PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 48 (62), 1990, 110–118

LA FONCTIONNELLE g ET QUELQUES PROBLÈMES DES MEILLEURES APPROXIMATIONS DANS DES ESPACES NORMÉS

P. M. Miličić

Résumé. Cette note est faite de deux parties. Dans la première nous allons montrer comment on peut caractériser un élement de meilleure approximation dans un espace norme X en utilisant la fonctionnelle g definie par (1). Dans la deuxième partie, en se servant de la fonctionnelle g, nous definissons trois projections d'un vecteur $x \in X$ sur un sous espace $Y \subset X$ et nous etudions quelques relations entre ces projections.

0. Soient X un espace normé réel, X^* le dual topologique de X et: $S(X) := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, $U(X) := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, $J_x := \{f \in X^* \setminus \{0\} \mid f(x) = \|f\|\,\|x\|,\ \|f\| = \|x\|\}$, $\tau_\pm := \lim_{t\to\pm 0} t^{-1}(\|x+ty\| - \|x\|)$ $(x, y \in X;\ t \in \mathbf{R})$, $G_x := \{y \in X \mid \tau_-(x,y) = \tau_+(x,y)\}$,

$$g(x,y) := (1/2)\|x\|\big(\tau_-(x,y) + \tau_+(x,y)\big) \qquad [6]. \tag{1}$$

Les fonctionnelles τ_-, τ_+ et g existent sur X^2, pour tout X. Elles sont les fonctions régulièrement variables, par rapport au second argument au sens de la définition suivante:

Définition 1. L'application $f : X \to \mathbf{R}$ est une fonction regulierement variable si un $\rho \in \mathbf{R}$ existe, tel que pour $\lambda > 0$, on a $\lim_{\|x\|\to\infty} f(\lambda x)/f(x) = \lambda^\rho$.

En outre, nous servons de la notation suivante:

$$\begin{aligned} x \perp y \quad (\mathrm{B}) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\forall\lambda \in \mathbf{R})\|x\| \leq \|x+\lambda y\|^{1)}, \\ x \perp y \quad (g) \quad &\Longleftrightarrow \quad g(x,y) = 0 \qquad [6], \end{aligned}$$

(SC) — pour un espace strictement convexe, (L) — pour un espace lisse, (R) — pour un espace réflexif, (G) — pour un espace X avec la propriété

$$g(x, y+z) = g(x,y) + g(x,z) \quad (x,y,z \in X) \qquad [5], \tag{2}$$

AMS Subject Classification (1985): Primary 46 B 20

[1] Le vecteur x est orthogonal sur le vecteur y au sens de Birkhoff.

et (Λ) — pour un espace X avec la propriété

$$\tau_+(x,y) - \tau_-(x,y) = 2d(y,G_x) \quad (x,y \in X;\ d(y,G_x) = \inf_{t\in G_x} \|y-t\|) \qquad [4].$$

L'espace L^p, pour $p \geq 1$, a la propriété (G) et l'espace c_0 et l'espace L^p $(p \geq 1)$ ont la propriété (Λ). (Voir [5] et [4]).

Dans ce qui suit nous allons appliquer aussi une définition connue et deux résultats auxiliaires. Soient $Y \subset X$, $x \in X$, $x_0 \in Y$. On dit que x_0 est un élément de meilleure approximation par rapport à Y (ou la projection métrique de x sur Y) si $\inf_{y\in Y} \|x-y\| = \|x-x_0\|$. Dans ce cas (et seulement dans ce cas) nous écrivons $x_0 \in P_Y(x)$.

Lemme 1 [5]. *Pour $x, y \in X$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ on a*

(3) $g(x,\lambda y) = g(\lambda x, y) = \lambda g(x,y)$, (5) $|g(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$,

(4) $g(x,x) = \|x\|^2$, (6) $g(x, \lambda x + \mu y) = \lambda\|x\|^2 + \mu g(x,y)$.

