SUR L'APPLICATION DES THÉORÈMES DE NATURE TAUBERIENNE À L'ÉTUDE DES VALEURS ASYMPTOTIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par

J. KARAMATA

En généralisant plusieurs propositions de Hardy, Littlewood et Landau[1]) j'ai montré[2]) que:

En supposant la fonction $f(x)$ deux fois dérivable à partir d'un x, de

$$f(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

il résulte

$$xf'(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

lorsque, pour une valeur quelconque de C et $M > 0$,

$$Cxf'(x) + x^2 f''(x) > M, \quad \textit{(ou bien } < -M\textit{), à partir d'un } x.$$

En posant dans cette proposition

$$f(x) = x^a g(x), \quad a \gtrless 0,$$

on en déduit le

Théorème 1. *Soit $g(x)$ deux fois dérivable à partir d'un x et a réel quelconque; de*

$$g(x) = o(x^{-a}), \quad x \to \infty,$$

il résulte

$$g'(x) = o(x^{-a-1}), \quad x \to \infty,$$

---

[1]) voir loc. cit. [2]).

[2]) J. Karamata — Quelques théorèmes de nature tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries. Bulletin de l'Académie royale serbe, N° 2, p. 169—205. (1935).

lorsque, pour une valeur quelconque de C et $M>0$, la condition

(1) $$Cx^{a+1}g'(x)+x^{a+2}g''(x)>-M, \quad (ou\ bien < M)$$

est satisfaite, à partir d'une valeur de x.

En particulier, pour

$$C=M=0,$$

l'on obtient le

Théorème. 2. *La fonction $y(x)$ étant supposée convexe à partir d'une valeur de x, de*

$$y(x)=o(x^{-a}), \quad x\to\infty,$$

il résulte

$$y'(x)=o(x^{-a-1}), \quad x\to\infty,$$

quelque soit a réel.

Le fait, que dans la condition (1) figurent les différentes dérivées de la fonction $g(x)$, suggère l'application de ces théorèmes à l'étude des valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles.

A titre d'exemple, nous allons considérer l'équation différentielle du second ordre

(2) $$y''=f(x)y^{\lambda}, \quad \lambda>0,$$

étudiée par V. Avakumović dans la Note[3]). Il est vrai que nous n'obtenons pas, du moins dans le cas $\lambda>1$, des résultats aussi précis que Avakumović, mais notre but est plutôt de montrer comment on peut utiliser les théorèmes cités dans ce genre de questions.

Le problème proposé par Avakumović est de trouver la valeur asymptotique de la solution de l'équation différentielle (2), qui tend vers zéro lorsque $x\to\infty$, en supposant que la fonction $f(x)$ satisfait à la condition

(3) $$f(x)>Cx^{-\delta}, \quad \text{avec } 0<\delta<2.$$

Du fait que $f(x)>0$, la fonction $y(x)$ est, d'après (2), convexe, donc par l'application du Théorème 2 (avec $a=0$), de l'hypothèse

$$y(x)\to 0, \quad x\to\infty,$$

[3]) voir p. 101.

il résulte que

$$y'(x) = o(1/x), \quad x \to \infty. \tag{4}$$

D'autre part, en intégrant l'équation (2) de x à ∞ et en tenant compte de l'hypothèse (3), l'on obtient

$$-y'(x) = \int_x^\infty f(t)\, y^\lambda(t)\, dt > C \int_x^\infty t^{-\delta} y^\lambda(t)\, dt,$$

c'est-à-dire

$$g(x) = \int_x^\infty t^{-\delta} y^\lambda(t)\, dt < -\frac{1}{C} y'(x). \tag{5}$$

Donc, d'après (4),

$$g(x) = \int_x^\infty t^{-\delta}\, y^\lambda(t)\, dt = o(1/x), \quad x \to \infty.$$

En appliquant à cette relation le Théorème 1, il résulte que

$$-g'(x) = x^{-\delta}\, y^\lambda(x) = o(1/x^2), \quad x \to \infty,$$

lorsque

$$Cx^2 g'(x) + x^3 g''(x) = (C-\delta)\, x^{2-\delta}\, y^\lambda(x) + \lambda\, x^{3-\delta}\, y^{\lambda-1}(x) y'(x) < M,$$

condition qui est certainement satisfaite lorsque $C = \delta$.

Ainsi

$$y^\lambda(x) = o(x^{\delta-2}), \quad x \to \infty,$$

c. à. d.

$$y(x) = o\left(x^{-\frac{2-\delta}{\lambda}}\right), \quad x \to \infty.$$

En tenant compte de ce résultat, par une seconde application du Théorème 2, avec $a = \frac{2-\delta}{\lambda}$, il ressort que

$$y'(x) = o\left(x^{-1-\frac{2-\delta}{\lambda}}\right), \quad x \to \infty,$$

qui, d'après (5), donne

$$g(x) = \int_x^\infty t^{-\delta}\, y^\lambda(t)\, dt = o\left(x^{-1-\frac{2-\delta}{\lambda}}\right), \quad x \to \infty.$$

Par une nouvelle application du Théorème 1 à cette relation, il résulte

$$-g'(x) = x^{-\delta} y^{\lambda}(x) = o\left(x^{-2-\frac{2-\delta}{\lambda}}\right), \quad x \to \infty,$$

c. à. d.

$$y(x) = o\left(x^{-\frac{2-\delta}{\lambda}-\frac{2-\delta}{\lambda^2}}\right), \quad x \to \infty$$

En répétant ce raisonnement n fois de suite, l'on obtient

$$y(x) = o\left(x^{-(2-\delta)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\cdots+\frac{1}{\lambda^n}\right)}\right), \quad x \to \infty.$$

quelque soit n.

Donc, en posant

$$\theta = \frac{2-\delta}{\lambda-1},$$

il résulte que, pour $\lambda > 1$,

$$y(x) = o\left(x^{-\theta+\varepsilon}\right), \quad x \to \infty,$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. Ce résultat est moins précis que celui obtenu par Avakumović, puisque il montre que

$$y(x) = O(x^{-\theta}), \quad x \to \infty.$$

Mais, lorsque $\lambda \leq 1$, l'on déduit que

$$y(x) = o(x^{-M}), \quad x \to \infty,$$

quelque grand que soit M.

Or, lorsque $\lambda < 1$, outre la solution triviale $y \equiv 0$, il n'existe pas de solution qui $\to 0$ avec $^1/_x$. Tandis que dans le cas $\lambda = 1$, c'est-à-dire lorsque l'équation différentielle est linéaire, la solution qui $\to 0$ avec $^1/_x$ est de l'ordre de grandeur de

$$\exp\left(-Ax^{\frac{2-\delta}{2}}\right).$$