PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 49 (63), 1991, 155–162

RELÈVEMENTS DANS LE FIBRÉ CONORMAL D'UN FEUILLETAGE D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Tong Van Duc

Abstract. The total space Q^* of the conormal bundle of a foliated manifold M is canonically equiped with a transversally orientable foliation whose Godbillon-Vey class is zero. When M is endowed with a riemannian metric, so is Q^*. We study the relations between Q^* and M equipped with these metrics. Specially, the lift of a Lie foliation is a Lie foliation.

Dans cet article, M désigne une variété paracompacte, connexe de dimension n, munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q défini par un atlas $\mathcal{A} = \{U, x^u, x^a\}$ ($u, v, \ldots = 1, \ldots, n-q$; $a, b, \ldots, = 1, \ldots, q$), les feuilles étant localement définies par $x^a = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$. Toutes les variétés et applications sont de classe C^∞. On adopte le vocabulaire suivant relatif au feuilletage $\mathcal{F}$. Une forme ω sur M est dite transverse si $i_X\omega = 0$ et ω est basique si $i_X\omega = i_X\, d\omega = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangents aux feuilles. Un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ est un champ de vecteurs X tel que Xf soit basique pour toute fonction basique sur M.

Soient $\eta = (Q, p, M)$ et $\eta^* = (Q^*, p^*, M)$ les fibrés normal et conormal du feuilletage $\mathcal{F}$. Si X est un champ de vecteurs sur M, on note $\overline{X} = \pi(X)$ où $\pi : TM \to \eta$ est la projection canonique. Soit $x \in M$ et $X \in T_xM$. Si on écrit : $X = X^u(\partial/\partial x^u) + X^a(\partial/\partial x^a)$ dans une carte locale adaptée (U, x^u, x^a), on a $\overline{X} = X^a(\partial/\partial x^a)$. X^a ne dépend que de $\overline{X}$ et on la note $z^a(\overline{X})$. On choisira (x^u, x^a, z^a) comme coordonnées locales dans l'ouvert $p^{-1}(U)$ de Q. De même un élément de Q^* peut s'écrire sous la forme $\omega = z_a\, dx^a$. On prendra (x^u, x^a, z_a) comme coordonnés locales dans l'ouvert $p^{-1}(U)$ de Q^* et on obtient ainsi sur Q^* un atlas dont les fonctions de transition sont de la forme :

$$x^{u'} = x^{u'}(x^u, x^a), \quad x^{a'} = x^{a'}(x^a), \quad z_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} z_a. \tag{1}$$

Ainsi, il existe sur Q^* un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ de codimension $2q$ dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de $\mathcal{F}$; les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont localement définie par $x^a = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$. On appellera $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé.

Classification A.M.S. : 53 C 12, 53 C 20

Mots-clés : Feuilletages, variétés riemanniennes

Sur la variété Q^*, il existe une 1-forme canonique θ [2] définie de la façon suivante:

$$\theta_\omega(A) = \omega(\overline{p_*^* A}) \qquad \forall\omega \in Q^* \text{ et } \forall A \in T_\omega Q^*.$$

θ a pour expression locale: $\theta = z_a\, dx^a$.

Soit $\Theta = -d\theta = dx^a \wedge dz_a$. Alors $\nu = (\Lambda\Theta)^q$ est une forme de volume transverse sur la variété Q^*. Comme ν est une $2q$-forme fermée, on en déduit le:

THÉORÈME 1. *Le feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ dans l'espace total du fibré conormal d'un feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement orientable dont la classe de Godbillon-Vey est nulle.*

On rappelle que si ν est une forme de volume transverse d'un feuilletage transversalement orientable, la classe de Godbillon-Vey est définie par $[\varphi \wedge (d\varphi)^q]$ où φ est une 1-forme telle que $d\nu = \varphi \wedge \nu$ [4].

