SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE THOMAS-FERMI

Par

VOJISLAV G. AVAKUMOVIC

1. Soit $f(x)$ une fonction positive et continue pour $x \geqq a \geqq 0$. Nous appellerons équation différentielle de Thomas-Fermi toute équation de la forme

$$y'' = f(x)\, y^{\lambda} \qquad \text{avec } \lambda > 1.\text{[1]} \tag{1}$$

En supposant qu'il existe une intégrale unique de l'équation (1) satisfaisant à la condition

$$\lim_{x=\infty} y(x) = 0, \tag{2}$$

nous allons examiner la manière dont elle se comporte lorsque $x \to \infty$. A cet effet nous allons définir la classe $R-O$ des fonctions.

Soit $\rho(x)$ une fonction positive, définie pour tout $x > a$ et bornée dans tout intervalle fini à condition qu'ils existent un nombre δ avec $0 < \delta < 1$ et deux nombres $m_\rho = m_\rho(\delta, a)$ et $M_\rho = M_\rho(\delta, a) \geqq m_\rho$ tels que les conditions

$$0 < m_\rho \leqq \frac{\rho(tx)}{\rho(x)} \leqq M_\rho$$

soient remplies pour tout $\delta < t < 1$ et tout $x \geqq a$. Ces hypothèses étant satisfaites, nous dirons que $\rho(x)$ appartient à la classe $R-O$.[2]

En partant de cette définition, nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit $\rho(x)$ une fonction de la classe $R-O$, $f(x) \geqq \rho(x)$ pour x suffisamment grand et $y(x)$ une intégrale de l'équation (1) satisfaisant à la condition (2); alors il existe un $A > 0$ ne dépendant que de λ, m_ρ et M_ρ tel que*

$$(x^2 \rho(x))^{\frac{1}{\lambda-1}} y(x) < \overline{A}$$

pour x suffisamment grand.

Théorème 2. *Soit $\rho(x)$ une fonction de la classe $R-O$ et*

$$\lim_{a=\infty} \sup \frac{lg\, M_\rho(\delta, a)}{lg\, \delta} > -2. \tag{3}$$

Soit, d'autre part,

$$f(x) \leq \rho(x)$$

pour x suffisamment grand et $y(x)$ une intégrale de l'équation (1) satisfaisant à la condition (2); alors il existe un $\underline{A} > 0$ ne dépendant que de λ, m_ρ et M_ρ tel que

$$(x^2 \rho(x))^{\frac{1}{\lambda-1}} y(x) > \underline{A}$$

pour x suffisamment grand.

Enfin, si $\lim \rho(tx)/\rho(x) = h(t)$ existe pour tout $t > 0$, $\rho(x)$ est une fonction à croissance régulière. M. J. Karamata a montré que

$$h(t) = t^\upsilon$$

et que la fonction $\rho(x)$ a la forme canonique

$$\rho(x) = x^\upsilon L(x), \tag{4}$$

$L(x)$ satisfaisant aux conditions

$$L(tx)/L(x) \to 1, \quad x \to \infty \qquad \text{pour tout } t > 0 \tag{5}$$

et

$$x^\varepsilon L(x) \to \infty, \quad x \to \infty \quad \text{pour chaque } \varepsilon > 0. \tag{6}$$ [3])

Théorème 3. *Soit $\rho(x)$ une fonction à croissance régulière avec*

$$\upsilon > 2. \tag{7}$$

Soit, d'autre part,

$$f(x) \sim \rho(x) \qquad \textit{lorsque } x \to \infty \tag{8}$$

et $y(x)$ une intégrale de l'équation (1) *satisfaisant à la condition* (2); *alors*

$$y(x) \sim \left[\frac{(1+\lambda+\upsilon)(2+\upsilon)}{(1-\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{\lambda-1}} (x^2\rho(x))^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

lorsque $x \to \infty$.

Précédemment nous avons déjà établi[4]) qu'il existe une solution unique de l'équation différentielle de Thomas-Fermi satisfaisant aux conditions aux limites (2) et

$$(9) \qquad y(a) = b > 0$$

toutes les fois que $f(x)$ satisfait aux conditions

$$f(x)/(x-a)^\theta < +\infty$$

pour $0 < x-a$ suffisamment petit et

$$f(x)/x^\theta > C$$

pour x suffisamment grand, θ étant une constante > -2 et C une constante positive.