Lemme 2 [6]. *Un espace X est strictement convexe si et seulement si, pour $x, y \in S(X)$, on a $x \perp (x-y)$ (g) $\Longrightarrow$ $x = y$.*

1. Voici tout d'abord un résultat géométrique.

Théorème 1.1. *Soit X un espace avec la propriété* (G), $Y \subset X$, $x_0 \in Y$, $x \in X \setminus Y$, $u = (x-x_0)/\|x-x_0\|$ *et* $H := \{h \in X \mid g(u,h) = g(u,x) - \|x-x_0\|\}$. *Alors*:

1) H est un hyperplan du support de la boule $K[x, \|x-x_0\|]$ au point x_0 et $x - x_0 \perp H - x_0$ (g). 2) Si H sépare Y et x alors $x_0 \in P_Y(x)$. 3) Si Y est un ensemble convexe, $x_0 \in P_Y(x)$ et u est un point lisse de la sphere $S(X)$ alors H sépare Y et x.

Demonstration. 1) De $g(u, x-x_0) = \|x-x_0\|$ s'ensuit que $g(u,x_0) = g(u,x) - \|x-x_0\|$. Donc $x_0 \in H$. Pour $h \in H$, d'après le lemme 1, on obtient

$$g(u, h-x_0) = g(u,h) - g(u,x_0) = 0.$$

Cela signifit que $x - x_0 \perp H - x_0$ (g). Cette condition entraîne la condition $x - x_0 \perp H - x_0$ (B) [6], et par conséquent, la condition

$$(\forall\lambda \in \mathbf{R})(\forall h \in H)\|x-x_0\| \leq \|x - x_0 + \lambda(h-x_0)\|.$$

Pour $\lambda = -1$ nous obtenons $(\forall h \in H)\|x-x_0\| \leq \|x-h\|$, c'est-à-dire $d(x,H) = \|x-x_0\|$. 2) Comme H sépare Y et x et comme $d(x,H) = \|x-x_0\|$ nous avons

$$(\forall y \in Y) g(u,y) \leq g(u,x) - \|x-x_0\|.$$

Cette inégalité, d'après le lemme 1 et la propriété (G), entraîne la condition

$$(\forall y \in Y)\|x-y\| \geq g(u, x-y) \geq \|x-x_0\|.$$

Cela signifit que $x_0 \in P_Y(x)$. 3) Comme Y est un ensemble convexe et $x_0 \in P_Y(x)$, d'après le théorème 5.1 de [9] il s'ensuit qu'il existe une $f \in S(X^*)$ telle que $f(x-x_0) = \|x-x_0\|$ et $f(y) \leq f(x_0)$ pour tout $y \in Y$. Alors l'hyperplan

$$H' := \{h' \in X \mid f(h') = f(x) - \|x - x_0\|\}$$

sépare Y et x ($f(Y) \leq f(x_0) = f(x) - \|x-x_0\|$, $f(x) > f(x) - \|x-x_0\|$) et $x_0 \in H'$. Puisque $d(x, H') = \|x - x_0\|$ (Le théorème d'Ascoli) et puisque u est un point lisse de la sphere $S(X)$ il résulte que $H' = H$. Par conséquence, H sépare Y et x.

On montre immédiatement que la remarque 6 et le théorème 3 de [4] entraînent le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soient $Y \subset X$, $x \in X \setminus \bar{Y}$ et $x_0 \in Y$. 1) Si $x_0 \in P_Y(x)$ et Y est un ensemble convexe alors*

$$(\forall y \in Y)|g(x-x_0, y-x_0)| \leq 2d(y-x_0, G_{x-x_0}). \tag{7}$$

2) *Si $x_0 \in P_Y(x)$ et Y est un sous-espace de X alors*

$$(\forall y \in Y)|g(x-x_0, y-x_0)| \leq 2d(y-x_0, G_{x-x_0}). \tag{8}$$

3) *Si X a la propriété (Λ) alors la condition* (7) (*respectivement la condition* (8)) *est suffisante pour que $x_0 \in P_Y(x)$.*