Dans la suite, on suppose que M est munie d'une métrique riemannienne g. Soit E le fibré vectoriel des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$ et $E^\perp$ son orthogonal par rapport à g. Soient g_E et $g_{E^\perp}$ les métriques induites par g sur E et $E^\perp$.

Soit $\sigma = \pi^{-1}_{|E^\perp}$ l'isomorphisme de η sur $E^\perp$ et $g_\mu = \sigma^* g_{E^\perp}$. On identifiera (η, g_η) avec $(E^\perp, g_{E^\perp})$.

Il existe sur le fibré transverse η une connexion métrique définie de la façon suivante:

soit $s \in \eta$ et $z_s = \sigma(s)$. Alors:

$$(2) \qquad \nabla_X s = \pi([X, Z_s]) \quad \forall X \in \underline{E}, \qquad \nabla_X s = \pi(\nabla^M_X Z_s) \quad \forall X \in \underline{E}^\perp$$

où ∇^M désigne la connexion de Levi-Civita associée à g. La connexion ∇ est sans torsion et adaptée au feuilletage $\mathcal{F}$ i.e. la restriction de ∇ à E est égale à la connexion canonique de Bott.

On sait que ∇ détermine une scission à gauche Γ de la suite exacte [1]:

$$0 \longrightarrow VQ \longrightarrow TQ \longrightarrow \eta \times_M TM \longrightarrow 0.$$

Γ induit une scission à gauche Γ^* de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow VQ^* \longrightarrow TQ^* \longrightarrow \eta^* \times_M TM \longrightarrow 0$$

où VQ et VQ^* désignent les fibrés verticaux de η et η^*.

La métrique g induit une métrique g^* sur le fibré cotangent TM^* et soit g_{η^*} la restriction de g^* à η^*. (On identifie η^* avec le fibré des 1-formes transverses). Comme $VQ^* = \eta^* \times_M \eta^*$, la métrique g_{η^*} induit une métrique $\tilde{g}_{\eta^*}$ sur le fibré vertical VQ^*.

On obtient une métrique $\tilde{g}$ sur la variété Q^* en posant:

$$(3) \qquad \tilde{g}(A, B) = g(p_*^* A, p_*^* B) + \tilde{g}_{\eta^*}(\Gamma^* A, \Gamma^* B) \qquad \forall A, B \in TQ^*.$$

Soit $g = h_{ij}\,dx^i dx^j$ $(i,j,\ldots = 1,\ldots,n)$ l'expression locale de la métrique g dans une carte locale adaptée. Puisque la distribution E est définie par $dx^a = 0$, la distribution $E^\perp$ est déterminée par des formes θ^u qu'on peut choisir sous la forme :

$$\theta^u = dx^u + t^u_a\,dx^a.$$

Soit (X_u, X_a) la base duale de $(\theta^u, \theta^a = dx^a)$. On a :

$$X_u = \frac{\partial}{\partial x^u}, \qquad X_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - t^u_a \frac{\partial}{\partial x^u}.$$

(X_u, X_a) est un repère local adapté à la variété riemannienne feuilletée $(M, g, \widetilde{\mathcal{F}})$.

On en déduit que, puisque E et $E^\perp$ sont orthogonaux :

$$g = g_{uv}\theta^u\theta^v + g_{ab}\,dx^a dx^b \tag{4}$$

où $g_{uv} = h_{uv}$ et $g_{ab} = h_{ab} - h^{uv}h_{au}h_{bv}$, (h^{ij}) étant l'inverse de la matrice (h_{ij}) et que :

$$\Gamma = (dz^a + \Gamma^a_{bc}z^c\,dx^b) \otimes \frac{\partial}{\partial z^a}$$

où Γ^a_{bc} sont donnés par la formule :

$$\Gamma^d_{ab} = \frac{1}{2}g^{dc}(X_a g_{cb} + X_b g_{ca} - X_c g_{ab}). \tag{5}$$

D'où l'expression locale de Γ

$$\Gamma^* = (dz_a - \Gamma^c_{ba}z_c\,dx^b) \otimes \frac{\partial}{\partial z_a}.$$