D'après le Lemme 1 on voit que

$$(10) \qquad \rho(x)/x^\theta \quad \text{avec } \theta > -2$$

toutes les fois que les conditions (3) et (7) sont satisfaites. On voit donc que les hypothèses du Théorème 3 impliquent l'existence d'une intégrale $y(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$.

Nous pouvons supposer sans restriction que la fonction $y(x)$ reste bornée dans tout l'intervalle $(0, \infty)$ et, en particulier, que $y(0) = 1$; car, dans le cas contraire, on peut la rendre telle en faisant les substitutions $x = a + x'$ et $y = y^*/y(0)$, les fonctions $\rho(x)$ et $\rho(a+x)$ se comportant (d'après le Lemme 1) asymptotiquement de la même manière. De même on peut supposer les hypothèses des Théorèmes 1 et 2 satisfaites pour tout $x \geq 0$.

2. Lemme 1.

$$(11) \qquad \frac{m_\rho}{M_\rho}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{lg\, m_\rho}{lg\, \delta}} \leq \frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leq \frac{1}{m_\rho}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{lg\, M_\rho}{lg\, \delta}}$$

pour tout $y \geq x \geq 0$.

Démonstration: Voir loc. cit.[2]) et [3]).

Corollaire I. *Pour chaque* $0<\delta<1$ *existent deux fonctions* $m_\rho(\delta)$ et $M_\rho(\delta)$ *telles que l'inégalité*

$$m_\rho(\delta) \leqq \frac{\rho(x)}{\rho(y)} \leqq M_\rho(\delta)$$

a lieu pour tout $0 \leqq x \leqq y \leqq x/\delta$.

Lemme 2. *Soit donnée une fonction* $\nu(x)$ *positive et finie pour tout* $x \geqq 0$ *et deux nombres* A *et* B *tels que* $0<B<1$ *et* $0<A<\infty$; *si*

$$\nu(x) < A\,\nu^B(\delta x)\,\rho_0(x) \tag{12}$$

pour $0<\delta<1$ *et tout* $x \geq 0$, $\rho_0(x)$ *étant une fonction de la classe* $R-O$, *alors*

$$\nu(x) < A^{\frac{1}{1-B}}\, M_{\rho_0}^{\frac{B}{(1-B)^2}}\, (\rho_0(x))^{\frac{1}{1-B}}. \tag{13}$$

Démonstration. Évidemment on peut remplacer dans l'inégalité (12) x par δx et l'on obtient

$$\nu(\delta x) < A\, M_{\rho_0}\, \nu^B(\delta^2 x)\, \rho_0(x). \tag{14}$$

En majorant dans (15) $\nu(\delta x)$ par l'inégalité (14) il s'ensuit que

$$\nu(x) < A^{1+B}\, M_{\rho_0}^B\, \nu^{B^2}(\delta^2 x)\, \rho_0^{1+B}(x).$$

On peut répéter ce procédé n-fois; de cette manière on obtient

$$\nu(x) < A^{1+B+\cdots+B^n}\, M_{\rho_0}^{B+2B^2+\cdots+nB^n}\, \nu^{B^{n+1}}(\delta^{n+1} x)\, \rho^{1+B+\cdots+B^n}(x). \tag{15}$$

D'après l'hypothèse $0<B<1$ on voit que les séries $1+B+\cdots+B^n$ et $B+2B^2+\cdots+nB^n$ convergent lorsque $n \longrightarrow \infty$. Donc, en faisant, dans l'inégalité (15), le passage $n \rightarrow \infty$, on obtient la conclusion du Lemme 2 en tenant compte de $B^{n+1} \longrightarrow 0$ c'est-à-dire de

$$\nu^{B^{n+1}}(\delta^{n+1} x) \longrightarrow 1 \qquad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration du Théorème 1. De l'équation différentielle elle-même il s'ensuit que $y'' \geqq 0$; $y(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$ on conclut que $y(x)$ est une fonction convexe et non-croissante, c'est-à-dire $y'(x) \leqq 0$. On aura alors

