PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 49 (63), 1991, 83–91

UNE FORMULE ASYMPTOTIQUE POUR UNE CLASSE DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES

A. Smati

Résumé. On étudie la distribution des valeurs de fonctions multiplicatives suivant le point de vue de Erdős-Bateman-Dressler. Ces fonctions appartienent à une classe S contenant la fonction φ d'Euler et la fonction σ somme des diviseurs. L'approche est élémentaire, c'est une adaptation de la méthode utilisée par Balazard et l'auteur dans un récent article sur la fonction d'Euler. On obtient un résultat général avec une précison égale à celle obtenue par Bateman-Balazard et l'auteur dans le cas particulier de φ, améliorant ainsi un théorème de Ivić.

1. Introduction et présentation des résultats

Classe S de fonctions multiplicatives. *Définition.* Une fonction multiplicative f appartient à la classe S si

1° pour tout entier $k \geq 1$, il existe des nombres $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{kk}$ tels que pour tout nombre premier p

$$f(p^k) = p^k + a_{1k}p^{k-1} + \dots + a_{k-1\,k}p + a_{kk}$$

où $-1 \leq a_{ik} \leq B$ pour tout $i = 1, 2, \dots, k$ et pour tout k. B étant une constante non-négative.

2° il existe une constante $H \geq 0$ telle que $f(n) \gg n(\log\log n)^{-H}$.

Exemples de fonctions appartenant à S. 1° La fonction φ d'Euler: $\varphi(n) = \#\{m \leq n : (m, n) = 1\}$.

(a) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, (b) $\varphi(n) \gg n(\log\log n)^{-1}$.

2° La fonction $\sigma(n)$ somme des diviseurs de l'entier n: $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$;

(a) $\sigma(p^k) = p^k + p^{k-1} + \dots + p + 1$, (b) $\sigma(n) \gg n$.

3° La fonction $\Psi(n)$ de Dedekind: $\Psi(n) = n\prod_{p|n}(1 + 1/p)$.

(a) $\Psi(p^k) = p^k + p^{k-1}$, (b) $\Psi(n) \gg n$.

AMS Subject Classification (1985): Primary 10 H 25

4° L'analogue unitaire de φ:

$$\varphi^*(n) = n \sum_{d|n,\,(d,n/d)=1} \frac{(-1)^{\omega(d)}}{d},$$

où $\omega(d)$ est le nombre de facteurs premiers de d.

(a) $\varphi^*(p^k) = p^k - 1$, (b) $\varphi^*(n) \gg n(\log\log n)^{-1}$.

5° L'analogue unitaire de σ:

$$\sigma^*(n) = \sum_{d|n,\,(n,d|n)=1} d.$$

(a) $\sigma^*(p^k) = p^k + 1$, (b) $\sigma^*(n) \gg n$.

Propriétés. Soit f une fonction de S. On a

(i) f est strictement positive.

(ii) f est à valeurs entières si les nombres a_{ik} sont entiers.

(iii) La série $\sum_{k=1}^{\infty}(f(2^k))^{-1}$ est convergente.

(iv) f vérifie l'identité:

$$f(n) = n \prod_{p^k \| n} \left(1 + \frac{a_{1k}}{p} + \frac{a_{2k}}{p^2} + \cdots + \frac{a_{kk}}{p^k}\right).$$

Objet de l'article. Soit f une fonction de S. On étudie dans cet article la distribution des valeurs de f selon le point de vue de Erdős-Bateman-Dressler; c'est-à-dire, on étudie le comportement asymptotique de la quantité $N_f(x) = \#\{n : f(n) \leq x\} = \sum_{f(n)\leq x} 1$. Erdős et Turán furent les premiers à étudier N_φ obtenant

$$N_\varphi(x) \sim Ax \qquad (x \to +\infty) \tag{1}$$

sans donner la valeur explicite de la constante A. Ensuite Dressler [3], [4] et Bateman [2] ont étudié N_φ et N_σ. Le premier a retrouvé (1) par une méthode élémentaire (contrairement à la méthode d'Erdős-Turán) en donnant la valeur $\zeta(2)\zeta(3)/(\zeta(6))$ de A; et a obtenu par la même méthode élémentaire un résultat analogue pour σ. Quant au deuxième il a obtenu, en utilisant différentes techniques analytiques dont l'intégration dans le plan complexe, la précision suivante:

$$N_\varphi(x) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O_\varepsilon\left(x \exp\left(-(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\log x \log\log x\right)^{1/2}\right)\right) \tag{2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi qu'un résultat analogue pour σ. Nicolas [8] et l'auteur [9] ont étudié une méthode élementaire fournissant la précision suivante au résultat de Dressler sur φ: $O(x/\log^2 x)$.