D'autre part $g_{\eta^*} = g^{ab}(\bar\partial/\partial x^a)\cdot(\bar\partial/\partial x^b)$. Par suite :

$$\tilde g = g_{uv}\theta^u\theta^v + g_{ab}\,dx^a dx^b + g^{ab}(dz_a - \Gamma^c_{da}z_a\,dx^d)(dz_b - \Gamma^c_{db}z_c\,dx^d).$$

Si l'on pose $\theta_{a^*} = dz_a - \Gamma^c_{ba}z_c\,dx^b$, alors $(\theta^u, \theta^a, \theta_{a^*})$ forment un corepère local adapté à la variété riemannienne feuilletée $(Q^*, \widetilde{\mathcal{F}}, \tilde g)$. Soit (V_u, V_a, V^{a^*}) le repère local dual :

$$V_u = \frac{\partial}{\partial x^u}, \quad V_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - t^v_a\frac{\partial}{\partial x^v} + \Gamma^c_{ab}z_c\frac{\partial}{\partial z_b}, \quad V^{a^*} = \frac{\partial}{\partial z_a}.$$

L'expression locale de $\tilde g$ devient :

$$\tilde g = g_{uv}\theta^u\theta^v + g_{ab}\,dx^a dx^b + g^{ab}\theta_{a^*}\theta_{b^*}. \tag{6}$$

Soient $\widetilde{E}$ le fibré des vecteurs tangents aux feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{E}^\perp$ son orthogonal par rapport à $\tilde g$. On a : $\tilde g_{\widetilde E} = g_{uv}\theta^u\theta^v$ et $\tilde g_{\widetilde E^\perp} = g_{ab}\,dx^a dx^b + g^{ab}\theta_{a^*}\theta_{b^*}$.

Définition. Un feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien si son fibré normal η est muni d'une métrique g_η telle que $\nabla_X g_\eta = 0 \; \forall X \in \underline{E}$ où ∇ est la connexion partielle de Bott. On dit encore que g_η est invariant par holonomie, [8].

Définition. Une mérique g sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est dite quasi fibrée si la métrique induite g_η sur le fibré normal est invariante par holonomie.

Si l'on écrit g sous la forme (4), alors g est quasi-fibrée par rapport à $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^u} = 0. \tag{7}$$

Dans ce cas, la métrique $\tilde{g}$ est quasi-fibrée par rapport à $\widetilde{\mathcal{F}}$ d'après (5) et (6). On a ainsi démontré le :

THÉORÈME 2. *Le relèvement d'un feuilletage riemannien dans l'espace total de son fibré conormal est une feuilletage riemannien.*

On revient au cas d'une variété riemannienne feuilletée quelconque $(M, g, \mathcal{F})$.

On définit de façon formelle pour tout $z \in \underline{E}^\perp$, la dérivée de Lie $L_Z g_E$ de g_E : $L_Z g_E(X, X') = Z g_E(X, X') - g_E(\pi^\perp([Z, X]), X') - g_E(X, \pi^\perp([Z, X']))$ $\forall X, X' \in \underline{E}$, $\pi^\perp$ étant la projection orthogonale de TM sur E.

On en déduit que [8] :

$$L_Z g_E(X, X') = -2g(\nabla^M_X X', Z). \tag{8}$$

Définition. Un feuilletage sur une variété différentiable munie d'une connexion est totalement géodésiques si chaque feuille du feuilletage est une sous-variété totalement géodésique.

Dans le cas d'une variété riemannienne feuilletée, $\mathcal{F}$ est totalement géodésique si $L_Z g_E = 0 \;\; \forall Z \in \underline{E}^\perp$ d'après (8) car la connexion riemannienne ∇^M est sans torsion.