$$y'(x) - y'(x\sqrt{\delta}) = \int_{x\sqrt{\delta}}^{x} f(t)\, y^{\lambda}(t)\, dt \geqq \int_{x\sqrt{\delta}}^{x} \rho(t)\, y^{\lambda}(t)\, dt$$

$$\geqq y^{\lambda}(x)\, x\, \rho(x) \int_{x\sqrt{\delta}}^{x} \frac{\rho(t)}{\rho(x)} \frac{dt}{x}$$

$$\geqq (1 - \sqrt{\delta})\, m_{\rho}(\sqrt{\delta})\, y^{\lambda}(x)\, x\, \rho(x)$$

d'où l'on obtient, en tenant compte de $y'(x) \leqq 0$, que

$$-y'(x\sqrt{\delta}) \geqq (1 - \sqrt{\delta})\, m_{\rho}(\sqrt{\delta})\, y^{\lambda}(x)\, x\, \rho(x).$$

En intégrant cette inégalité entre les limites $x\sqrt{\delta}$ et x, on obtient

$$(16) \quad \begin{cases} y(x\delta) \geqq (1 - \sqrt{\delta}) \sqrt{\delta}\, m_{\rho}(\sqrt{\delta})\, y^{\lambda}(x)\, x^2\, \rho(x) \displaystyle\int_{x\sqrt{\delta}}^{x} \frac{t}{x} \frac{\rho(t)}{\rho(x)} \frac{dt}{x} \\ \qquad \geqq (1 - \sqrt{\delta})^2 \sqrt{\delta}\, m_{\rho}^2(\sqrt{\delta})\, y^{\lambda}(x)\, x^2\, \rho(x) \\ \qquad \geqq (1 - \sqrt{\delta})^2 \sqrt{\delta}\, m_{\rho}^2(\delta)\, y^{\lambda}(x)\, x^2\, \rho(x). \end{cases}$$

puisque $m_{\rho}(\sqrt{\delta}) \geqq m_{\rho}(\delta) = m_{\rho}$. Donc, en posant

$$B = \frac{1}{\lambda}, \quad A = \frac{1}{\left((1 - \sqrt{\delta})^2 \sqrt{\delta}\, m_{\rho}^2(\delta)\right)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

et

$$\rho_0(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{\lambda}}\, \rho^{\frac{1}{\lambda}}(x)}$$

on trouve l'inégalité (12) avec $y(x)$ à la place de $v(x)$. L'inégalité (13) nous donne la conclusion du Théorème 1, puisque $\dfrac{1}{1-B} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$.

D é m o n s t r a t i o n du Théorème 2. En vertu des hypothèses du Théorème 2, l'intégrale $y(x)$ satisfait aux conditions (2) et (9) et, d'après le théorème relatif à l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle de Thomas-Fermi, on voit, en tenant compte de l'inégalité (3) et du Lemme 1 (c'est-à-dire de l'inégalité (10)) que l'équation

$$(17) \qquad y'' = \rho(x)\, y^{\lambda}$$

possède une intégrale unique satisfaisant aux mêmes conditions limites que $y(x)$. Désignons la par $y_\rho(x)$. Considérons maintenant les deux cas possibles

$$y'(0) \leqq y'_\rho(0)$$

et

$$y'(0) > y'_\rho(0).$$

Dans le premier cas on trouve, en vertu de l'inégalité $f(x) \leqq \rho(x)$, que $y(x) \leqq y_\rho(x)$ pour tout $x \geqq 0$[5]). Dans le deuxième cas on aura ou bien $y(x) \geqq y_\rho(x)$ pour tout $x > 0$, ou bien il existe un $a' > 0$ tel que $y(a') = y_\rho(a')$ et $y'(a') \leqq y'_\rho(a')$. Dans ce dernier cas on retombe alors dans le premier et on conclut qu'on a ou bien

$$y(x) \leqq y_\rho(x), \tag{18}$$

ou bien

$$y(x) \geqq y_\rho(x), \tag{18a}$$

pour tout $x \geqq a'$. En premier lieu considérons le cas (18). On se rend facilement compte qu'il existe un $\wedge$ satisfaisant aux conditions

$$1 < \wedge < \lambda \quad \text{et} \quad 1 + \frac{2(\lambda - \wedge)}{1-\lambda} + \frac{1-\wedge}{1-\lambda} \frac{\lg m_\rho}{\lg \delta} < 0.$$