Enfin, récemment Balazard et l'auteur [1] ont démontré par une méthode différente mais élémentaire, le résultat (2); ce résultat est remarquable, car les méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres ne fournissent que rarement des résultats aussi précis que ceux fournis par l'analyse.

La méthode est simple, il s'agit de considérer l'identité vérifiée par φ.

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et définir la fonction tronquée:

$$\varphi_y(n) = n \prod_{p|n,\, p\leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

puis ramener l'étude $N_\varphi(x)$ à celle de $N_{\varphi_y}(x)$. Mais l'étude de $N_{\varphi_y}(x)$ nécessite un résultat du crible de Brun.

Le seul résultat connu pour $N_f(x)$ où f est une fonction quelconque de S, est celui de Ivić [7], obtenu par une méthode utilisant des résultats de la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling. Le théorème de Ivić est le suivant:

THÉORÈME. *Soit f une fonction de S. On a*

$$N_f(x) = \sum_{f(n)\leq x} 1 = A(f)x + O_\varepsilon\big(x \exp(-(\log x)^{3/8-\varepsilon})\big)$$

où ε est un nombre positif arbitraire et

$$A(f) = \lim_{s\to 1^+} (s-1)H(s) \quad \textit{avec} \quad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(n))^{-s}.$$

Dans cet article on adapte la méthode élémentaire décrite brièvement précédemment dans le cas de φ, pour démontrer le théorème suivant améliorant celui ci-dessus.

THÉORÈME. *Soit f une fonction appartenant à la classe S. Il existe une constante dépendant de f*

$$A(f) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{(k-1)k}p + a_{kk})^{-1}\right)$$

telle que

$$N_f(x) = \sum_{f(n)\leq x} 1 = A(f)x + O_{c,B}\big(x \exp(-c(\log x \log\log x)^{1/2})\big)$$

où $c < 1/\sqrt{2}$ est une constante arbitraire.

On obtient les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1 (Bateman 1972; Balazard-Smati 1989).

$$N_\varphi(x) = \sum_{\varphi(n)\le x} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O_c\big(x\exp(-c(\log x\log\log x)^{1/2})\big).$$

COROLLAIRE 2 (Bateman 1972).

$$N_\sigma(x) = \sum_{\sigma(n)\le x} 1 = A(\sigma)x + O_c\big(x\exp(-c(\log x\log\log x)^{1/2})\big)$$

où

$$A(\sigma) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p^2+p+1}+\frac{1}{p^3+p^2+p+1}+\cdots\right).$$

2. Lemmes préliminaires.

Soit f une fonction appartenant à la classe S. Considérons la fonction

$$f(n,y) = n\prod_{p^k\|n,\,p\le y}\left(1+\frac{a_{1k}}{p}+\frac{a_{2k}}{p^2}+\cdots+\frac{a_{kk}}{p^k}\right)$$

où $2\le y\le x$ des nombres réels. Notons $N_f(x,y) = \#\{n : f(n,y)\le x\} = \sum_{f(n,y)\le x} 1$.

LEMME 1. *Soit x un nombre réel suffisamment grand. Si $y > 4\log x$ alors*

$$N_f\left(xe^{-6B(\log x)/(y-1)}, y\right) \le N_f(x) \le N_f\left(x\left(1-\frac{3\log x}{y-1}\right)^{-1}, y\right).$$

Démonstration. On a, pour $y\ge 3$

$$f(n) = n\prod_{p^k\|n}\left(1+\frac{a_{1k}}{p}+\cdots+\frac{a_{kk}}{p^k}\right) = f(n,y)\prod_{p^k\|n,\,p>y}\left(1+\frac{a_{1k}}{p}+\cdots+\frac{a_{kk}}{p^k}\right).$$

Posons

$$\Pi(n,y) := \prod_{p^k\|n,\,p>y}\left(1+\frac{a_{1k}}{p}+\cdots+\frac{a_{kk}}{p^k}\right).$$

Alors on a, d'une part,

$$\begin{aligned}\Pi(n,y) &\ge \prod_{p^k\|n,\,p>y}\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\cdots-\frac{1}{p^k}\right) = \prod_{p^k\|n,\,p>y}\left(1-\frac{p^k-1}{p^k(p-1)}\right)\\ &\ge \prod_{p|n,\,p>y}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) \ge \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{y-1}\right) = \left(1-\frac{1}{y-1}\right)^{\omega(n)}\end{aligned}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{y-1}\right)^{2\log n} \geq 1 - \frac{2\log n}{y-1}.$$

