au flambage d'une plaque mince, telle que l'âme des poutres composées, peut être augmentée sensiblement par une disposition convenable des raidisseurs transversaux et longitudinaux, la position ainsi que la rigidité de ces raidisseurs ayant une grande influence sur sa valeur.

Le problème de la stabilité des plaques rectangulaires minces renforcées par des raidisseurs, qu'ont traité de nombreux auteurs entre les deux guerres, n'a pas trouvé encore une solution satisfaisante dans le cas de poutres composées pleines de grande hauteur.

C'est le professeur S. Timochenko qui le premier en 1921 (1) résolut le problème dans le cas d'une plaque rectangulaire renforcée par un nombre de raidisseurs transversaux ou longitudinaux de 1 à 3, et uniformément comprimée ou sollicitée au cisaillement sur ses bords, en se basant sur le critère de l'énergie.

H. Fröhlich en 1937 (2) a donné une solution du problème dans le cas particulier des plaques renforcées par des raidisseurs croisés et sollicitées à la compression uniformément répartie. Cette solution de H. Fröhlich est, également, basée sur le critère de l'énergie.

Le présent article donne une solution de ce problème dans le cas d'une plaque rectangulaire, renforcée par des raidisseurs

longitudinaux et transversaux, sollicitée simultanément à la flexion, au cisaillement et à un effort axial; cette solution, étant basée sur l'étude de l'équation différentielle de la surface flambée de la plaque, s'applique au cas général.

Comme application on traite un cas de flexion pure d'une plaque munie de raidisseurs disposés d'après des considérations pratiques en fournissant un tableau des valeurs des contraintes critiques de compression en fonction de la rigidité des raidisseurs.

*1. Plaque rectangulaire renforcée par deux raidisseurs transversaux et un raidisseur longitudinal sollicitée dans son plan par une charge linéairement variable  $p_y$  et aux efforts de cisaillement  $T$ . Détermination de la relation entre les contraintes critiques et la rigidité des raidisseurs.*

La plaque rectangulaire dont les côtés  $a$  et  $b$  sont dans le rapport  $\alpha = a/b$  repose sur ses quatre bords sans encastrement. Dans son plan elle est sollicitée par une charge linéairement variable  $p_y = p_0 \left(1 - \varphi \frac{y}{b}\right)$  sur les bords  $x=0$  et  $x=a$  et aux efforts de cisaillement  $T$  sur ses bords. La plaque est renforcée

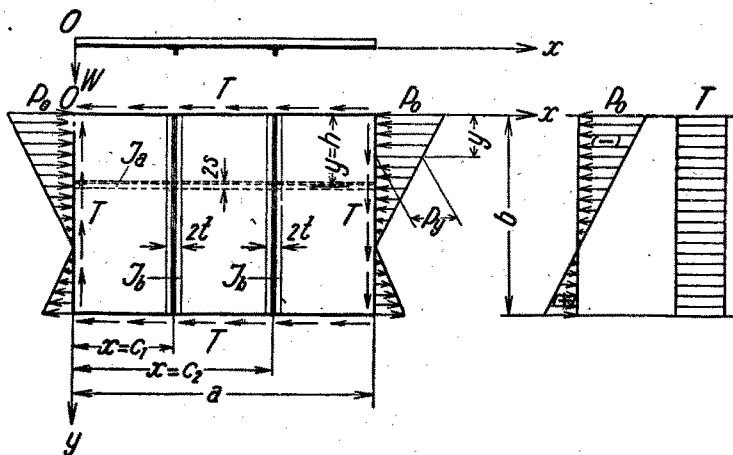


fig. 1

par deux raidisseurs transversaux de rigidité  $El_b$  placés aux distances  $x=c_1$  et  $x=c_2$  et par un raidisseur longitudinal de

rigidité  $EI_a$  placé à la distance  $y=h$  (voir fig. 1). La liaison entre les raidisseurs et la plaque est assurée par rivetage ou soudage de façon que les raidisseurs participent aux déformations de la plaque lors du flambage. Dans cette étude on fera les suppositions suivantes :

1) Le matériel constituant la plaque est homogène, isotrope et se soumet sans limite à la loi de Hooke.