Dans ce cas on aura, d'après (11),

$$J = \int_x^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2(\lambda-\wedge)}{1-\lambda}} \left(\frac{\rho(t)}{\rho(x)}\right)^{\frac{1-\wedge}{1-\lambda}} \frac{dt}{x} < C_0$$

le nombre C_0 ne dépendant pas de x. En tenant compte du Théorème 1 on trouve que

$$y_\rho(x) < C_1 (x^2 \rho(x))^{\frac{-1}{1-\lambda}}$$

et l'on obtient, $y'(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$.

$$-y'(x) = \int_x^\infty f(t) y^\lambda(t)\, dt < y^\wedge(x) \int_x^\infty \rho(t) y_\rho{}^{\lambda-\wedge}(t)\, dt$$

$$< C_2 y^\wedge(x) x^{\frac{1+\lambda-2\wedge}{1-\lambda}} (\rho(x))^{\frac{1-\wedge}{1-\lambda}} J$$

$$< C_3 y^\wedge(x) x^{\frac{1+\lambda-2\wedge}{1-\lambda}} (\rho(x))^{\frac{1-\wedge}{1-\lambda}}.$$

De là il s'ensuit

$$-\int_{a_1}^{x} y^{-\Lambda}(t)\, y'(t)\, dt < C_3 \int_{a_1}^{x} t^{\frac{1+\lambda-2\Lambda}{1-\lambda}} (\rho(t))^{\frac{1-\Lambda}{1-\lambda}} dt$$

c'est-à-dire

$$y^{1-\Lambda}(x) < y^{1-\Lambda}(a_1) + C_4 (x^2 \rho(x))^{\frac{1-\Lambda}{1-\lambda}} \int_{a_1}^{x} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1+\lambda-2\Lambda}{1-\lambda}} \left(\frac{\rho(t)}{\rho(x)}\right)^{\frac{1-\Lambda}{1-\lambda}} \frac{dt}{x}.$$

Donc, en tenant compte des (3) et (11),

$$y^{1-\Lambda}(x) < y^{1-\Lambda}(a_1) + C_5 (x^2 \rho(x))^{\frac{1-\Lambda}{1-\lambda}}.$$

D'après la remarque faite à la fin de **1**, il existe un $\theta > -2$ tel que $\rho(x) > Cx^{\theta}$ et par suite $x^2 \rho(x) \to \infty$, lorsque $x \to \infty$. Donc

$$y^{1-\Lambda}(x) < C_6 (x^2 \rho(x))^{\frac{1-\Lambda}{1-\lambda}}$$

ce qui démontre le Théorème 2 dans le cas (18).

On a ainsi démontré en même temps que

$$(x^2 \rho(x))^{\frac{1}{\lambda-1}} y_{\rho}(x) > \underline{A}. \tag{18b}$$

Car, $y_{\rho}(x)$ étant une intégrale de l'équation (17) on aura $f(x) \equiv \rho(x)$ et $y(x) \equiv y_{\rho}(x)$. Considérons de nouveau le cas général, en supposant que l'inégalité (18 a) a lieu. On conclut, d'après (18 b), que $y(x)$ satisfera à la conclusion du Théorème 2, de même dans le cas (18 a).