COROLLAIRE 1.1. *Soient $Y \subset X$, $x \in X \setminus \bar{Y}$, $x_0 \in Y$ et soit $u = (x-x_0)/\|x-x_0\|$ un point lisse de la sphere $S(X)$. 1) Si X est un espace avec la propriété (Λ) et Y est un ensemble convexe alors*

$$x_0 \in P_Y(x) \iff (\forall y \in Y) g(x-x_0, y-x_0) \leq 0. \tag{7'}$$

2) *Si Y est un sous-espace de X (X est un espace arbitraire) alors*

$$x_0 \in P_Y(x) \iff x - x_0 \perp Y \ (g). \tag{8'}$$

Démonstration. 1) Comme on a $\tau_\pm(\lambda x, \mu y) = \mu \tau_\pm(x,y)$ pour $x, y \in X$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors l'égalite

$$\tau_-\left(u, \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}\right) = \tau_+\left(u, \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}\right)$$

implique $(\forall y \in Y) d(y-x_0, G_{x-x_0}) = 0$. 2) $g(x-x_0, y) = 0 \implies g(x-x_0, x-x_0+y) = \|x-x_0\|^2 \leq \|x-x_0\|\,\|x-x_0+y\| \implies \|x-x_0\| \leq \|x-y\|$, $y \in Y$.

Si un espace X a la propriété (L) alors la fonctionnelle $g(x,y)$ est un semi-produit scalaire sur X^2 dans le cas réel, et dans le cas complexe la fonctionnelle $g(x,y) - ig(x, iy)$ est un semi-produit scalaire sur X^2. Dans ce cas-là l'orthogonalité au sens de Birkhoff et la g-orthogonalité sont équivalentes [6, Théorème 2]). À cause de cela les résultats principaux dans [**1**] sont des conséquences du corollaire 1.1. Nous citons ces résultats pour le cas réel.

COROLLAIRE 1.2. (Théorème 1.2 de [**1**]). *Si X a la propriété* (L) *et Y est un sous-espace fermé de X, $x \in X$ et $x_0 \in Y$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1) $(\exists x' \in X) g(x', Y) = 0 \wedge x = x_0 + x'$, 2) $x_0 \in P_Y(x)$.

Démonstration. $g(x', Y) = 0 \wedge x = x_0 + x' \implies g(x - x', Y) = 0$. Donc, d'après (8′), 1) $\implies$ 2). Inversement, d'après (8′), $x_0 \in P_Y(x) \implies g(x - x_0, Y) = 0$ et à cause de cela $x = x_0 + x'$ où $g(x', Y) = 0$.

COROLLAIRE 1.3. (Théorème 1.5 de [**1**]). *Si X a la propriété* (L) *et $f \in X^* \setminus \{0\}$, $x_0 \in \operatorname{Ker} f$ et $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1) $(\forall y \in X) f(y) = g\left(\dfrac{f(x)(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2}, y\right)$, 2) $|f(x)| = \|f\| \, \|x - x_0\|$,

3) $x_0 \in P_{\operatorname{Ker} f}(x)$.

Démonstration. Ici nous allons nous servir du lemme 3 de [**6**]: Pour $x \in X \setminus \{0\}$ et $f \in X^* \setminus \{0\}$ on a

$$(*) \qquad x \perp \operatorname{Ker} f \iff f(x) = \|f\| \, \|x\|.$$

D'après 1) nous avons $x - x_0 \perp \operatorname{Ker} f$. Comme nous avons aussi $f(x - x_0) = f(x)$, il s'ensuit que 1) $\implies$ 2). Inversement 2) $\implies$ $x - x_0 \perp \operatorname{Ker} f$. Alors, pour $y \in X$, il existent un $\lambda \in \mathbf{R}$ et un $h \in \operatorname{Ker} f$ tels qu'on a $y = \lambda(x - x_0) + h$. À cause de cela nous obtenons $f(y) = \lambda \|f\| \, \|x - x_0\|$ et $g\left(\dfrac{f(x)(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2}, y\right) = \lambda f(x)$. Donc on a 1). Les équivalences $(*)$ et (8′) donnent l'équivalence 2) $\iff$ 3).

2. Si Y est un sous-espace d'un espace préhilbertien X, $x \in X$ et $x_0 \in Y$ alors on a

$$x_0 \in P_Y(x) \iff x - x_0 \perp Y \iff Y \perp x - x_0.$$

Dans ce cas on dit que le vecteur x_0 est la projection orthogonalle du vecteur x sur le sous-espace Y.