On a :

$$L_{X_a} g_E(X_u, X_v) = X_a g_{uv} - \frac{\partial t_a^w}{\partial x^u} g_{wv} - \frac{\partial t_a^w}{\partial x^v} g_{uw}$$

$$L_{V_a} \tilde{g}_{\tilde{E}}(V_u, V_v) = V_a g_{uv} - \frac{\partial t_a^w}{\partial x^u} g_{wv} - \frac{\partial t_a^w}{\partial x^v} g_{uw} = L_{X_a} g_E(X_u, X_v) \circ p^*$$

$$L_{V^{a*}} \tilde{g}_{\tilde{E}}(V_u, V_v) = 0.$$

On en déduit le :

THÉORÈME 3. *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne feuilletée et soit $(Q^*, \tilde{g}, \widetilde{\mathcal{F}})$ la variété riemannienne feuilletée correspondante sur l'espace total du fibré conormal de $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est totalement géodésique si et seulement si il en est de même de $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Définition. La deuxiéme forme fondamentale d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété riemannienne (M,g) est une 2-forme α sur E à valeurs dans le fibré normal η définie par :

$$\alpha(X,X') = \pi(\nabla_X^M X') \qquad \forall X, X' \in \underline{E}. \tag{9}$$

Puisque la connexion ∇^M est sans torsion, α est symétrique et le feuilletage $\mathcal{F}$ est totalement géodésique si et seulement si $\alpha = 0$.

A α est associé le morphisime de Weingarten $W(Z) : E \to E$ défini pour tout $Z \in \underline{E}^\perp$ par :

$$g_E(W(Z)X, X') = g_\eta(\alpha(X,X'), Z) \qquad \forall X, X' \in \underline{E}.$$

Comme $g_\eta(\alpha(X,X'),Z) = g(\nabla_X^M X', Z) = -g(X', \nabla_X^M Z)$, on a :

$$(W(Z))(X) = -\pi^\perp(\nabla_X^M Z).$$

Définition. La courbure moyenne d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété riemannienne (M,g) est une 1-forme K sur M telle que :

$$\begin{aligned} &K(Z) = \operatorname{trace}(W(Z)) && \text{si } Z \in \underline{E}^\perp \\ &K(Z) = 0 && \text{si } Z \in \underline{E}. \end{aligned}$$

Soit (E_u) un repère local orthonormé de (E, g_E). Alors :

$$K(Z) = \sum_{u=1}^{n-q} g_\eta(\alpha(E_u, E_u), Z).$$

Définition. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété riemannienne (M,g) est harmonique si $K = 0$.

Alors les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés minimales de (M,g) [8].

Si l'on pose $\alpha(X_u, X_v) = \alpha_{uv}^c X_c$, on obtient :

$$\alpha_{uv}^b = \frac{1}{2} g^{ba}\left(-X_a g_{uv} + \frac{\partial t_a^w}{\partial x^u} g_{wv} + \frac{\partial t_a^w}{\partial x^v} g_{wu}\right)$$

car $X_a g_{uv} = -g(\alpha(X_u, X_v), X_a) + g([X_a, X_u], X_v) + g(X_u, [X_a, X_v])$.

Si l'on pose $(W(X_a))(X_u) = W_{au}^v X_v$, on trouve :

$$W_{au}^w = \frac{1}{2} g^{wv}\left(-X_a g_{uv} + \frac{\partial t_a^{v'}}{\partial x^u} g_{v'v} + \frac{\partial t_a^{v'}}{\partial x^v} g_{uv'}\right), \quad K(X_a) = -\frac{1}{2} g^{uv} X_a g_{uv} + \frac{\partial t_a^w}{\partial x^w}.$$

De même, si l'on désigne par $\tilde{\alpha}$ la deuxiéme forme fondamentale de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et si l'on pose : $\tilde{\alpha}(V_u, V_v) = \tilde{\alpha}_{uv}^a V_a + \tilde{\alpha}_{uva*} V^{a*}$, il vient :

$$\tilde{\alpha}_{uv}^b = \frac{1}{2} g^{ba}\left(-V_a g_{uv} + \frac{\partial t_a^w}{\partial x^u} g_{wv} + \frac{\partial t_a^w}{\partial x^v} g_{wu}\right), \qquad \tilde{\alpha}_{uvb*} = 0.$$