2) Le raidisseur longitudinal ne participe pas à la résistance de la plaque à la flexion.

3) La rigidité à la torsion des raidisseurs n'est pas introduite dans le calcul des contraintes critiques au flambage.

L'équation de la surface flambée peut être représentée sous forme d'une série trigonométrique double :

$$(1) \quad w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

satisfaisant aux conditions suivantes sur le contour de la plaque :

1) déformation de la plaque  $w=0$  pour  $x=0$ ,  $x=a$  et  $y=0$ ,  $y=b$ ;

2) moments fléchissants  $My$  et  $Mx$  nuls pour  $x=0$ ,  $x=a$  et  $y=0$ ,  $y=b$

$$My = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} = 0$$

$$Mx = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} = 0.$$

Soient  $q_a$ ,  $q_{b1}$ ,  $q_{b2}$  les efforts par unité de surface transmis par les raidisseurs à la plaque et réciproquement lors du flambage.

Soient  $I_a$  le moment d'inertie du raidisseur longitudinal et  $2s$  sa largeur,  $I_b$  celui d'un raidisseur transversal dont la largeur est  $2t$  (voir fig. 1).

La plaque et le raidisseur se déformant de la même manière lors du flambage, il résulte que l'équation de la ligne élastique des raidisseurs est définie par l'équation différentielle suivante :

$$(2) \quad q_a 2s = EI_a \frac{d^4(w)y=h}{dx^4} = EI_a \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi h}{a}$$

$$(3) \quad q_{b_1} 2t = EI_b \frac{d^4(w)_{x=c_1}}{dy^4} = EI_b \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin \frac{m\pi c_1}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(4) \quad q_{b_2} 2t = EI_b \frac{d^4(w)_{x=c_2}}{dy^4} = EI_b \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

La charge transmise par les raidisseurs à la plaque lors du flambage peut être également représentée par une série double trigonométrique:

$$(5) \quad q = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Les valeurs inconnues des coefficients  $C_{mn}$  de la série de Fourier seront déterminées par le procédé connu de multiplication de l'équation (5) par le facteur  $\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$  et par intégration en  $x$  et  $y$  entre les limites  $x=0$ ,  $x=a$  et  $y=0$ ,  $y=b$ , en rappelant que lorsque  $s$  et  $t$  tendent vers 0 les expressions  $\sin \frac{i\pi t}{a}$  et  $\sin \frac{j\pi s}{b}$  sont respectivement équivalentes à  $\frac{i\pi t}{a}$  et  $\frac{j\pi s}{b}$ .

Il résulte

$$(5a) \quad C_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy =$$

$$= \frac{4}{ab} \left[ \int_0^a \int_{h-s}^{h+s} q_a \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy + \int_{c_1-t}^{c_1+t} \int_0^b q_{b_1} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy + \right.$$

$$\left. + \int_{c_2-t}^{c_2+t} \int_0^b q_{b_2} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy \right] = \frac{2EI_a \pi^4 i^4}{a^4 b} \sin \frac{j\pi h}{b} \sum_n A_{in} \sin \frac{n\pi h}{b} +$$

$$+ \frac{2EI_b \pi^4 j^4}{ab^4} \sin \frac{i\pi c_1}{a} \sum_m A_{mj} \sin \frac{m\pi c_1}{a} +$$

$$+ \frac{2EI_b \pi^4 j^4}{ab^4} \sin \frac{i\pi c_2}{a} \sum_m A_{mj} \sin \frac{m\pi c_2}{a}$$

$i$ ,  $j$ ,  $m$  et  $n$  étant des nombres entiers quelconques peuvent être échangés mutuellement, ce qui amène à écrire d'après l'équation (5) l'expression de la charge de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad q = & \frac{2EI_a \pi^4}{a^4 b} \sum_m \sum_n \sum_j A_{mj} m^4 \sin \frac{n\pi h}{b} \sin \frac{j\pi h}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\
 & + \frac{2EI_b \pi^4}{ab^4} \sum_m \sum_n \sum_i A_{in} n^4 \sin \frac{m\pi c_1}{a} \sin \frac{i\pi c_1}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\
 & + \frac{2EI_b \pi^4}{ab^4} \sum_m \sum_n \sum_i A_{in} n^4 \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sin \frac{i\pi c_2}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.
 \end{aligned}$$