Étant donné que l'orthogonalité au sens de Birkhoff n'est pas symétrique pour un espace arbitraire normé, alors, en générale, l'équivalence

$$x - x_0 \perp Y \text{ (B)} \iff Y \perp x - x_0 \text{ (B)}$$

n'est pas correcte. À cause de cela C. Franchetti et Furi [**2**], définissent l'application $R_Y : X \to 2^Y$, pour un sous-espace Y de X, par

$$x^0 \in R_Y(x) \iff Y \perp x - x^0 \text{ (B)}.$$

Mettant à profit la fonctionnelle g, pour un sous-espace Y on peut définir deux projections d'un vecteur $x \in X$ sur Y.

Définition 2. Un vecteur $x_0 \in Y$ est la projection g-orthogonalle du vecteur $x \in X$ sur Y si $x - x_0 \perp Y$ (g). Dans ce cas (et seulement dans ce cas) nous écrivons $x_0 \in P_Y^g(x)$.

Définition 3. Un vecteur $x^0 \in Y$ est la projection g-transversalle du vecteur $x \in X$ sur Y si $Y \perp x - x^0$ (g). Dans ce cas (et seulement dans ce cas) nous écrivons $x^0 \in R_Y^g(x)$.

Spécialement pour un sous-espace $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \subset X$ on peut définir encore une projection de vecteur $x \in X$ sur Y.

Définition 4. Nous aprellerons le vecteur:

$$(9) \qquad \bar{x} := \frac{-1}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ g(y_1,x) & g(y_1,y_1) & g(y_1,y_2) & \dots & g(y_1,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(y_n,x) & g(y_n,y_1) & g(y_n,y_2) & \dots & g(y_n,y_n) \end{vmatrix}$$

où

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} g(y_1,y_1) & g(y_1,y_2) & \dots & g(y_1,y_n) \\ g(y_2,y_1) & g(y_2,y_2) & \dots & g(y_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(y_n,y_1) & g(y_n,y_2) & \dots & g(y_n,y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

la projection de Gram-Schmidt du vecteur $x \in X$ sur Y. (On peut démontrer qu'on a $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \implies \dim Y = n$).

Donc, pour $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, où $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$, le vecteur $x \in X$ peut avoir trois projections sur Y: x_0, x^0 et $\bar{x}$. Les projections x_0 et $\bar{x}$ existent pour tout $x \in X$.

Comme dans un espace lisse on a $x \perp y$ (B) $\iff$ $x \perp y$ (g) (le théorème 2 de [6]) alors dans ce cas, pour tout $x \in X$, $P_Y^g(x) = P_Y(x)$ et $R_Y^g(x) = R_Y(x)$.

Au cas où X est un espace préhilbertien (le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ existe sur X^2) nous avons $g(x,y) = (x,y)$ et par conséquent, nous avons aussi: $x_0 = x^0 = \bar{x}$.

L'exemple suivant montre que l'égalité $P_Y^g(x) = P_Y(x)$ $(R_Y^g(x) = R_Y(x))$ n'est pas correcte pour tout espace normé. Soit $X = l_2^1 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ et $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. On montre que dans ce cas $g(x,y) = \|x\|(y_1 \operatorname{sgn} x_1 + y_2 \operatorname{sgn} x_2)$. Soit $Y = [y]$ où $y = (1,1)$ et $x = (0,1)$. Alors $d(y,Y) = \inf_{t \in \mathbf{R}}(|1 - t| + |t|) = |1-t| + |t|$, $t \in [0,1]$. Cela signifit que $x_0 = (1,1) \in P_Y(x)$, Alors $x - x_0 = (-1, 0)$ et il suit que $g(x - x_0, y) = -t \neq 0$ pour $y \in Y$ et $y \neq (0,0)$.

Tout d'abord voici quelques résultats élémentaires sur les notions introduites.

THÉORÈME 2.1. *Soit Y un sous-espace de X. Alors*:

1) *pour $x_0 \in P_Y^g(x)$ et $x^0 \in R_Y^g(x)$ on a*

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x^0\| \leq 2\|x - x_0\| \quad \textit{et} \quad \|x^0\| \leq \|x\|;$$

2) *pour* X *avec la propriété* (G) *et* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$, *on a:*

$$x \in Y \iff x_0 = x^0 = \bar{x}, \quad \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \perp x - \bar{x}\,(g)$$
$$\text{et} \quad x^0 \in R_Y^g(x) \implies x^0 = \bar{x};$$

3) *Si* X *est un espace avec la propriété* (G) *alors*

$$D(R_Y^g) := \{x \in X \mid R_Y^g(x) \neq \varnothing\}$$

est un sous-espace de X *et* $R_Y^g : D(R_Y^g) \to Y$ *est un opérateur linéaire avec* $\|R_Y^g\| = 1$.