Comme $f \in S$ on a $f(n) \gg n(\log\log n)^{-H}$, $H \geq 0$. Cela implique que si $f(n) \leq x$ alors $n \ll x(\log\log x)^{H}$. Donc pour x assez grand, $\Pi(n,y) \geq 1 - (3\log x)/(y-1)$ et donc si $f \in S$ et $f(n) \leq x$ alors $f(n) \geq f(n,y)\big(1-(3\log x)/(y-1)\big)$. D'où l'on a

$$N_f(x) \leq N_f\left(x\left(1 - \frac{3\log x}{y-1}\right)^{-1}, y\right).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\Pi(n,y) &\leq \prod_{p^k \| n,\, p>y}\left(1+\frac{B}{p}+\cdots+\frac{B}{p^k}\right) \leq \prod_{p^k\|n,\, p>y}\left(1+B\frac{p^k-1}{p^k(p-1)}\right)\\ &\leq \prod_{p|n,\, p>y}\left(1+\frac{B}{p-1}\right) \leq \prod_{p|n}\left(1+\frac{B}{y-1}\right) = \left(1+\frac{B}{y-1}\right)^{\omega(n)}\\ &\leq \left(1+\frac{B}{y-1}\right)^{2\log n} \leq \exp\left(2\log n\log\left(1+\frac{B}{y-1}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{2B\log n}{y-1}\right).\end{aligned}$$

D'où $f(n) \leq f(n,y)\exp\big((2B\log n)/(y-1)\big)$. Maintenant supposons $y-1 > 4B$ et $f(n,y) \leq x exp\big(-6B(\log x)/(y-1)\big)$. On a $n(\log\log n)^{-H} \ll f(n) \leq f(n,y)\sqrt{n} \leq x\sqrt{n}$ donc $\sqrt{n}(\log\log n)^{-H} \ll x$ et $\log n \leq 3\log x$ si x est assez grand, d'où

$$f(n) \leq f(n,y)\exp\left(\frac{2B\log n}{y-1}\right) \leq x\exp\left(\frac{-6B(\log x)}{y-1}\right)\cdot\exp\left(\frac{6B(\log x)}{y-1}\right) = x.$$

Ainsi, si $y-1 > 4B$ et $x \geq x_0(f)$, on a

$$N_f\big(x\exp(-6B(\log x)/(y-1)), y\big) \leq N_f(x).$$

LEMME 2. *Soient $f \in S$, $P_+(n)$ le plus grand facteur premier de n, y et K des nombres réels tels que $y \geq 3$ et $0 \leq K \leq (\log y)/3$. Posons $\sigma = 1 - K/(\log y)$. On a*

$$\sum_{n,\, P_+(n)\leq y} (f(n))^{-\sigma} \ll (\log y)\exp\big(O(e^K)\big).$$

Démonstration. Ce lemme est une généralisation à $f \in S$ du lemme 2 de [1]. Les principes de la démonstration sont les mêmes, on en donnera ici les grandes lignes.

D'aprés le théorème du développement eulérien, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n,\, P_+(n)\leq y}(f(n))^{-\sigma} &= \prod_{p\leq y}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k + a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk})^{-\sigma}\right)\\ &= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(f(2^k))^{-\sigma}\right)\prod_{2<p\leq y}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk})^{-\sigma}\right).\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{k=1}^{\infty}(f(2^k))^{-\sigma}$ est convergente, car $(f(2^k)^{-\sigma} \ll (\log k)^{\sigma H}/2^{k\sigma}$ et $\sigma > 2/3$. On obtient alors

$$\sum_{n,\, P_+(n)\leq y} (f(n))^{-\sigma} \ll \prod_{2<p\leq y}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk})^{-\sigma}\right) =: \Pi^*.$$

Comme $p^k+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk} \geq p^k-p^{k-1}-\cdots-p-1 \geq p^k(p-2)/(p-1)$ alors

$$\begin{aligned}\Pi^* &\leq \prod_{2<p\leq y}\left(1+\frac{(p-1)^\sigma}{(p-2)^\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^{k\sigma}}\right)\\ &= \prod_{2<p\leq y}\left(1+\frac{(p-1)^\sigma}{p^\sigma(p-2)^\sigma}-\frac{1}{p^\sigma}\right)\prod_{2<p\leq y}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}+\frac{1}{p^{2\sigma}}+\cdots\right).\end{aligned}$$