Comme $\tilde{\alpha}^b_{uv} = \alpha_{uv} \circ p^*$, on retrouve le théorème 3. Si l'on pose :

$$(\widetilde{W}(V_a))(V_u) = \widetilde{W}^v_{au} V_v, \qquad (\widetilde{W}(V^{a*}))(V_u) = \widetilde{W}^{a*v}_u V_v$$

où $\widetilde{W}$ est le morphisme de Weingarten associé à $\tilde{\alpha}$, on obtient :

$$\widetilde{W}^w_{au} = \frac{1}{2} g^{wv} \left(-V_a g_{uv} + \frac{\partial t^{v'}_a}{\partial x^u} g_{v'v} + \frac{\partial t^{v'}_a}{\partial x^v} g_{uv'} \right), \qquad \widetilde{W}^{a*w}_u = 0.$$

Soit $\widetilde{K}$ la forme de courbure moyenne de $\widetilde{\mathcal{F}}$ alors :

$$\widetilde{K}(V_a) = -\frac{1}{2} g^{uv} \left(V_a g_{uv} + \frac{\partial t^w_a}{\partial x^w} \right) \qquad \widetilde{K}(V^{a*}) = 0.$$

Commme $\widetilde{K}(V_a) = K(X_a) \circ p^*$, on a démontré le :

THÉORÈME 4. *Le feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ est harmonique si et seulement si il en est de même du feuilletage $\mathcal{F}$.*

Sur la variété Q^* il existe un feuilletage canonique dont les feuilles sont les fibres du fibré vertical VQ^*. Soit $\bar{\alpha}$ la deuxiéme forme fondamentale de ce feuilletage par rapport à $\tilde{g}$.

Si l'on pose : $\bar{\alpha}(V^{a*}, V^{b*}) = \bar{\alpha}^{a*b*u} V_u + \bar{\alpha}^{a*b*c} V_c$, alors :

$$\bar{\alpha}^{a*b*v} = -\frac{1}{2} g^{vu} (V_u g^{ab}), \qquad \bar{\alpha}^{a*b*f} = -\frac{1}{2} g^{ae} g^{bc} g^{fd} (V_d g_{ec} - X_d g_{ec}) = 0.$$

Il en résulte que :

$$\overline{K}(V_u) = -\frac{1}{2} g_{ab} (V_u g^{ab}), \qquad \overline{K}(V_a) = 0.$$

Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien, alors $\overline{K}(V_u) = 0$; d' où le :

THÉORÈME 5. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien, le feuilletage défini par les fibres du fibré vertical du fibré conormal est totalement géodésique.*

Par ailleurs, puisque l'application $p^* : Q^* \to M$ est transverse à $\mathcal{F}$, il existe sur la variété Q^* un autre feuilletage de codimension q : c'est l'image réciproque $\widehat{\mathcal{F}} = (p^*)^{-1}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par p^*. Localement, les feuilles de $\widehat{\mathcal{F}}$ sont définies par $x^a = c^{te}$ et le corepère local $(\theta^u, \theta^a, \theta_{a*})$ est adapté à la variété riemannienne feuilletée $(Q^*, \tilde{g}, \widehat{\mathcal{F}})$ et on a :

$$\tilde{g}_{\hat{E}^\perp} = g_{ab}\, dx^a dx^b$$

où $\widehat{E}$ est le fibré des vecteurs tangents aux feuilles de $\widehat{\mathcal{F}}$.

Puisque $\partial g_{ab}/\partial z_c = 0$, le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$ est riemannien si et seulement si $\mathcal{F}$ l'est.