3. La démonstration du Théorème 3 est indépendante des résultats cités précédemment et repose sur le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $p(x)$ une fonction continue, décroissante et convexe, satisfaisant aux conditions*

$$\lim_{x=\infty} p(x) = 0,$$

$$\frac{p^2(x)}{x} \int_{a}^{x} \frac{dt}{p^2(t)} > C_6 \tag{19}$$

pour x suffisamment grand et

(20) $$x^2\frac{p''(x)}{p(x)} > C_7$$

pour x suffisamment grand. Soit de plus,

(21) $$p''(x) \sim f(x)\,p^{\lambda}(x)$$

lorsque $x \to \infty$ et $y(x)$ une intégrale de l'équation (1) *tendant vers zéro lorsque $x \to \infty$; alors*

$$y(x) \sim p(x) \qquad \textit{lorsque } x \to \infty .$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous pouvons supposer sans restriction que les inégalités (19) et (20) ont lieu pour tout $x \geqq 0$ et que

$$p(0) = 1 .$$

A. Posons

$$y(x) = p(x)\,z(\varphi(x)),$$

$\varphi(x)$ étant une solution de l'équation de Bernoulli,

(22) $$p\,\varphi'' + 2\,p'\,\varphi' + \alpha\,p\varphi'^2 = 0 \quad \text{avec } \alpha > 0$$

telle que

$$\varphi(0) = \xi \text{ et } \varphi'(0) = \frac{1}{\eta},$$

ξ et η étant deux constantes que nous choisirons ultérieurement. Posons encore

$$\mathrm{X} = \frac{p''\,z}{p\,\varphi'^2}$$

et

$$\Omega = \frac{f\,p^{\lambda}}{p''}.$$

De cette manière l'équation de Thomas-Fermi devient

(23) $$z_{\varphi\varphi} - \alpha\,z_{\varphi} = \mathrm{X}\,[\Omega\,z^{\lambda-1} - 1]$$

et d'après l'hypothèse du Lemme 3 on voit qu'il existe une solution de l'équation (23) satisfaisant aux conditions

$$p(0)\,z(\varphi(a)) = 1, \text{ c'est-á-dire } z(\xi) = 1$$

et

(24) $$\lim_{x=\infty} p(x)\,z(\varphi(x)) = 0 .$$

En outre, $z(\varphi(x))$ est une fonction positive, $y(x)$ et $p(x)$ étant positifs.

On sait que l'équation différentielle (22) admet la solution

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(p(x))^2\left(\eta + \alpha \int\limits_0^x \frac{dt}{p^2(t)}\right)}, \tag{25}$$

d'où il suit

$$\varphi(x) = \xi + \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^x \frac{\frac{d\tau}{p^2(\tau)}}{\frac{\eta}{\alpha} + \int\limits_0^\tau \frac{dt}{p^2(t)}}.$$

Posons maintenant

$$P(x) = 1 + \int\limits_0^x \frac{dt}{p^2(t)}$$

et déterminons les nombres ξ et η de manière que

$$\xi = 0 \text{ et } \eta = \alpha.$$

On aura alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^x \frac{P(t)}{P'(t)}\, dt = \frac{1}{\alpha} \lg P(x)$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)} &= p(x)\, P(x) \\ &= p(x)\left(\int\limits_0^x \frac{dt}{p^2(t)} + 1\right) \\ &= \frac{x}{p(x)} \frac{p^2(x)}{x} \int\limits_0^x \frac{p^2(t)}{dt} + o(1) \\ &> C_6 \frac{x}{p(x)} + o(1) > C_8 \end{aligned}\right. \tag{26}$$

pour x suffisamment grand.

B. D'après (19), (20) et (25) on a

$$
(27)\qquad \begin{cases} \chi = \dfrac{p''(x)\, z(\varphi(x))}{p(x)} (p(x))^4 \left(\eta + \alpha \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{p^2(t)}\right)^2 \\[2ex] > \alpha^2 z(\varphi(x))\, p''(x)\, p^3(x) \left(\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{p^2(t)}\right)^2 \\[2ex] > (\alpha\, C_6)^2 z(\varphi(x))\, x^2 \dfrac{p''(x)}{p(x)} \\[2ex] > C_9\, z(\varphi(x)). \end{cases}
$$

C. Désignons par φ^* la borne supérieure des zéros de l'équation

$$(28)\qquad \Omega z^{\lambda-1} - 1 = 0.$$

Nous examinerons d'abord le cas $\varphi^* < \infty$. On a ou bien

$$a)\qquad \Omega z^{\lambda-1} - 1 > 0 \qquad \text{pour tout } \varphi > \varphi^*,$$

ou bien

$$b)\qquad \Omega z^{\lambda-1} - 1 < 0 \qquad \text{pour tout } \varphi > \varphi^*.$$