Afin de déterminer la relation entre les contraintes critiques au flambage et la rigidité des raidisseurs, nous utiliserons l'équation différentielle de la surface élastique qui, d'après la théorie de l'élasticité, a l'expression suivante:

$$(7) \quad D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q - p_0 \left( 1 - \varphi \frac{y}{b} \right) \frac{\partial w}{\partial x^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

dans laquelle

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} - \text{rigidité de la plaque dont l'épaisseur est } \delta;$$

$q$  - charge unitaire de la plaque normalement à son plan;

$$p_y = p_0 \left( 1 - \varphi \frac{y}{b} \right) - \text{charge linéairement variable dans le plan de la plaque (voir fig. 1);}$$

$T$  - effort de cisaillement dans le plan de la plaque s'exerçant sur son contour;

$w$  - déformation de la plaque par flambage en un point  $(x, y)$ .

En substituant à  $w$  dans l'équation différentielle (7) son expression donnée par l'équation (1) et en multipliant l'équation (7) par  $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b}$  on obtient une expression qui, après intégration en  $x$  et en  $y$ , les limites étant respectivement 0 et  $a$ , 0 et  $b$ , nous donne une relation générale entre les contraintes critiques et les rigidités des raidisseurs (fig. 1).

Les nombres entiers  $m, n$  et  $k, r$  pouvant être échangés mutuellement, on obtient pour l'équation (7) la forme suivante:

$$\begin{aligned}
(8) \quad & A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + \frac{2EI_b}{Db} \alpha^3 n^4 \sin \frac{m\pi c_1}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i\pi c_1}{a} + \\
& + \frac{2EI_b}{Db} \alpha^3 n^4 \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i\pi c_2}{a} + \\
& + \frac{2EI_a}{Db} m^4 \sin \frac{n\pi h}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j\pi h}{b} = \frac{p_0}{D} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{8\varphi}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r^2 - n^2)^2} \right] + \frac{32 a^2 T}{D\pi^4} \alpha \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{krmn}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} \cdot \\
& \qquad \qquad \qquad \text{pour } r \pm n \text{ impairs} \qquad \qquad \qquad \left. \begin{matrix} k \pm m \\ r \pm n \end{matrix} \right\} \text{ impairs}
\end{aligned}$$

Pour simplifier les expressions posons:

$$\frac{2EI_b}{Db} = \beta, \quad \frac{2EI_a}{Db} = \gamma$$

et écrivons les efforts  $p_0$  et  $T$  de la façon suivante:

$$p_0 = \sigma_k \delta, \quad T = \tau_k \delta,$$

avec

$\sigma_k$  = contrainte critique de compressions lors du flambage

$\tau_k$  = " " " cisaillement " " "

Prenons pour coefficients de gondolement  $k_1 = \frac{\sigma_k}{\sigma_0}$ ,  $k_2 = \frac{\tau_k}{\sigma_0}$

les rapports des contraintes critiques  $\sigma_k$  et  $\tau_k$  à la grandeur de référence  $\sigma_0 = \frac{D\pi^2}{b^2\delta}$ .

Il résulte de ce qui précède que l'équation (8) prend la forme

$$\begin{aligned}
(8a) \quad & A_{mn} (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + \beta \alpha^3 n^4 \sin \frac{m\pi c_1}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i\pi c_1}{a} + \\
& + \beta \alpha^3 n^4 \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i\pi c_2}{a} + \gamma m^4 \sin \frac{n\pi h}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j\pi h}{b} = \\
& = k_1 \alpha^2 m^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r^2 - n^2)^2} \right] + \\
& \qquad \qquad \qquad \text{pour } (r \pm n) \text{ impair} \\
& + \frac{32 k_2 \alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{krmn}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} \cdot \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \begin{matrix} k \pm m \\ r \pm n \end{matrix} \right\} \text{ impairs}
\end{aligned}$$