Démonstration. 1) $x^0 \in R_Y^g(x) \implies Y \perp x - x^0\,(\mathrm{B}) \implies (\forall \lambda \in \mathbf{R})$ $\|x^0 - x_0\| \le \|x^0 - x_0 + \lambda(x - x_0)\| \implies \|x^0 - x_0\| \le \|x - x_0\|$. Par conséquent $\|x - x_0\| \le\neq x - x^0 = \|x - x_0 + x_0 - x^0\| \le \|x - x_0\| + \|x_0 - x^0\| \le 2\|x - x_0\|$. De $g(x^0, x - x^0) = 0$ on obtient que $\|x^0\| \le \|x\|$.

2) $x \in Y \wedge g(x - x_0, Y) = 0 \implies g(x - x_0, x - x_0) = \|x - x_0\|^2 = 0$.

$$x \in Y \wedge g(Y, x - x^0) = 0 \implies g(x - x^0, x - x^0) = \|x - x^0\|^2 = 0.$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \implies (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) g(y_i, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(y_i, y_k).$$

D'où il résulte que, par exemple,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} g(y_1, x) & g(y_1, y_2) & \dots & g(y_1, y_n) \\ g(y_2, x) & g(y_2, y_2) & \dots & g(y_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(y_n, x) & g(y_n, y_2) & \dots & g(y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

À cause de cela et de (9) on a $x = \bar{x}$. En appliquant la propriété (G), d'après (9), nous obtenons, pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$g(y_k, x) = -\frac{1}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} 0 & g(y_k, y_1) & g(y_k, y_2) & \dots & g(y_k, y_n) \\ g(y_1, x) & g(y_1, y_1) & g(y_1, y_2) & \dots & g(y_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(y_n, x) & g(y_n, y_1) & g(y_1, y_2) & \dots & g(y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et, par conséquent $g(y_k, \bar{x}) = g(y_k, x)$. Donc, $g(y_k, x - \bar{x}) = 0$.

Soit maintenent $x^0 \in R_Y^g(x)$. On a alors $x^0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ et $g(y_k, x - x^0) = 0$ et par conséquent

$$g(y_k, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(y_k, y_i), \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Donc le coefficient λ_i et le coefficient du vecteur y_i dans (9) sont égaux. Donc $\bar{x} = x^0$.

Pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$ on a $g(y, x - g(y,x)\|y\|^{-2}y) = g(y,x) - g(y,x) = 0$. D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $g(\lambda y, x)\|\lambda y\|^{-2}\lambda y = g(y,x)\|y\|^{-2}y$. Donc $x^0 = \bar{x}$.

3) Soit $x', x'' \in D(R_Y^g)$. Alors $y', y'' \in Y$ existent tels qu'on a $g(Y, x' - y') = 0$ et $g(Y, x'' - y'') = 0$. Donc on a $g(Y, x' + x'' - (y' + y'')) = 0$; c'est-à-dire $x' + x'' \in D(R_Y^g)$. En outre $g(Y, x - x^0) = 0 \implies (\forall\lambda \in \mathbf{R})g(Y, \lambda x - \lambda x^0) = 0 \implies \big(x \in D(R_Y^g) \implies (\forall\lambda \in \mathbf{R})\lambda x \in D(R_Y^g)\big)$. Donc $D(R_Y^g)$ est un sous-espace de X. Ce fait et 2) montrent que l'application $R_Y^g : D(R_Y^g) \to Y$ est un opérateur linéaire. En appliquant 1) et 2) on obtient $\|R_Y^g\| = 1$.