En passant au logarithme et en utilisant l'inégalité $\log(1+X) \leq X$ on obtient, pour y assez grand

$$\sum_{n,\, P_+(n)\leq y} (f(n))^{-\sigma} \ll \exp\left(\sum_{p\leq y}\frac{1}{p^\sigma}\right).$$

On conclut alors en remarquant que si K est entier:

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq y} p^{-\sigma} &= \sum_{p\leq y} p^{-1} + \sum_{j=1}^{K}\sum_{p\leq y} p^{-1}\left(p^{j/(\log y)} - p^{(j-1)/(\log y)}\right)\\ &\leq \sum_{p\leq y} p^{-1} + \sum_{j=1}^{K} e^j(\log y)^{-1}\sum_{p\leq y} p^{-1}\log p\\ &\leq \log\log y + O(e^K).\end{aligned}$$

Le cas où K est réel s'ensuit immédiatement.

LEMME 3. *Soient x, y, u des nombres réels tels que $x \geq y \geq 3$ et $u = (\log x)/(\log y)$. Supposons que $y^{1/3} \geq u$. Alors on a*

$$\sum_{f(n)\leq x,\, P_+(n)\leq y} 1 \ll x\log y \exp\big(-u\log u + O(u)\big),$$

où $P_+(n)$ est le plus grand facteur premier de n et $f \in S$.

Démonstration. Pour tout $\sigma > 0$ on a

$$\sum_{f(n)\leq x,\, P_+(n)\leq y} 1 \leq \sum_{n,\, P_+(n)\leq y}\left(\frac{x}{f(n)}\right)^\sigma = x^\sigma \sum_{n,\, P_+(n)\leq y} (f(n))^{-\sigma}.$$

On applique alors le Lemme 2 avec $K = \log u$.

LEMME 4 ([6, pages 82–83]). *Soient x, y, u des nombres réels tels que $x \geq y \geq 3$ et $u = (\log x)/(\log y)$. Si $\log y > \sqrt{\log x}$ alors*

$$\sum_{n\leq x,\, P_-(n)>y} 1 = x\prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+O_\varepsilon\big(\exp(-(1-\varepsilon)u\log u)\big)\Big),$$

où $P_-(n)$ est le plus petit facteur premier de n et $\varepsilon > 0$ arbitraire.

LEMME 5. *Soit $f \in S$, $f(p^k) = p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k}p + a_{kk}$. On a*

$$\prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k}p + a_{kk})^{-1}\Big) = A(f) + O\Big(\frac{1}{y}\Big),$$

où $$A(f) = \prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k}p + a_{kk})^{-1}\Big).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que le produit infini $A(f)$ est convergent. En effet

$$\begin{aligned}
&\prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}(p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk})^{-1}\Big)\\
&= \prod_{p}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\{(p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk})^{-1}\\
&-(p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p)^{-1}\}\Big).
\end{aligned}$$

Considérons la série $S(p) =: \sum_{k=1}^{\infty}\{(p^k+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk})^{-1}-(p^k+a_{1\,k-1}p^{k-1}+\cdots+a_{k-1\,k-1}p)^{-1}\}$. En posant $\alpha := p^k+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk}$ et $\beta := p^k+a_{1\,k-1}p^{k-1}+\cdots+a_{k-1\,k-1}p$ on a

$$\begin{aligned}
|S(p)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_\alpha^\beta v^{-2}\,dv\Big|\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}|p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p - p^k - a_{1k}p^{k-1} - \cdots - a_{kk}|\times\\
&\times \max\{(p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p)^{-2}; (p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk})^{-2}\}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&|p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p - p^k - a_{1k}p^{k-1} - \cdots - a_{kk}|\\
&= |(a_{1\,k-1} - a_{1k})p^{k-1} + \cdots + (a_{k-1\,k-1} - a_{k-1\,k})p - a_{kk}|\\
&\leq (B+1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1) \leq (B+1)p^k/(p-1).
\end{aligned}$$