Pour des valeurs quelconques de  $l$  à  $l$  des nombres entiers  $m, n, i, j, k$  et  $r$  nous formons un système de  $l^2$  équations linéaires homogènes dont le déterminant des coefficients doit être nul pour que l'on obtienne des valeurs non nulles pour les coefficients  $A_{mn}$  (c'est-à-dire pour que la plaque soit effectivement flambée,  $w \neq 0$ ). Donc l'équation  $\Delta = 0$  représente la relation entre les contraintes critiques et la rigidité correspondante des raidisseurs et peut être symboliquement exprimé par

$$(9) \quad \Delta = \Psi(\alpha, k_1, k_2, \gamma, \beta, \varphi) = 0.$$

De l'équation (9) on peut, pour des valeurs données de  $\alpha = a/b$ ,  $\gamma, \beta, \varphi$  et pour un rapport  $\lambda = \frac{\sigma_k}{\tau_k} = \frac{k_1}{k_2}$  déterminé, calculer les coefficients de gondolement  $k_1$  et  $k_2$  comme les plus petites racines réelles de l'équation (9). Les valeurs minima de ces coefficients peuvent être tirées du déterminant d'ordre  $l$  quand  $l \rightarrow \infty$ . Cependant, comme on le verra plus loin, on obtiendra une solution approchée satisfaisante pour les besoins techniques si l'on ne considère que les coefficients  $A_{mn}$  pour lesquels  $m$  et  $n$  prennent les valeurs 1, 2, 3.

Les valeurs effectivement obtenues pour  $k_1$  et  $k_2$  à la suite de ce calcul approché ne diffèrent que très peu des valeurs exactes.

De même pour des valeurs données de  $\alpha, k_1, k_2, \varphi$  et  $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$  on peut déterminer les valeurs  $\gamma$  et  $\beta$  comme les plus petites racines réelles de l'équation (9).

Dans ce cas nous obtiendrons, également, des résultats suffisamment approchés en prenant le déterminant des coefficients des  $A_{mn}$  pour  $m$  et  $n$  variant de 1 à 3, les approximations suivantes donnent, il est vrai, des valeurs plus grandes pour  $\gamma$  et  $\beta$ , mais la différence, comme le calcul le montre, est insignifiante.

Remarquons qu'en poursuivant ces approximations les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  diminuent tandis que celles de  $\gamma$  et  $\beta$  augmentent tendant vers les valeurs extrêmes des solutions des équations (9).

Dans la suite, et en nous basant sur des considérations pratiques, nous placerons le raidisseur longitudinal à la distance  $h/4$  du bord supérieur et les raidisseurs transversaux aux distances  $a/8$  et  $2/8a$  des bords latéraux.

II. Relation entre les coefficients de gondolement d'une plaque rectangulaire et la rigidité de ses raidisseurs pour une position du raidisseur longitudinal donnée par  $= b/4$  et pour les positions  $c_1 = a/8$  et  $c_2 = 2/3 a$  des raidisseurs transversaux.

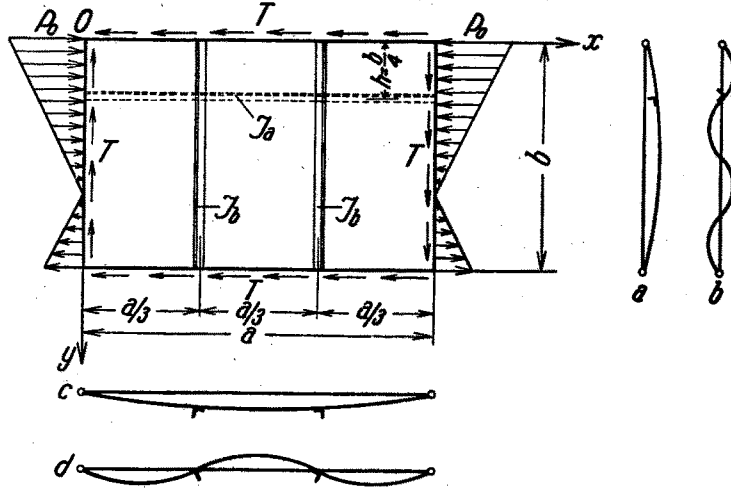


fig. 2

Dans ce cas l'équation (8 a) prend la forme:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & A_{mn}(m^2 + n^2\alpha^2)^2 + \beta\alpha^3 n^4 \sin \frac{m\pi}{3} \sum_i A_{in} \sin \frac{i\pi}{3} + \\
 & + \beta a^3 n^4 \sin \frac{2m\pi}{3} \sum_i A_{in} \sin \frac{2i\pi}{3} + \gamma m^4 \sin \frac{n\pi}{4} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j\pi}{4} = \\
 & = k_1 \alpha^2 m^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\pi^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r^2 - n^2)^2} \right] + \\
 & + \frac{32 k_2 \alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{kr mn}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} \\
 & \quad \text{pour } \left. \begin{matrix} m \pm k \\ n \pm r \end{matrix} \right\} \text{ impairs}
 \end{aligned}$$