Corollaire 2.1. *S'il existe une projection g-transversalle, sous les conditions* 2) *du théorème* 2.1, *alors elle est unique.*

Corollaire 2.2. *Si, sous les conditions* 2), *la suite* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *est orthonormalle* ($g(y_i, y_k) = \delta_{ik}$) *et s'il existe* $x^0 \in R_Y^g(x)$ *alors*

$$x^0 = \sum_{k=1}^{n} g(y_k, x)y_k.$$

Soit $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ et $x \in X \setminus Y$. Nous savons (voir **[8]**) que l'implication

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \perp x - y \ (\mathrm{B}) \implies Y \perp x - y \ (\mathrm{B})$$

n'est pas correcte pour tout X normé. Aussi il est bien connu que l'implication $y \in Y \implies f_y \in [f_{y_1}, f_{y_2}, \dots, f_{y_n}]$ n'est pas correcte en général, où f_y signifit une fonctionnelle fixée de J_y. Mais quand X a les propriétés (SC), (L) et (R) (par exemple $X = L^p$, $p > 1$) alors, pour chaque $x \neq 0$, J_x est un singleton. C'est pourquoi, dans ce cas, J_x signifit une fonctionnelle unique et $\bar{J}_x$ est la projection de Gram-Schmidt du vecteur J_x sur le sous-espace $[J_{y_1}, J_{y_2}, \dots, J_{y_n}]$.

Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Si X possède les propriétés* (SC), (L) *et* (R) *et* $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, $\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ *et* $x \in X \setminus \bar{Y}$, *alors*:
1) $(\forall y \in Y)J_y = \bar{J}_y$. 2) $R_Y^g(x) = R_Y(x) = \{\bar{x}\}$.
3) $g(x, \bar{x}) < \|x\|^2$ *et* $J_{x-x_0} = \dfrac{\|x - x_0\|^2}{\|x\|^2 - g(x, \bar{x})}(J_x - \bar{J}_x)$.

Démonstration. 1) Sous les conditions (SC), (L) et (R) on a le théorème de représentation

$$(\forall f \in X^*)(\exists x \in X)(\forall y \in X)f(y) = g(x, y)$$

où x est un élément unique de X. Alors pour tout $x \in X \setminus \{0\}$ on a $J_x = g(x, \cdot)$ et la fonctionnelle $g(J_y, J_x) := g(x, y)$ est le semi-produit scalaire unique sur $X^* \times X^*$ **[3]**. Donc, par définition, on a

$$(10) \qquad \bar{J}_x = -\frac{1}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} 0 & J_{y_1} & \dots & J_{y_n} \\ g(x, y_1) & g(y_1, y_1) & \dots & g(y_n, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(x, y_n) & g(y_1, y_n) & \dots & g(y_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Puisque $J_{y_k} \in Y^*$, il existe un $z \in Y$ (unique) tel que $\bar{J}_x = g(z, \cdot)$. L'égalité (10) entraîne l'égalité

$$\text{(11)} \qquad J_x - \bar{J}_x = \frac{1}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} J_x & J_{y_1} & \dots & J_{y_n} \\ g(x, y_1) & g(y_1, y_1) & \dots & g(y_n, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(x, y_n) & g(y_1, y_n) & \dots & g(y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et par conséquent $(J_x - \bar{J}_x)(y_k) = 0$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. $(J_x(y_k) = g(x, y_k)$, $J_{y_i}(y_k) = g(y_i, y_k))$. Donc, pour $x \in Y$,

$$(\forall t \in Y) g(x, t) = g(z, t).$$

C'est-à-dire $x = z$ ou $J_x = \bar{J}_x$. (Le théorème de représentation a lieu dans l'espace Y).

2) D'après 1), pour $y \in Y$ les constantes λ_k existent telles que $J_y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k J_{y_k}$. Alors

$$\begin{aligned} g(y, x - \bar{x}) &= g(J_{x-\bar{x}}, J_y) = g\left(J_{x-\bar{x}}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k J_{y_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(J_{x-\bar{x}}, J_{y_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(y_k, x - \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $(\forall y \in Y) g(y, x - \bar{x}) = 0$ et par conséquent $\bar{x} \in R_Y^g(x) = R_Y(x)$.