Soient $\hat{\alpha}$ et $\widehat{K}$ la deuxième forme fondamentale et la forme de courbure moyenne de $\widehat{\mathcal{F}}$. Si l'on pose :

$$\hat{\alpha}(V_u, V_v) = \hat{\alpha}^a_{uv} V_a, \quad \hat{\alpha}(V_u, V^{a*}) = \hat{\alpha}^{a*b}_u V_v, \quad \hat{\alpha}(V^{a*}, V^{b*}) = \hat{\alpha}^{a*b*c} V_c,$$

on trouve:

$$\hat{\alpha}^{b}_{uv} = \frac{1}{2} g^{ba}\left(-V_a g_{uv} + \frac{\partial t^w_a}{\partial x^u} g_{wv} + \frac{\partial t^w_a}{\partial x^v} g_{ww}\right)$$

$$\hat{\alpha}^{a*b}_{u} = -\frac{1}{2} g^{bd} \frac{\partial \Gamma^e_{dc}}{\partial x^u} z_e g^{ca}$$

$$\hat{\alpha}^{a*b*c} = 0.$$

Par suite: $\widehat{K}(V_a) = K(X_a) \circ p^*$.

THÉORÈME 6. *L'image réciproque du feuilletage $\mathcal{F}$ par la projection p^* est harmonique (resp. riemannien) si et seulement si il en est ainsi de $\mathcal{F}$.*

On suppose maintenant que le feuilletage $\mathcal{F}$ est feuilletage de Lie déterminé par une 1-forme ω à valeurs danas une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension q. ω doit satisfaire aux conditions suivantes:

1) $d\omega + (1/2)[\omega, \omega] = 0$,

2) $\forall x \in M$, $\omega_x : T_x M \to \mathfrak{g}$ est surjective et $E_x = \operatorname{Ker} \omega_x$.

Soit $\overline{\omega}$ l'application de Q dans $\mathfrak{g}$ induite par ω. On a: $\omega = \overline{\omega} \circ \pi$. Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\mathfrak{g}$. Si l'on pose $\omega = \omega^a e_a$, les formes ω^a sont basiques car $i_X \omega = i_X d\omega = 0$ $\forall X \in \underline{E}$. $(\overline{\omega}^1, \dots, \overline{\omega}^a)$ est un repère de Q^*. Si l'on pose $\omega^a = X^a_b \, dx^b$, alors X^a_b sont des fonctions qui ne dépendent que des x^a.

Soit $(s_1, \dots, s_q)$ le repère de Q, dual de $(\overline{\omega}^1, \dots, \overline{\omega}^q)$. Alors $s_a = Y^b_a(\overline{\partial}/\partial x^b)$ où (Y^b_a) est l'inverse de la matrice (X^a_b). Soit Y_a un champ de vecteurs sur M tel que $\overline{Y}_a = s_a$. Y_a est un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$. Dans une carte locale adaptée, Y_a a pour expression locale:

$$Y_a = Y^u_a(x^v, x^c)\frac{\partial}{\partial x^u} + Y^b_a(x^c)\frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Soit φ_{at} le groupe local à un paramétre engendré par Y_a. Comme chaque φ_{at} est un automorphisme du feuilletage $\mathcal{F}$, $(\varphi_{at})_*$ induit un automorphisme $\overline{\varphi}_{at*}$ de Q et ${}^t(\overline{\varphi_{at*}})^{-1}$ est un automorphisme de Q^*. Soit $\widetilde{Y}_a$ le champ de vecteurs sur Q^* associé au groupe local à un paramètre $({}^t(\overline{(\varphi_{at})_*})^{-1})$. $\widetilde{Y}_a$ a pour expression locale:

$$\widetilde{Y}_a = Y^u_a \frac{\partial}{\partial x^u} + Y^b_a \frac{\partial}{\partial x^b} - \frac{\partial Y^b_a}{\partial x^c} z_b \frac{\partial}{\partial z_c}.$$

On remarque que $\overline{\widetilde{Y}}_a$ ne dépend que de s_a. On désignera $\overline{\widetilde{Y}}_a$ par $\tilde{s}_a$ de telle sorte que:

$$\tilde{s}_a = Y^b_a \frac{\overline{\partial}}{\partial x^b} - \frac{\partial Y^b_a}{\partial x^c} z_b \frac{\overline{\partial}}{\partial z_b}.$$

On peut définir le crochet de s_a et s_b par: $[s_a, s_b] = \overline{[Y_a, Y_b]}$.