De l'expression générale (10) nous obtenons un système d'équations linéaires homogènes:

avec  $m = 1, 2, 3, 4 \dots$

$n = 1, 2, 3, 4 \dots$



$$A_{11} \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + A_{12} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2} \right) +$$

$$+ A_{22} \left( -\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2} \right) + A_{13} \frac{\gamma}{2} + A_{15} \left( -\frac{\gamma}{2} \right) + \dots = 0$$

$$A_{11} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2} \right) + A_{12} \left[ (1 + 4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma - k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] +$$

$$+ A_{21} \frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2} + A_{13} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\pi^2} \right) + A_{15} \left( -\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} \right) + \dots = 0$$

$$A_{12} \frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2} + A_{21} \left[ (4 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma - 4k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] +$$

$$+ A_{22} \left( 8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2} \right) + A_{41} \left( -\frac{3\beta\alpha^3}{2} \right) + \dots = 0$$

$$A_{11} \left( -\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2} \right) + A_{21} \left( 8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2} \right) + A_{22} \left[ 16(1 + \alpha^2)^2 + \right.$$

$$\left. + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma - 4k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + A_{13} \frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2} + A_{31} \frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2} +$$

$$+ A_{23} 8\gamma\sqrt{2} + \dots = 0$$

$$A_{11} \frac{\gamma}{2} + A_{12} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\pi^2} \right) + A_{22} \frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2} + A_{13} \left[ (1 + 9\alpha^2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] + A_{15} \left( -\frac{\gamma}{2} \right) + \dots = 0$$

$$A_{22} \frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2} + A_{31} \left[ (9 + \alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2} - 9k_1\alpha^2 \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) \right] +$$

$$+ A_{32} \frac{81\gamma\sqrt{2}}{2} + \dots = 0$$

.....

Pour que la plaque soit flambée, c'est à dire que  $w \neq 0$ , le déterminant du système d'équations homogènes doit être égal à zéro

$$\Delta = 0.$$

En considérant les coefficients  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{12}$  et  $A_{31}$  le déterminant s'exprimera sous forme du tableau I

$$\Delta = 0$$

mn	11	12	21	22	13	31
11	$(1+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2}$	0	$-\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2}$	$\frac{\gamma}{2}$	0
12	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2}$	$(1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2}$	0	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\pi^2}$	0
21	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2}$	$\frac{(4+\alpha^2)^2}{8} + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \gamma - 4k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$8\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2}$	0	0
22	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\pi^2}$	0	$8\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\pi^2}$	$16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2}$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2}$
13	$\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\pi^2}$	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2}$	$1 + 9\alpha^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	0
31	0	0	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\pi^2}$	0	$\frac{81\gamma}{2} - (9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2} - 9k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$

Tableau I

En développant ce déterminant on obtient une équation de la forme

$$(9) \quad \Psi(\alpha, \beta, \gamma, \kappa_1, \kappa_2, \varphi) = 0,$$

dans laquelle  $\alpha, \beta, \gamma, \kappa_1, \kappa_2$  et  $\varphi$  sont les variables.

Cette équation permet de dimensionner les raidisseurs ou de déterminer la stabilité de la plaque pour des valeurs données de  $\gamma$  et  $\beta$  et pour tous les cas de charge.

Il existe des valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  telles que les raidisseurs ne subissent aucune flexion lors du flambage, mais représentent des lignes nodales de la plaque gondolée, nous les appellerons „valeur minima,,  $\gamma_{\min}$  et  $\beta_{\min}$ , car le dépassement de ces valeurs est sans influence sur la valeur des contraintes critiques.