3) Dans le cas où $x \in X \setminus \bar{Y}$, Papini [**8**] a montré qu'il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\text{(12)} \qquad \lambda J = J_{x-x_0}$$

où J est le terme du coté droit de l'égalité (11). Par conséquent il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\text{(13)} \qquad \lambda(J_x - \bar{J}_x) = J_{x-x_0}.$$

Étant donné que $J_{y_k}(x - \bar{x}) = g(y_k, x - \bar{x}) = 0$ d'après (13) il s'ensuit que $\lambda J_x(x - \bar{x}) = J_{x-x_0}(x - \bar{x})$. Ceci entraîne $\lambda g(x, x - \bar{x}) = g(x - x_0, x - \bar{x}) = g(x - x_0, x) = \|x - x_0\|^2$. Donc, $\lambda = \dfrac{\|x - x_0\|^2}{\|x\|^2 - g(x, \bar{x})}$, pour $g(x, \bar{x}) \neq \|x\|^2$. Montrons que $g(x, \bar{x}) < \|x\|^2$. En effet, d'après 2) du théorème 2.2 et 1) du théorème 2.1 on a $\|\bar{x}\| < \|x\|$ et par conséquent $g(x, \bar{x}) \leq \|x\| \|\bar{x}\| \leq \|x\|^2$. Supposons maintenant que $g(x, \bar{x}) = \|x\|^2$. Alors $\|x\|^2 \leq \|x\| \|\bar{x}\|$. Il résulte que

$$g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) = g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{ou} \quad g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} - \frac{x}{\|x\|}\right) = 0.$$

D'où, d'après le lemme 2, $\bar{x}/\|\bar{x}\| = x/\|x\|$, ou $x = \bar{x}$, ce qui n'est pas possible parce que $x \in X \setminus \bar{Y}$ et $\bar{x} \in Y$.

Voici un commentaire des résultats 1), 2) et 3).

L'égalité 1) montre que, sous les conditions (SC), (L) et (R), pour tout $y \in Y$, J_y est une combinaison linéaire des vecteurs $J_{y_1}, J_{y_2}, \dots, J_{y_n}$, ce qui n'est pas vrai en général. L'égalité 2), d'après 1) du théorème 2.1, montre que $\bar{x}$ est la projection g-transversalle unique telle que

$$\|x - x_0\| \le \|x - \bar{x}\| \le 2\|x - x_0\| \quad \text{et} \quad \|\bar{x} - x_0\| \le 3\|x - x_0\|.$$

La deuxième inégalité montre que $\bar{x}$ est près de x_0 si x est près de Y. Ce fait peut être important par ce que la projection $\bar{x}$ peut être calculée sans peine.

Par rapport au λ de (12) Papini a posé la question: Est-ce-qu'il se peut que $\lambda < 0$? D'après 3) nous obtenons une réponse négative à cette question de Papini, c'est-à-dire on a

$$\lambda = \frac{\|x - x_0\|^2}{\|x\|^2 - g(x, \bar{x})}, \qquad \text{pour } x \in X \setminus \bar{Y}.$$

Corollaire 2.3. *Sous les conditions du théorème* 2.2 *on a*

$$\frac{\Gamma(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \|x\|^2 - g(x, \bar{x}) > 0$$

et

$$g(J_x, \bar{J}_x) = g(J_{\bar{x}}, J_x) = g(x, \bar{x}).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. Dragomir, *Representation of continuous linear functionals on smooth normed linear spaces*, Anal. Numer Theor. Approx. **17** (2) (1988), 125–132.

[2] C. Franchetti, M. Feri, *Some characteristic properties of real Hilbert spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **17** (1972), 1045–1048.

[3] J. R. Giles, *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436–444.

[4] G. Godini, *Geometrical Properties of a Class of Banach Spaces Including the Spaces L^p* ($1 \le p$), Math. Ann. **243** (1979), 197–212.

[5] P. M. Miličić, *Sur les espaces semi-lisses*, Mat. Vesnik **36** (1984), 222–226.

[6] P. M. Miličić, *Sur la g-orthogonalité dans des espaces normés*, Mat. Vesnik **39** (1987), 325–334.

[7] P. M. Miličić, *Une géneralisation naturelle du produit scalaire dans un espace normé et son utilisation*, Publ. Inst. Math. Beograd, **42** (**56**) (1987); 63–70.

[8] P. L. Papini, *Some Questions Related to the Concept of Orthogonality in Banach Spaces. Proximity Maps; Bases*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11** (1975), 44–63.

[9] I. Singer, *Best Approximation on Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer-Verlag and Acad. RSR, Bucharest, 1970.

Matematički fakultet
p.p. 550
11001 Beograd, Yugoslavia

(Reçu le 18 09 1989)
(Revisé le 20 02 1990)