Pour $p > 2$, on a

$$p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk} \geq p^k - p^{k-1} - \cdots - p - 1 = \big(p^k(p-2)+1\big)/(p-1)$$
$$\geq \big(p^k(p-2)\big)/(p-1),$$

et

$$\begin{aligned} &p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p \\ &\geq p^k - p^{k-1} - \cdots - p \geq p^k - p(p^{k-2} + \cdots + p + 1) \\ &= p\big(p^{k-1} - (p^{k-2} + \cdots + p + 1)\big) \geq \big(p^k(p-2)\big)/(p-1). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\max\big\{(p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-1\,k-1}p)^{-2}; (p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk})^{-2}\big\} \\ &\leq \big((p-1)/(p-2)\big)^2 \cdot p^{-2k}. \end{aligned}$$

Donc pour $p > 2$

$$|S(p)| \leq \frac{(B+1)(p-1)}{(p-2)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{B+1}{(p-2)^2}.$$

Il reste à monter que pour $y > 2$

$$\begin{aligned} \prod_{p>y}\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\{&(p^k + a_{1k}p^{k-1} + \cdots + a_{kk})^{-1} \\ &-(p^k + a_{1\,k-1}p^{k-1} + \cdots + a_{k-2\,k-1}p^2 + a_{k-1\,k-1}p)^{-1}\}\Bigg) = 1 + O\Big(\frac{1}{y}\Big). \end{aligned}$$

Pour y assez grand, $|S(p)| < 1$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \log\prod_{p>y}(1+S(p)) &= \sum_{p>y}\log(1+S(p)) = \sum_{p>y}O(S(p)) = \sum_{p>y}O\Big(\frac{B+1}{p^2}\Big) \\ &= O\Big((B+1)\sum_{p>y}\frac{1}{p^2}\Big) = O\Big(\frac{1}{y}\Big). \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que $\prod_{p>y}(1+S(p)) = \exp\big(O(1/y)\big) = 1 + O(1/y)$.

3. Estimation de $N_f(x,y)$; $f \in S$

PROPOSITION. *Soient x, y, u des nombres réels tels que $x \geq y \geq \exp\big(\sqrt{\log x}\big)$ et $u = (\log x)/(\log y)$. On a, pour x suffisamment grand et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$N_f(x,y) = x\prod_{p\le y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}(pk+a_{1k}p^{k-1}+\cdots+a_{kk})^{-1}\Big)$$
$$+\,O_\varepsilon\big(x\log y\exp(-(1-\varepsilon)u\log u)\big).$$

Démonstration. Ecrivons pour tout entier positif n: $n = n_1\cdot n_2$ avec $P_+(n_1)\le y$ et $P_-(n_2) > y$. On a alors $f(n,y) = f(n_1)\cdot n_2$. Suivant que $n_2 = 1$ ou $n_2 > y$ on a

$$N_f(x,y) = \sum_{f(n,y)\le x} 1 = \sum_{f(n_1)\le x/y}\ \sum_{1\le n_2<x/f(n_1)} 1 + O\Big(\sum_{f(n_1)\le x} 1\Big).$$

La proposition s'en déduit alors de la même façon que le lemme 5 de [1] dans le cas de φ en appliquant les lemmes 2, 3 et 4.

4. Démonstration du théorème

En posant $y = \exp\big(((1/2)\log x\log\log x)^{1/2}\big)$, le théorème s'en déduit par application des lemmes 1 et 5 et de la proposition.

Je remercie vivement Aleksandar Ivić d'avoir attiré mon attention sur le sujet de la présente étude, et Michel Balazard pour d'utiles remarques.

RÉFÉRENCES

[1] M. Balazard, A. Smati, *Elementary proof of a theorem of Bateman*, in: Berndt et al. (eds.), *Proceedings of a Bateman's Conference in Analytic Number Theory*, Birkhäuser, 1990.

[2] P.T. Bateman, *The distribution of values of Euler's function*, Acta Arith. **21** (1972), 329–345.

[3] R.E. Dressler, *A density which counts multiplicity*, Pacific J. Math. **34** (1970), 371–378.

[4] R.E. Dressler, *An elementary proof of a theorem of Erdős on the sum of divisors function*, J. Number Theory **4** (1972), 532–536.

[5] P. Erdős, *Some remarsk on Euler's φ-function and some related problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 540–544.

[6] H. Halberstam, H.E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[7] A. Ivić, *The distribution of values of some multiplicative functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **22** (36) (1977), 87–94.

[8] J.L. Nicolas, *Distribution des valeurs de la fonction d'Euler*, l'Enseign. Math. **30** (1984), 331–338.

[9] A. Smati, *Répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, L'Enseign. Math. **35** (1989), 61–76.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
123, Avenue Albert Thomas
87060 Limoges CEDEX, France

(Reçu le 11 10 1989)