REMARQUE SUR LE PROBLÈME DES TYPES DES SURFACES DE RIEMANN

Par
M. RADOJČIĆ

Dans la théorie des fonctions linéairement automorphes la division du domaine d'existence de la fonction en domaines qui expriment le groupe automorphe des transformations approfondit la connaissance des singularités essentielles que ces fonctions possèdent. La question se pose: comment et dans quelle mesure cette méthode pourrait-elle être généralisée de sorte qu'elle nous serve à l'étude des singularités essentielles des fonctions analytiques aussi générales que possible? [1])

Dans certains travaux antérieurs nous avons défini une division semblable du domaine d'existence—ou seulement du voisinage d'une singularité essentielle — d'une fonction analytique quelconque en domaines d'univalence et que nous avons appelé „domaines fondamentaux". Ceux-ci constituent un réseau de polygones curvilignes, ayant pour „sommets" les points de rencontre d'au moins trois arcs simples de ce réseau et pour „côtés" ces arcs mêmes, limités par deux „sommets" voisins. (On reconnaît les notions analogues dans les fonctions linéairement automorphes). Ceux parmi les sommets, qui sont des points essentiels, furent nommés par nous des „sommets transcendants"; les autres furent nommés des „sommets algébriques".

---

1) Nous avons traité cette question à plusieures reprises. Voir par ex.: *Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles* (Bull. Soc. Math. de France, t. 64, 1936) et *Sur l'ensemble des faisceaux transcendants au voisinage d'une singularité essentielle d'une fonction analytique* (Bull. Acad. Roy. Serbe, t. 4, 1938).

Les angles des polygones dont les sommets sont transcendants furent appelés des „angles transcendants". Tous les angles peuvent être groupés en des ensembles d'angles adjacents, de sorte que chaque ensemble contient une suite finie ou infinie dans laquelle chaque angle est adjacent au suivant; nous avons nommé un tel ensemble un „faisceau" d'angles. Le faisceau fut appelé „transcendant" lorsque son sommet est transcendant.

Alors, sous certaines conditions, nous avons démontré le théorème suivant:

Lorsque le voisinage d'une singularité essentielle isolée (un point ou une ligne) peut être divisé en domaines fondamentaux qui possèdent, excepté peut-être un nombre fini d'entre eux, des sommets transcendants, et que l'ensemble des faisceaux ordonnés cycliquement autour de cette singularité est réductible, *alors cette singularité est un point unique.*[2])

Ce théorème peut servir de critère à discerner les surfaces de Riemann hyperboliques et paraboliques, car tout ce qui concerne nos domaines fondamentaux regarde aussi les feuillets des surfaces des fonctions inverses, et réciproquement. Donc, sous les conditions indiquées, le type est parabolique.

On peut se demander si le théorème mentionné ne pourrait être généralisé et complété de sorte qu'on aurait comme proposition: *La singularité est un point ou une ligne suivant que l'ensemble des faisceaux transcendants, ordonnés circulairement autour de la singularité, est réductible ou non.*[3])

Nous allons montrer que cette proposition ne peut pas avoir lieu. *Nous indiquerons l'existence des fonctions méromorphes* (qui ont donc comme singularité essentielle *un seul point* à l'infini) *dont les faisceaux transcendants constituent un ensemble ordonné dense.*

Ce fait résulte d'une remarque de M. E. Ullrich concernant un théorème de M. R. Nevanlinna.[4]) M. Ullrich a

[2]) Voir le deuxième des travaux cités.

[3]) Cette question fut posée à la fin du second travail cité (voir l'édition serbe).

[4]) E. Ullrich: *Ueber ein Problem von Herrn Speiser* (Comment. math. helv. 7, 1934). R. Nevanlinna: *Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen* (Comment. math. helv. 5, 1933).

montré comment, en ajoutant à l'arbre topologique d'une surface hyperbolique des noeuds du second ordre, il peut être transformé en l'arbre d'une surface parabolique. On montre facilement que par cette opération l'espèce de l'ensemble des faisceaux transcendants peut rester la même.

En effet, considérons la configuration des triangles curvilignes qui remplissent le domaine d'existence (un cercle) de la fonction modulaire bien connue par son application aux fonctions entières. Nous obtiendrons un système de domaines fondamentaux (au sens du mot que nous lui donnons) de cette fonction en joignant ces triangles deux à deux, car à chaque triangle correspond un demi-plan de la fonction inverse. Tous les sommets de ces domaines sont transcendants.

M. Ullrich a envisagé l'arbre A inscrit dans cette configuration de triangles. (Donc, A ne correspond pas aux domaines fondamentaux, mais aux triangles. Tous les noeuds de A sont du troisième ordre et chaque triangle contient un noeud.

Divisons maintenant l'un de ces triangles en deux parties reliant par un arc simple deux sommets du même triangle. Il en résulte un triangle plus petit et un bi-angle. Divisons ce dernier triangle de façon analogue et répétons ceci un certain nombre de fois, de sorte que le triangle envisagé soit divisé en un nombre fini de bi-angles et un triangle. Répétons ensuite cette opération avec chaque triangle du réseau modulaire considéré.

La figure que nous obtiendrons ainsi peut être considérée toujours comme l'image topologique (qui n'est plus exacte du point de vue de la conformité) correspondant à une fonction déterminée F, de même que le système de triangles dont nous sommes parti correspond à la fonction modulaire considérée. En joignant deux à deux les domaines voisins (deux bi-angles ou un bi-angle et un triangle) nous obtiendrons l'image topologique d'une division du domaine d'existence de la fonction F en domaines fondamentaux. Remarquons que l'ensemble des faisceaux transcendants est cependant resté le même.

D'autre part l'arbre de la nouvelle configuration de bi-angles et triangles s'obtient en inscrivant des noeuds nouveaux du second ordre dans l'arbre A. Dans chaque triangle de la configuration primitive le nombre de ces noeuds est égal au nombre des bi-angles contenus dans ce triangle.

Or, c'est là manière dont s'est servi M. Ullrich pour transformer un arbre du type hyperbolique en un arbre du type parabolique. Donc, nous pouvons supposer que les changements dans la configuration des triangles furent effectués de telle sorte que le type de la surface de la fonction inverse à F soit parabolique, c. à. d. que le domaine d'existence de F soit tout le plan: que ce soit une fonction méromorphe.

Autrement dit, on peut construire une surface de Riemann du type parabolique et à laquelle correspond dans le plan de la fonction inverse un ensemble ordonné dense des faisceaux transcendants; ou bien: *il est possible que dans un seul point essentiel isolé l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants soit dense.*

Beograd, le 11 mars 1940.