Considérons le cas *a)*. Dans ce cas on aura, d'après (27),

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_\varphi > 0 \qquad \text{pour tout } \varphi > \varphi^*,$$

la fonction $z(\varphi)$ étant positive pour tout $\varphi > \varphi(0)$. En intégrant deux fois l'inégalité précédente, on obtient

$$z(\varphi) > C_{10} + C_{11} e^{\alpha\varphi} \qquad \text{pour tout } \varphi > \varphi^*;$$

donc, d'après l'inégalité (20)

$$p(x)\, z(\varphi) > C_{11}\, p(x)\, e^{\alpha\varphi} > C_{11}\, C_8 > 0.$$

La dernière inégalité étant en contradiction avec (24), on conclut que, dans le cas $\varphi^* < \infty$, l'inégalité *a)* ne peut pas exister.

Considérons alors le cas *b)*. De même que précédemment, on aura

$$(29)\qquad z_{\varphi\varphi} - \alpha z_\varphi < 0 \qquad \text{pour tout } \varphi > \varphi^*.$$

Supposons qu'il existe un $\overline{\varphi} > \varphi^*$ tel que $z_\varphi(\overline{\varphi}) = 0$. Dans ce cas on aura, d'après (29), $z_{\varphi\varphi}(\overline{\varphi}) < 0$ et on voit que la fonction $z(\varphi)$

possède au plus un extremum, celui-ci étant un maximum. Alors il existe un $\varphi^{**} \geqq \varphi^*$ tel que $z(\varphi)$ est ou bien croissant ou bien décroissant pour tout $\varphi > \varphi^{**}$. D'autre part, d'après (21) et *b*), on trouve que

$$\limsup_{\varphi=\infty} z(\varphi) \leqq 1.$$

Donc, en tenant compte de l'inégalité $z(\varphi) > 0$ on conclut que

$$\lim_{\varphi=\infty} z(\varphi) = \tau \tag{30}$$

avec

$$0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{31}$$

Nous allons montrer que $\tau = 1$. De (29) et (30) il suit, en vertu d'un théorème de nature Tauberian de E. Landau [6]) que

$$\lim_{\varphi=\infty} z_\varphi(\varphi) = 0. \tag{32}$$

En premier lieu supposons que $\tau = 0$. Dans ce cas $z(\varphi)$ est une fonction décroissante, c'est-à-dire $z_\varphi < 0$ pour tout $\varphi > \varphi^{**}$. Alors, d'après (29), $z_{\varphi\varphi} < 0$ et, par suite, $z(\varphi)$ est une fonction concave. Ceci étant en contradiction avec la relation (30), on conclut que $\tau > 0$. Soit alors

$$0 < \tau < 1. \tag{33}$$

De (32) on trouve

$$z_{\varphi\varphi} - \chi[\Omega z^{\lambda-1} - 1] = 0 \quad \text{lorsque } \varphi \to \infty.$$

D'après (21), (27) et (33) on couclut alors que

$$\limsup \chi[\Omega z^{\lambda-1} - 1] < -\varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon > 0.$$

Donc

$$\limsup_{\varphi=\infty} z_{\varphi\varphi} < -\varepsilon,$$

d'où, en intégrant deux fois, l'on obtient pour φ suffisamment grand

$$z < -\frac{\varepsilon'}{2}\varphi^2 + C_{12}\varphi + C_{13} \quad \text{avec } \varepsilon' > \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{\varphi=\infty} z = -\infty.$$

Cette relation étant en contradiction avec (30), on couclut que $\tau = 1$.