Dans ce cas chaque partie de la plaque comprise entre les raidisseurs (voir fig. 2 bd) peut être considérée comme une plaque non raidie appuyée sur ses quatre bords, de telle façon que pour la charge qui lui est appliquée il est possible de déterminer les coefficients de gondolement  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . En introduisant ces coefficients dans l'équation (9) nous obtiendrons les valeurs correspondantes de  $\gamma_{\min}$  et  $\beta_{\min}$ .

Le problème ainsi posé dans sa forme générale, l'équation (9) permet l'étude de tous les cas spéciaux de charge.

Cas spécial — Flexion pure.

Le déterminant du système dans le cas de flexion pure

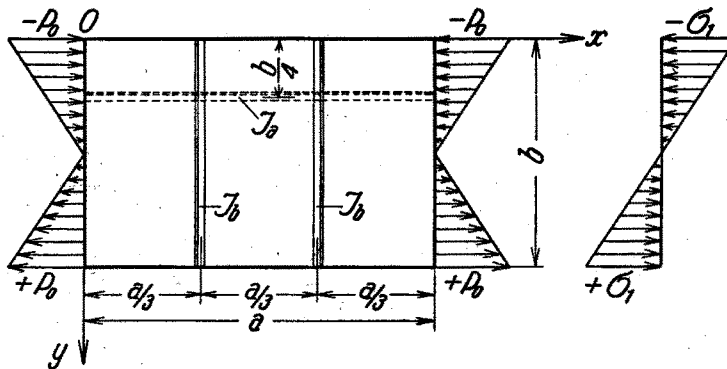


fig. 3

s'obtient à partir de l'expression générale du déterminant écrite plus haut (tableau I) en y faisant  $\varphi = 2$  et  $\kappa_2 = 0$ .

$$\Delta = 0$$

mn	11	12	21	22	13	31
11	$\frac{(1+\alpha^2)^2 + 3\beta\alpha^3 + \gamma}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\pi^2}$	0	0	$\frac{\gamma}{2}$	0
12	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\pi^2}$	$(1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\pi^2}$	0
21	0	0	$\frac{(4+\alpha^2)^2 + 3\beta\alpha^3 + 8\gamma}{2}$	$8\sqrt{2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\pi^2}$	0	0
22	0	0	$8\sqrt{2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\pi^2}$	$16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma$	0	0
13	$\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\pi^2}$	0	0	$(1+9\alpha^2)^2 + \frac{24\beta\alpha^3 + \gamma}{2}$	0
31	0	0	0	0	0	$(9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2}$

Tableau II

En première approximation nous limiterons le déterminant aux coefficients de  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  et  $A_{21}$ . En développant ce déterminant du troisième ordre et en l'égalant à zéro nous obtenons

$$(11) \quad \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left[ (1 + 4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma \right] - \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32\kappa_1\alpha^2}{9\pi^2} \right)^2 = 0 \dots$$

L'équation (11) est du second degré en  $\kappa_1$ , de même qu'en  $\beta$  et  $\gamma$ .

En la résolvant par rapport à l'une de ces inconnues et en prenant chaque fois la plus petite racine, nous obtiendrons soit les coefficients de gondolement, soit les moments d'inertie des raidisseurs.

Dans le tableau suivant on donne pour différentes valeurs du rapport  $\alpha = a/b$  pour  $\kappa_1 = 84, 80$  et  $64$  et en fixant le rapport

$\alpha = \frac{a}{b}$	$\kappa_1 = 84$			$\kappa_1 = 80$			$\kappa_1 = 64$		
	$\rho = \frac{J_a}{J_b}$			$\rho = \frac{J_a}{J_b}$			$\rho = \frac{J_a}{J_b}$		
	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50
1,0	2,56	2,03	1,42	2,38	1,88	1,33	1,64	1,30	0,92
1,1	2,38	1,87	1,30	2,22	1,73	1,21	1,51	1,18	0,82
1,2	2,20	1,70	1,18	2,03	1,57	1,08	1,35	1,05	0,73
1,3	1,98	1,54	1,06	1,84	1,41	0,97	1,19	0,92	0,63
1,4	1,79	1,38	0,94	1,64	1,26	0,86	1,03	0,78	0,54
1,5	1,60	1,23	0,83	1,45	1,11	0,75	0,87	0,65	0,45
1,7	1,22	0,93	0,63	1,10	0,83	0,57	0,56	0,47	0,29
2,0	0,73	0,55	0,36	0,60	0,46	0,30	0,14	0,10	—

Tableau III. Valeurs de  $\gamma$

$\rho = \gamma/\beta$  aux valeurs 1, 0,75 et 0,50 les valeurs résultantes de  $\gamma$  d'après l'équation (11).