D'autre part, puisque $VQ^* = \eta^* \times_M \eta^*$, les sections $\overline{\omega}^a$ de Q^* induisent des champs de vecteurs verticaux $(\overline{\omega}^a)^v$ sur la variété Q^*

$$(\overline{\omega^a})^v = X^a_b \frac{\partial}{\partial z_b}.$$

De plus, $L_{Y_a}\omega^b = (Y_a^d(\partial X_c^b/\partial x^d) + X_d^b(\partial Y_a^d/\partial x^c))$ ne dépend que de s_a et $\overline{\omega}^b$. On notera $s_a \cdot \overline{\omega}^b$ cette forme.

On a les égalités suivantes entre $\tilde{s}_a$ et $\overline{(\overline{\omega}^a)^v}$:

$$[\tilde{s}_a, \tilde{s}_a] = [\widetilde{s_a, s_b}], \qquad [\tilde{s}_a, \overline{(\overline{\omega}^b)^v}] = \overline{(s_a \cdot \overline{\omega}^b)}^v. \tag{10}$$

Soit $\tilde{g}$ l'algèbre de Lie de dimenison $2q$ engenderé par $\tilde{s}_a$ et $\overline{(\overline{\omega}^b)^v}$ vérifiant (10).

Soit $A \in T_\psi Q^*$ où $\psi \in Q^*$. Alors $\overline{A}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$\overline{A} = A^a \tilde{s}_{a\psi} + A_{b*}(\overline{\omega}^b)^v_\psi.$$

Si l'on pose :

$$\Omega(A) = A^a \tilde{s}_a + A_{b*}(\overline{\omega}^b)^v.$$

alors Ω est une 1-forme surjective sur Q^* à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\operatorname{Ker}\Omega = \widetilde{E}$. De plus $d\Omega + [\Omega, \Omega]/2 = 0$. Il suffit de vérifier cette formule sur des automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}$ puisque l'algèbre de Lie de ces automorphismes infinitésimaux est transitive sur Q^*. Par linéarité, il suffit de vérifier cette formule sur deux automorphismes infinitésimaux A et B tels que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ appartiennent à $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors $\Omega(A) = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, $\Omega(B) = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ et

$$(d\Omega + [\Omega, \Omega]/2)(A, B) = -\Omega([A, B]) + [\Omega(A), \Omega(B)] = -[\overline{A, B}] + [\overline{A}, \overline{B}] = 0.$$

THÉORÈME 7. *Le relèvement d'un feuilletage de Lie dans l'espace total de son fibré conormal est un feuilletage de Lie.*

RÉFÉRENCES

[1] T. V. Duc, *Sur la géométrie différentielle des fibriés vectoriels*, Kodai Math. Sem. Report. **26** (1975), 349–368.

[2] T. V. Duc, *Forme canonique sur le dual du fibré transverse*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **7** (1985), 169–177.

[3] T. V. Duc, *Une caractérisation du fibré cotangent*, Bull. Austr. Math. Soc. **38** (1988), 465–472.

[4] C. Godbillon et J. Vey, *Un invariant des feuilletages de codimension un*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **273** (1971), 92–95.

[5] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. I et Vol. II*, Interscience, New-York, 1963 et 1969.

[6] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Math. 73 (1988),

[7] Ph. Tondeur, *Structure presque-kählérienne naturelle sur le fibré des vecteurs covariants d'une variété riemannienne*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **254** (1962), 407–408.

[8] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1988.

Université de Grenoble I
Institut Fourier, B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

(Reçu le 05 11 1990)