Considérons enfin le cas $\varphi^* = -\infty$ et soient φ_n et φ_{n+1} deux zéros consécutifs de l'équation (23). Alors on aura ou bien

$$c) \qquad \Omega z^{\lambda-1} - 1 > 0 \qquad \text{pour } \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1},$$

ou bien

$$d) \qquad \Omega z^{\lambda-1} - 1 < 0 \qquad \text{pour } \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Dans le cas *c)* on conclut, d'après (27) et $z(\varphi) > 0$, que

$$(34) \qquad z_{\varphi\varphi} - \alpha z_\varphi > 0 \qquad \text{pour } \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Soit $z_\varphi(\varphi) \neq 0$ pour tout $\varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}$. Alors $z(\varphi)$ est ou bien croissant ou bien décroissant dans l'intervalle $(\varphi_n, \varphi_{n+1})$. Dans le premier cas on a $z^{\lambda-1}(\varphi) \leq 1/\Omega_{\varphi=\varphi_{n+1}}$ et dans le deuxième $z^{\lambda-1}(\varphi) \leq 1/\Omega_{\varphi=\varphi_n}$ pour tout $\varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}$. Enfin, s'il existe un $\overline{\varphi}$ avec $\varphi_n < \overline{\varphi} < \varphi_{n+1}$, tel que $z_\varphi(\overline{\varphi}) = 0$, alors on trouve, d'après (34), que $z_{\varphi\varphi}(\overline{\varphi}) > 0$ et, par suite, la fonction $z(\varphi)$ possède dans l'intervalle $(\varphi_n, \varphi_{n+1})$ au plus un extremum, celui-ci étant un minimum; donc, $z^{\lambda-1}(\varphi) < \underset{\varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}}{\operatorname{Max}} 1/\Omega$ pour tout $\varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}$. De l'inégalité

$$\operatorname{Max}(1/\Omega_{\varphi=\varphi_n}, \; 1/\Omega_{\varphi=\varphi_{n+1}}) \leq \underset{\varphi \leq \varphi \leq \varphi_{n+1}}{\operatorname{Max}} 1/\Omega$$

et *c)* on conclut que

$$1/\Omega < z^{\lambda-1}(\varphi) \leq \underset{\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_{n+1}}{\operatorname{Max}} 1/\Omega \qquad \text{pour tout } \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Dans le cas *d)*, on conclut de la même manière que

$$\underset{\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_{n+1}}{\operatorname{Min}} 1/\Omega \leq z^{\lambda-1}(\varphi) < 1/\Omega \qquad \text{pour tout } \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Donc, d'après (21) et la définition de Ω, $z(\varphi) \to 1$ lorsque $\varphi \to \infty$.

D é m o n s t r a t i o n du Théorème 3. Il suffit de montrer que la fonction

$$(35) \qquad p(x) = \left(\frac{(1+\lambda+\upsilon)(2+\upsilon)}{(\lambda-1)^2}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \int_x^\infty dt \int_t^\infty \left(\tau^{2\lambda}\rho(\tau)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} d\tau$$

satisfait aux conditions (19), (20) et

$$(36) \qquad p(x) \sim \left(\frac{(1+\lambda+\upsilon)(2+\upsilon)}{(\lambda-1)^2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \left((x^2\rho(x)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

lorsque $x \to \infty$ toutes les fois que $\rho(x)$ est une fonctión à croissance régulière, satisfaisant à la condition (7). Les propriétés (19), (20), (21) et (36) étant des conséquences immédiates des (4), (5), (6), (7) et (35) le Théorème 3 est démontré.

Beograd, le 6 septembre 1946.

RÉFÉRENCES

1) Fermi E. — Atti Accad. Lincei (6) 6 (1927), 602—607. Thomas H. Proc. Cambridge 23 (1927), 542—548. Sommerfeld A. Zeit. f. Phys. 78 (1932), 283—308. Bush H. and Caldwell S. H. Physical Review (2) 38 (1931), 1898—1901. Miranda C. Reale Accad. d'Italia. V (1934), 285—322.

2) Avakumović V. G. — C. R. de l'Acad. des Sci. Paris. 200 (1935), 1515—1518.

3) Karamata J. — Bull. de la Soc. Math. de France. 61 (1933), 55—62.

4) Ce théorème se trouve démontré dans une note qui paraîtra prochainement dans le Bull. de l'Acad. Serbe des Sc.

5) Kamke E. — Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig (1930), 91. Murray F. H. Annals of Math. (2) 24 (1923), 69—88.

6) Landau E. — Prace Math. Fiz. 21 (1910), 125—127.