Afin d'apprécier l'erreur commise sur les valeurs de  $\gamma$  à la suite de cette première approximation, nous allons effectuer une seconde approximation en prenant cette fois les termes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{13}$  et  $A_{31}$ , ce qui nous amènera à écrire un déterminant du sixième ordre.

Nous pouvons développer ce déterminant sous la forme d'un produit de trois facteurs, chacun de ces facteurs pouvant être nul

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } (9 + \alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2} = 0 \\ \text{b) } [(4 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma] [16(1 + \alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma] - \\ \quad - \left( 8\gamma\sqrt{2} - \frac{128\kappa_1\alpha^2}{9\pi^2} \right)^2 = 0 \\ \text{c) } \left\{ \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] [(1 + 4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma] - \right. \\ \quad - \left. \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32\kappa_1\alpha^2}{9\pi^2} \right)^2 \right\} \left[ (1 + 9\alpha^2)^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] + \\ \quad + \left\{ \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32\kappa_1\alpha^2}{9\pi^2} \right) - \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \right. \right. \\ \quad + \left. \left. \frac{\gamma}{2} \right] \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96\kappa_1\alpha^2}{25\pi^2} \right) \right\} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96\kappa_1\alpha^2}{25\pi^2} \right) + \left\{ \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \right. \right. \\ \quad - \left. \left. \frac{32\kappa_1\alpha^2}{9\pi^2} \right) \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96\kappa_1\alpha^2}{25\pi^2} \right) - \frac{\gamma}{2} [(1 + 4\alpha^2)^2 + \right. \\ \quad \left. \left. + 24\beta\alpha^3 + \gamma] \right\} \frac{\gamma}{2} = 0. \end{array} \right.$$

L'équation du second degré (12 b) nous donne pour

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} = 1,00 \text{ et } \kappa_1 = 84 \text{ les valeurs}$$

$$\gamma = 2,62 \quad \text{pour } \alpha = 1,0$$

$$\gamma = 4,25 \quad \text{„ } \alpha = 2,0.$$

L'équation du troisième degré 12 c) nous donne pour

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} = 1,00 \text{ et } \kappa_1 = 84 \text{ les valeurs}$$

$$\gamma = 2,59 \quad \text{pour } \alpha = 1,0$$

$$\gamma = 0,74 \quad \text{,, } \alpha = 2,0.$$

En deuxième approximation les plus petites valeurs pour  $\gamma$  sont données par les racines positives de l'équation (12 c) et peuvent nous servir par la suite pour calculer les moments d'inertie des raidisseurs.

Les solutions en  $\gamma$  obtenues en première approximation sont entachées d'une erreur par rapport à celles de la deuxième approximation qui, exprimée en %, s'établit comme suit:

$$\text{pour } \alpha = 1,0 \text{ et } \kappa_1 = 84 \quad \frac{2,59 - 2,56}{2,59} 100 = 1,16\%$$

$$\text{pour } \alpha = 2,0 \text{ et } \kappa_1 = 84 \quad \frac{0,74 - 0,73}{0,74} 100 = 1,84\%$$

De cela nous concluerons que la première approximation donne déjà, quand  $\alpha$  varie de 1 à 2 et  $\kappa_1 = 84$  pour  $\gamma$  des résultats suffisamment précis pour les besoins techniques.

#### BIBLIOGRAPHIE

[1] Timochenko S. — Ueber die Stabilität versteifter Platten, Eisenbahn 1921, S. 147.

[2] Dr Ing. Fröhlich — Stabilität der gleichmässig gedrückten Rechteckplatten mit Steifenkreuz, Bauingenieur, 1937, S. 678.